JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. FRENET

Sur les courbes à double courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 437-447.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__437_0>

SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. F. FRENET,
Professeur à la Faculté des Sciences à Lyon.

(Extrait d'une Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Toulouse, le 10 juillet 1847.)

1. En un point M d'une courbe à double courbure on peut considérer trois droites, qui sont : la tangente, la normale principale, c'est-à-dire celle qui est dirigée suivant le rayon de courbure, et la perpendiculaire au plan osculateur qui sera désignée simplement sous le nom d'*axe*. Les cosinus des angles que les directions de ces droites font avec les axes coordonnés seront respectivement

$$\text{(A)} \qquad a,\ b,\ c;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu;\quad \alpha,\ 6,\ \gamma.$$

En posant

$$A = dy\,d^2z - dz\,d^2y,$$
$$B = dz\,d^2x - dx\,d^2z,$$
$$C = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

et

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

on sait qu'on a

$$\alpha = \frac{A}{D},\quad 6 = \frac{B}{D},\quad \gamma = \frac{C}{D};$$

D est aussi égal à $\omega\,ds^2$, ω étant l'angle de contingence.

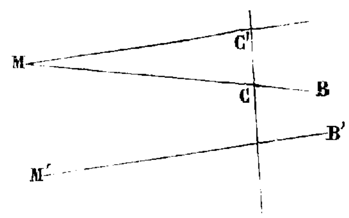
Les neuf quantités (A) sont liées par les relations suivantes :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,\qquad \alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 = 1;$$
$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0,\quad a\alpha + b6 + c\gamma = 0,\quad \alpha\lambda + 6\mu + \gamma\nu = 0;$$
$$a = \mu\gamma - \nu 6,\quad \alpha = b\nu - c\mu,\quad \lambda = 6c - \gamma b;$$
$$b = \nu\alpha - \lambda\gamma,\quad 6 = c\lambda - a\nu,\quad \mu = \gamma a - \alpha c;$$
$$c = \lambda 6 - \mu\alpha,\quad \gamma = a\mu - b\lambda,\quad \nu = \alpha b - 6a.$$

2. *Calcul de l'angle de deux droites infiniment voisines.* — Soient l, m, n les cosinus *déterminants* d'une droite MB, ces cosinus étant des fonctions continues des coordonnées du point M. Une méthode connue pour trouver l'angle de cette droite avec la

droite infiniment voisine M′B′, consiste à mener par le point M une parallèle à M′B′, à prendre sur les directions de ces lignes dont on cherche l'angle deux longueurs MC,

Fig. 1.



MC′ égales à l'unité, et à projeter sur les axes le contour CC′MC. On trouve ainsi, en appelant φ l'angle demandé, et f, g, h les cosinus qui fixent la direction de CC′,

$$f\varphi = dl,\quad g\varphi = dm,\quad h\varphi = dn,$$

et, par suite,

$$\varphi = \sqrt{dl^2 + dm^2 + dn^2};$$

φ étant connu, on en déduit

$$f = \frac{dl}{\varphi},\quad g = \frac{dm}{\varphi},\quad h = \frac{dn}{\varphi},$$

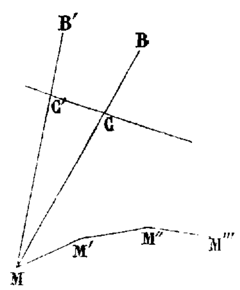
et ces quantités font connaître la direction limite des positions de CC′.

En appliquant ces formules à l'angle de contingence, on trouve

$$\omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2},\quad \frac{da}{\omega} = \lambda,\quad \frac{db}{\omega} = \mu,\quad \frac{dc}{\omega} = \nu.$$

3. *Angle de torsion.* — Soient M, M′, M″, M‴ quatre points consécutifs d'une

Fig. 2.



