# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


J. BERTRAND

**Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 17 (1852), p. 393-436.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__393_0>

# MÉMOIRE

SUR

# L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA MÉCANIQUE;

PAR M. J. BERTRAND.

Peu de mois après la mort de Poisson, Jacobi écrivit à l'Académie des Sciences pour lui signaler la plus profonde découverte du géomètre qu'elle venait de perdre.

« Cette découverte, disait Jacobi, n'a, je crois, été bien comprise
» ni par Lagrange, ni par les nombreux géomètres qui l'ont citée, ni
» par son auteur lui-même. Le théorème dont je parle me semble le
» plus important de la Mécanique et de cette partie du calcul intégral
» qui s'attache à l'intégration d'un système d'équations différentielles
» ordinaires. Toutefois, on ne le trouve ni dans les Traités de calcul
» intégral, ni dans la *Mécanique analytique*. Comme ce théorème ne
» servait qu'à établir une autre proposition dont Lagrange avait
» donné une démonstration plus simple, celui-ci n'en parle, dans sa
» *Mécanique*, que comme d'une preuve d'une grande force analy-
» tique, sans trouver nécessaire de le faire entrer dans son ouvrage;
» et, depuis, tout le monde le regardant comme un théorème remar-
» quable par la difficulté de le prouver, et personne ne l'examinant
» en lui-même, ce théorème prodigieux et jusqu'ici sans exemple est
» resté à la fois découvert et caché. »

Le théorème auquel ces lignes se rapportent est démontré dans le premier Mémoire de Poisson sur la variation des constantes arbitraires; il consiste en ce que deux intégrales d'un problème de Mécanique étant données, on peut, sans intégrations nouvelles, former une expression dont la valeur soit constante, ce qui, en général, fournit une troisième intégrale. Cette troisième intégrale, combinée avec l'une des deux premières, pourra conduire à une quatrième, celle-ci à une cinquième, et ainsi de suite jusqu'à ce que le problème soit complétement résolu.

On comprend qu'il y a, dans cet énoncé, de quoi justifier l'enthousiasme de Jacobi. Il est peu de problèmes de Mécanique dont on ne connaisse deux intégrales et que l'on ne puisse, par conséquent, résoudre par cette méthode, si elle n'est jamais en défaut. Malheureusement, il existe, on le sait, des cas d'exception, et ces cas sont beaucoup plus nombreux, comme on le verra dans ce Mémoire, que ceux auxquels la méthode s'applique.

L'équation fournie par le théorème de Poisson peut conduire de deux manières différentes à une intégrale illusoire. Il peut arriver que l'équation se réduise à une identité telle que $0 = 0$, ou qu'elle donne une intégrale qui rentre dans celles dont on l'a déduite, et n'avance, par conséquent, en rien la solution du problème. Je fais voir que ces deux cas rentrent au fond l'un dans l'autre, et que, pour les étudier, il suffit de chercher les intégrales qui conduisent à des équations identiques. J'indique le moyen de chercher l'une de ces intégrales lorsque l'autre est connue, et je prouve qu'il en existe toujours. Je fais ensuite l'application de la méthode à plusieurs problèmes.

Je considère d'abord le mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe, et je me propose de trouver directement toutes les intégrales qui, combinées avec celle des aires, donnent un résultat illusoire. J'obtiens de cette manière la solution complète du problème. Toutes les intégrales qui résolvent cette question mettent en défaut la méthode signalée par Jacobi.

J'étudie ensuite le mouvement d'un point attiré vers deux centres fixes, et le mouvement dans un plan lorsque la fonction des forces est homogène de degré $-2$. Ces deux problèmes donnent le même résultat que le précédent. Après avoir trouvé une intégrale, on peut obtenir toutes les autres en cherchant celles qui mettent la méthode en défaut.

Cette similitude dans les résultats obtenus pour trois questions très-différentes n'est pas un effet du hasard. Je fais voir qu'il en est ainsi toutes les fois qu'il s'agit du mouvement d'un point dans un plan, et même dans tous les cas où les coordonnées des points du système s'expriment par deux variables indépendantes.

Passant ensuite à des cas plus composés, j'étudie le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement et qui sont en même temps attirés vers un centre fixe; en supposant d'abord que le mouvement s'effectue dans un plan, je prouve que l'on peut, comme dans les cas précédents, former toutes les intégrales en cherchant celles qui, combinées avec l'équation des aires, donnent à l'équation de Poisson une forme illusoire. Lorsque l'on ne fait plus aucune restriction, le principe des aires fournit trois intégrales; les intégrales qui, combinées avec celles-là, donnent trois résultats illusoires, sont au nombre de huit; et, pour avoir la solution complète, il suffirait de leur en adjoindre une neuvième qui, seule, ne met pas la méthode en défaut.