courbe, MB *la direction* de l'axe du plan osculateur MM′M″, MB′ *la direction* de l'axe du plan osculateur M′M″M‴, et admettons, pour fixer les idées, que le point M‴ soit du même côté que MB par rapport au plan MM′M″ ; les longueurs MC, MC′, prises sur les *directions mêmes* dont nous venons de parler, étant égales, C′C a pour direction limite celle d'une perpendiculaire à l'*axe* MB et à l'intersection des deux plans osculateurs, c'est-à-dire à la tangente. Cette direction est donc celle de la normale principale en M, pourvu qu'on aille de C′ en C, et non de C en C′. En opérant comme plus haut, et désignant par u l'angle de torsion, on trouve

$$(1) \qquad u = \sqrt{d\alpha^2 + d6^2 + d\gamma^2}, \quad \lambda = -\frac{d\alpha}{u}, \quad \mu = -\frac{d6}{u}, \quad \nu = -\frac{d\gamma}{u};$$

et aussi

$$u = -\frac{d\alpha}{\lambda} = -\frac{d6}{\mu} = -\frac{d\gamma}{\nu}.$$

On peut voir que, dans l'hypothèse que nous avons faite, $d\alpha$ et λ sont de signes contraires, et, par suite, u positif. Par exemple, si λ est positif, supposons un plan P parallèle à ZOY et qui laisse toute la figure à sa droite; *la direction* C′C devant faire un angle aigu avec l'axe des x, le plan P sera rencontré par *la direction* CC′ prolongée, ce qui ne peut être qu'autant que le point C′ est plus près de ce plan que le point C; cela revient à dire que l'angle de MB′ avec l'axe des x est plus grand que l'angle de MB avec le même axe; l'accroissement $d\alpha$ sera donc négatif. On verrait de même que si λ était négatif, $d\alpha$ serait positif. Mais si l'on suppose M‴ d'un autre côté que MB par rapport au plan osculateur MM′M″, nous trouverons

$$u = \frac{d\alpha}{\lambda},$$

ce qui exigerait deux formules différentes pour u. Afin d'éviter cet inconvénient, nous conviendrons que l'angle de torsion sera positif dans le premier cas que nous avons considéré et négatif dans le second; de sorte qu'il sera toujours représenté, en grandeur et en signe, par l'une des expressions

$$-\frac{d\alpha}{\lambda}, \quad -\frac{d6}{\mu}, \quad -\frac{d\gamma}{\nu}.$$

Nous pouvons déduire de là l'expression ordinaire de u. En effet, de l'équation

$$a\alpha + b6 + c\gamma = 0$$

on tire

$$\alpha da + 6db + \gamma dc = -(ad\alpha + bd6 + cd\gamma) = u(\lambda da + \mu db + \nu dc),$$

et, à cause des formules (1),

$$\alpha da + 6db + \gamma dc = u\omega.$$

Cette dernière relation devient

$$u = \frac{\alpha d^2 \frac{dx}{ds} + \beta d^2 \frac{dy}{ds} + \gamma d^2 \frac{dz}{ds}}{\omega} = ds \frac{\alpha d^3 x + \beta d^3 y + \gamma d^3 z}{\omega\, ds^2},$$

d'où enfin

$$u = ds \frac{\mathrm{A}\, d^3 x + \mathrm{B}\, d^3 y + \mathrm{C}\, d^3 z}{\mathrm{D}^2}:$$

c'est la formule connue. Des calculs analogues nous conduiraient facilement à d'autres formes de la valeur de u.

4. *Angle de deux rayons de courbure infiniment voisins.* — Soit θ cet angle. En raisonnant comme au n° **2**, on trouve

$$\theta^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2.$$

Or

$$d\lambda = c\, d\beta - b\, d\gamma + \beta\, dc - \gamma\, db = u(b\nu - c\mu) - \omega(\mu\gamma - \nu\beta) = \alpha u - a\omega,$$

et de même

$$d\mu = \beta u - b\omega, \quad d\nu = \gamma u - c\omega;$$

par suite,

$$d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = \theta^2 = u^2 + \omega^2.$$

Lancret avait obtenu cette relation par une tout autre voie.

5. *Élément de la courbe lieu des centres de courbure.* — Soit m un point de cette courbe répondant au point M de la proposée. En désignant ses coordonnées par ξ, η, ζ, et par ρ le rayon de courbure en M, on a

$$\xi - x = \rho\lambda, \quad \eta - y = \rho\mu, \quad \zeta - z = \rho\nu.$$

On en déduit

$$d\xi - dx = \rho\, d\lambda + \lambda\, d\rho, \quad d\eta - dy = \rho\, d\mu + \mu\, d\rho, \quad d\zeta - dz = \rho\, d\nu + \nu\, d\rho.$$

Remplaçons $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ par leurs valeurs du n° **4**, il vient

$$d\xi = \lambda\, d\rho + \rho\alpha u, \quad d\eta = \mu\, d\rho + \rho\beta u, \quad d\zeta = \nu\, d\rho + \rho\gamma u,$$

et, par suite,

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 u^2.$$

Cette relation est due à M. Molins.

Les dernières équations nous donnent

$$a\, d\xi + b\, d\eta + c\, d\zeta = d\rho(a\lambda + b\mu + c\nu) + u\rho(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

ce qui nous apprend que la tangente en m est dans le plan normal en M.

Pour avoir l'angle que cette droite fait avec la normale principale, multiplions ces mêmes équations respectivement par λ, μ, ν, et ajoutons : il vient

$$\lambda\, d\xi + \mu\, d\eta + \nu\, d\zeta = d\rho.$$

Soit φ l'angle cherché,

$$\cos\varphi = \frac{d\rho}{d\sigma}, \quad \sin\varphi = \frac{\rho u}{d\sigma}, \quad \tang\varphi = \frac{\rho u}{d\rho};$$

ces valeurs nous conduisent aux relations suivantes :

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \lambda\cos\varphi + \alpha\sin\varphi, \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \mu\cos\varphi + 6\sin\varphi, \quad \frac{d\zeta}{d\sigma} = \nu\cos\varphi + \gamma\sin\varphi.$$

Ces équations admettent une interprétation géométrique très-simple.

6. *Droite polaire.* — C'est l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins. Si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées courantes, ce sera aussi l'intersection de deux plans ayant respectivement pour équation

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l}(X - x)\,a + (Y - y)\,b + (Z - z)\,c = 0,\\ (X - x)\,da + (Y - y)\,db + (Z - z)\,dc - ds = 0.\end{array}\right.$$

Le premier est le plan normal en M, le second lui est perpendiculaire, car

$$ada + bdb + cdc = 0,$$

et passe par le centre de courbure dont les coordonnées sont

$$x + \frac{da}{ds}, \quad y + \frac{db}{ds}, \quad z + \frac{dc}{ds}.$$

La droite limite de l'intersection de ces deux plans est donc une perpendiculaire au plan osculateur menée par le centre de courbure.

7. *Point de rencontre de deux droites polaires consécutives.* — Les coordonnées de ce point M_1 satisfont aux deux équations (2), dont la dernière peut se mettre sous la forme

$$(X - x)\frac{\lambda}{\rho} + (Y - y)\frac{\mu}{\rho} + (Z - z)\frac{\nu}{\rho} - 1 = 0,$$

et aussi à l'équation qu'on obtient en différentiant cette dernière par rapport à x, y et z ; elles seront donc fournies par les relations suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l}(X - x)\,a + (Y - y)\,b + (Z - z)\,c = 0,\\ (X - x)\dfrac{\lambda}{\rho} + (Y - y)\dfrac{\mu}{\rho} + (Z - z)\dfrac{\nu}{\rho} - 1 = 0,\\ (X - x)\,d\cdot\dfrac{\lambda}{\rho} + (Y - y)\,d\cdot\dfrac{\mu}{\rho} + (Z - z)\,d\cdot\dfrac{\nu}{\rho} = 0.\end{array}\right.$$

On déduit de la première et de la troisième,

$$\frac{X - x}{bd\dfrac{\nu}{\rho} - cd\dfrac{\mu}{\rho}} = \frac{Y - y}{cd\dfrac{\lambda}{\rho} - ad\dfrac{\nu}{\rho}} = \frac{Z - z}{ad\dfrac{\mu}{\rho} - bd\dfrac{\lambda}{\rho}}.$$

Or

$$bd\frac{\nu}{\rho} - cd\frac{\mu}{\rho} = bd\frac{dc}{ds} - cd\frac{db}{ds} = d\left(\frac{bdc - cdb}{ds}\right) = d\frac{\alpha}{\rho}.$$

Cette dernière expression étant égale à $\frac{\rho d\alpha - \alpha d\rho}{\rho^2}$, les formules du n° 3 nous donnent

$$\frac{X - x}{\alpha\frac{d\rho}{u} + \rho\lambda} = \frac{Y - y}{6\frac{d\rho}{u} + \rho\mu} = \frac{Z - z}{\gamma\frac{d\rho}{u} + \rho\nu}.$$

Appelons T la valeur commune de ces rapports ; la deuxième des équations (3) devient

$$\frac{T}{\rho}\left[\lambda\left(\alpha\frac{d\rho}{u} + \rho\lambda\right) + \mu\left(6\frac{d\rho}{u} + \rho\mu\right) + \nu\left(\gamma\frac{d\rho}{u} + \rho\nu\right)\right] = 1,$$

d'où

$$T = 1 ;$$

par conséquent,

$$(4) \qquad X - x = \alpha\frac{d\rho}{u} + \rho\lambda, \quad Y - z = 6\frac{d\rho}{u} + \rho\mu, \quad Z - z = \gamma\frac{d\rho}{u} + \rho\nu.$$

8. *Rayon de la sphère osculatrice.* — Les dernières équations donnent pour ce rayon R, qui est égal à $\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2}$, la valeur simple

$$R = \sqrt{\frac{d\rho^2}{u^2} + \rho^2};$$

d'où l'on voit que $\frac{d\rho}{u}$ représente la distance du point M_1 au plan osculateur en M. Soit h cette distance, les relations (4) deviennent

$$(5) \qquad (X - x) = \alpha h + \rho\lambda, \quad (Y - y) = 6h + \rho\mu, \quad (Z - z) = \gamma h + \rho\nu.$$

On obtiendrait immédiatement ces résultats en projetant successivement sur les trois axes le triangle qui a pour côtés R, h et ρ.

En rapprochant la valeur de h de celle trouvée pour tang φ (n° 5), on en conclut

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\rho}{h}.$$

L'angle de la tangente à la courbe, lieu des centres de courbure, avec le rayon du cercle osculateur est donc le complément de l'angle que fait ce même rayon avec le rayon de la sphère osculatrice.

Si l'on compare la valeur de $d\sigma$ avec celle de R, on trouve

$$R = \frac{d\sigma}{u},$$

ce qui fournit un nouveau théorème.

Les deux dernières propositions, ainsi que les valeurs de R et de h, ont été données autrement par M. Molins.

9. Le lieu des droites polaires est la surface polaire qui a pour arête de rebroussement le lieu des points M_1. La tangente et le plan osculateur en ce point ne sont autres que la droite polaire et le plan normal relatifs au point M. C'est ce qu'on voit facilement par le calcul en différentiant deux fois la première des équations (2) et une fois la seconde, X, Y, Z étant considérés dans ces équations comme les coordonnées de M_1. On conclut de là deux théorèmes dus à Fourier et dont les énoncés sont :

Théorème I. *L'angle de contingence en un point de l'arête de rebroussement de la surface polaire est égal à l'angle de torsion de la courbe au point correspondant.*

Théorème II. *L'angle de torsion de cette même arête est égal à l'angle de contingence de la courbe.*

10. *Élément de l'arête de rebroussement de la surface polaire.* — Il résulte de ce qui vient d'être dit qu'en désignant par dS l'élément de la courbe des points M, on a

$$\frac{dX}{dS} = \alpha,\quad \frac{dY}{dS} = \beta,\quad \frac{dZ}{dS} = \gamma.$$

Différentions maintenant la première des équations (5), et remplaçons-y dX par αdS : elle donne

$$\alpha dS - dx = \alpha dh + h d\alpha + \lambda d\cdot + \rho d\lambda.$$

Substituons à $d\alpha$, $d\lambda$ et h leurs valeurs connues; il vient, après réduction,

$$dS = dh + \rho u.$$

Comme

$$u = \frac{d\rho}{h},$$

on peut aussi écrire

$$dS = \frac{h dh + \rho d\rho}{h} = \frac{R dR}{h} = \frac{dR}{\cos\varphi},$$

résultat qui se tire immédiatement de la figure.

On a d'ailleurs

$$d\sigma = \frac{d\rho}{\cos\varphi}:$$

par conséquent,

$$\frac{dS}{d\sigma} = \frac{dR}{d\rho},$$

ce qui est l'expression d'un théorème.

La valeur de dS, combinée avec les théorèmes de Fourier, donne des formules simples pour les rayons de première et de seconde courbure de la courbe des points M_1.

En les désignant par ρ_1 et r_1, ceux des points M étant ρ et r, on trouve

$$\rho_1 = \frac{dS}{u} = \frac{R\,dR}{hu} = \frac{R\,dR}{d\rho},$$

$$r_1 = \frac{dS}{\omega} = \frac{\rho}{r}\,\frac{R\,dR}{d\rho}.$$

11. *Angle de deux rayons de courbure sphérique infiniment voisins.* — Soient L, M, N les *cosinus déterminants* du rayon de courbure sphérique, ψ l'angle dont il s'agit; on a, d'après ce qui a été vu,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &RL = X - x = \alpha h + \rho\lambda,\\ &RM = Y - y = 6h + \rho\mu,\\ &RN = Z - z = \gamma h + \rho\nu,\\ &\psi^2 = dL^2 + dM^2 + dN^2.\end{aligned}\right.$$

Les équations (6) nous donnent

$$R\,dL + L\,dR = dX - dx = \alpha\,dS - dx,$$
$$R\,dM + M\,dR = dY - dy = 6\,dS - dy,$$
$$R\,dN + N\,dR = dZ - dz = \gamma\,dS - dz.$$

Élevons au carré et ajoutons, il vient, après des réductions simples,

$$R^2\psi^2 + dR^2 = dS^2 + ds^2.$$

On déduit de là, en tenant compte de la relation $dS = \dfrac{R\,dR}{h}$,

$$\psi = \frac{\rho}{R}\sqrt{\frac{dS^2}{R^2} + \frac{ds^2}{r^2}}.$$

12. Soit une droite passant au point M dans le plan normal et tangente à la sphère osculatrice en ce point; on trouve sans peine, pour les cosinus L_1, M_1, N_1 qui la déterminent,

$$L_1 = \frac{\rho\alpha - h\lambda}{R},\quad M_1 = \frac{\rho 6 - h\mu}{R},\quad N_1 = \frac{\rho\gamma - h\nu}{R},$$

et l'angle infiniment petit ε de cette droite avec la droite analogue passant au point voisin est donné par la formule

$$\varepsilon^2 = \frac{dS^2}{R^2}\sin^2\varphi + \frac{ds^2}{\rho^2}\cos^2\varphi.$$

13. *Droite rectifiante.* — Lancret a nommé *plan rectifiant* d'une courbe en un point M celui qui contient l'*axe* et la tangente en ce point; son intersection avec le plan rectifiant infiniment voisin est la *droite rectifiante.* Cette droite a pour équation

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &(X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu = 0,\\ &(X - x)\,d\lambda + (Y - y)\,d\mu + (Z - z)\,d\nu = 0.\end{aligned}\right.$$

La deuxième est celle d'un plan passant par M et perpendiculaire au plan rectifiant de ce point; elle contient donc la normale principale. Il suit de là que l'intersection cherchée, située dans le plan rectifiant en M, fait avec l'*axe* en ce point un angle égal à celui du second plan avec le plan normal, et dont le cosinus a pour expression

$$a\frac{d\lambda}{\theta}+b\frac{d\mu}{\theta}+c\frac{d\nu}{\theta};$$

la valeur absolue de ce cosinus se réduit à $\frac{\omega}{\theta}$ au moyen des formules du n° **4**.

Si l'on désigne par H l'angle de la tangente avec la rectifiante, on trouve

$$(8)\qquad \sin H=\frac{\omega}{\theta},\quad \cos H\frac{u}{\theta},\quad \operatorname{tang} H=\frac{\omega}{u}=\frac{r}{\rho}.$$

La dernière équation donne une signification géométrique assez simple à la quantite r.

Des équations (7) on tire, pour les cosinus l, m, n qui déterminent la rectifiante,

$$l=\frac{\mu d\nu-\nu d\mu}{\theta},\quad m=\frac{\nu d\lambda-\lambda d\nu}{\theta},\quad n=\frac{\lambda d\mu-\mu d\lambda}{\theta},$$

valeurs qui peuvent s'écrire

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} l&=\frac{au+\alpha\omega}{\theta}=a\cos H+\alpha\sin H,\\ m&=\frac{bu+\beta\omega}{\theta}=b\cos H+\beta\sin H,\\ n&=\frac{cu+\gamma\omega}{\theta}=c\cos H+\gamma\sin H.\end{aligned}\right.$$

L'interprétation géométrique de ces relations est facile.

On déduit encore des formules (8) et de celles du n° **4**,

$$\frac{d\lambda}{\theta}=\alpha\cos H-a\sin H,$$

$$\frac{d\mu}{\theta}=\beta\cos H-b\sin H,$$

$$\frac{d\nu}{\theta}=\gamma\cos H-c\sin H.$$

14. *Angle de deux rectifiantes infiniment voisines.* — Soit v cet angle. En différentiant la première des équations (9), il vient

$$dl=(\alpha\cos H-a\sin H)\,dH+\sin H\,d\alpha+\cos H\,da.$$

Or

$$da=\omega\lambda,\quad d\alpha=-u\lambda;$$

donc

$$\sin H\, d\alpha + \cos H\, da = 0.$$

D'ailleurs

$$\frac{d\lambda}{\theta} = \alpha \cos H - a \sin H;$$

il résulte de là

$$dl = \frac{d\lambda}{\theta}\, dH,$$

et, de même,

$$dm = \frac{d\mu}{\theta}\, dH, \quad dn = \frac{d\nu}{\theta}\, dH,$$

et finalement

$$v = \sqrt{dl^2 + dm^2 + dn^2} = dH = \frac{u^2}{\theta^2}\, d\cdot\frac{\omega}{u}.$$

15. *Arête de rebroussement de la surface rectifiante.* — La *surface rectifiante* est le lieu des droites rectifiantes. Les coordonnées d'un point M_2 de son arête de rebroussement sont les valeurs de X, Y, Z qui satisfont aux trois équations suivantes :

$$(10)\quad \begin{cases} (X-x)\lambda + (Y-y)\mu + (Z-z)\nu = 0, \\ (X-x)\,d\lambda + (Y-y)\,d\mu + (Z-z)\,d\nu = 0, \\ (X-x)\,d^2\lambda + (Y-y)\,d^2\mu + (Z-z)\,d^2\nu = -\omega\, ds \end{cases}$$

Soit K la distance du point M_2 au point M ; les deux premières équations nous donnent

$$(11)\quad \frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n} = K.$$

Au moyen de ces relations, la dernière équation (10) devient

$$(l\,d^2\lambda + m\,d^2\mu + n\,d^2\nu)K = -\omega\, ds.$$

Or

$$l\,d\lambda + m\,d\mu + n\,d\nu = 0,$$

et, par suite,

$$l\,d^2\lambda + m\,d^2\mu + n\,d^2\nu = -(dl\,d\lambda + dm\,d\mu + dn\,d\nu) = -\theta v.$$

donc

$$K = \frac{\omega\, ds}{\theta v} = \frac{\sin H}{dH}\, ds.$$

La tangente et le plan osculateur au point M_2 ne sont autres que la *rectifiante* et le plan rectifiant du point M. C'est ce qu'on voit sans peine en différentiant par rapport à X, Y, Z, deux fois la première des équations (10), et une fois la seconde. Si dS est l'élément de la courbe des points M_2, on aura donc

$$\frac{dX}{dS} = l, \quad \frac{dY}{dS} = m, \quad \frac{dZ}{dS} = n.$$

16. *Élément de cette arête.* — Pour calculer dS, servons-nous des formules (11); la première nous donne

$$dX - dx = K dl + l dK,$$

ou, d'après ce qui précède,

$$l dS - dx = K dl + l dK;$$

de même,

$$m dS - dy = K dm + m dK,$$

$$n dS - dz = K dn + n dK.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par l, m, n et ajoutons les résultats, il vient

$$dS - ds(al + bm + cm) = dK,$$

ou bien

$$dS = dK + ds \cos H;$$

et comme

$$\frac{ds.\sin H}{dH} = K,$$

$$dS = \frac{K \cos H\, dH + \sin H\, dK}{\sin H} = \frac{d(K \sin H)}{\sin H}.$$

On déduirait aisément de là l'expression des deux rayons de courbure.