J'ai enfin appliqué la même méthode à l'étude du célèbre problème des trois corps, en cherchant s'il existe des intégrales qui, combinées avec celle des aires, donnent des résultats illusoires. Je trouve, comme dans le cas précédent, qu'il en existe huit distinctes, et que, pour compléter la solution du problème, il suffirait de leur en adjoindre une neuvième qui, seule, ne met pas la méthode en défaut.

On voit assez, par l'énumération qui précède, que la méthode d'intégration, basée sur le théorème de Poisson, n'a pas, à beaucoup près, l'importance qu'on avait cru pouvoir lui attribuer. Les cas d'exception sont nombreux, ils forment la solution complète de certains problèmes et embrassent, dans d'autres cas, onze intégrales sur douze. On comprendrait mal, cependant, le but que je me suis proposé si l'on concluait que, suivant moi, l'on doit regarder comme exceptionnels les cas dans lesquels le théorème de Poisson est utilement applicable. Cette assertion ne serait pas même exacte pour les problèmes que je résous complétement en cherchant les intégrales qui mettent en défaut la méthode signalée par Jacobi. Il existe, il est vrai, pour ces problèmes, un système complet d'intégrales qui donnent à l'équation de Poisson une forme illusoire; mais ces intégrales, combinées d'une manière convenable, pourraient en fournir d'autres auxquelles le théorème s'appliquerait utilement.

Je ferai remarquer qu'en cherchant les cas d'exception du théorème de Poisson, on obtient une méthode nouvelle d'intégration qui peut conduire à des résultats importants.

On n'a pas oublié que Jacobi, dans un Mémoire sur le problème des trois corps, ramène la solution de ce problème à l'intégration de six équations différentielles, l'une du second ordre et les cinq autres du premier. Je parviens, par la méthode nouvelle dont je parle, à réduire la question à l'intégration de six équations, toutes du premier ordre, c'est-à-dire que j'effectue une intégration de plus que ne l'avait fait Jacobi.

Il résulte aussi de mes recherches que les douze intégrales du problème des trois corps peuvent se classer de la manière suivante :

1° L'intégrale des forces vives; 2° les trois intégrales des aires; 3° cinq intégrales dont je donne l'expression contenant une fonction inconnue de sept variables; cette expression contient, en outre, l'équation des forces vives et une certaine combinaison de celle des aires; 4° une intégrale obtenue en égalant à une constante une fonction inconnue des sept mêmes variables; 5° une intégrale qui contient le temps; 6° une douzième intégrale qui n'appartient à aucune des catégories précédentes.

Je me borne, quant à présent, à indiquer ces résultats. Je les développerai dans un autre Mémoire; leur étude m'écarterait du but spécial que je me suis proposé dans celui-ci, c'est-à-dire de l'étude approfondie du théorème signalé par Jacobi à l'admiration des géomètres. Il est remarquable que ces résultats, dont le théorème de Poisson est l'occasion plutôt que le principe, forment, jusqu'à présent, la seule application utile d'une découverte qui semblait d'abord devoir s'appliquer à toutes les questions de la science et ne laisser subsister les difficultés que comme de rares exceptions.

## I.

Si l'on désigne par $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des variables indépendantes, en fonction desquelles soient données les coordonnées des points d'un système, et par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ leurs dérivées par rapport au temps, par T l'expression de la demi-somme des forces vives, et enfin par U la *fonction des forces* [*]; les équations différentielles du mouvement sont, d'après Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_1}-\frac{dT}{dq_1}=\frac{dU}{dq_1},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_2}-\frac{dT}{dq_2}=\frac{dU}{dq_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_n}-\frac{dT}{dq_n}=\frac{dU}{dq_n}.$$

Si l'on pose, avec Poisson,

$$\frac{dT}{dq'_1}=p_1,\quad \frac{dT}{dq'_2}=p_2,\ldots,\quad \frac{dT}{dq'_n}=p_n,\quad T-U=H,$$

et que l'on substitue les variables $p_1, p_2,\ldots, p_n$ à $q'_1, q'_2,\ldots, q'_n$, les équations précédentes prennent la forme très-simple

$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{dH}{dq_1},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{dH}{dq_2},\ldots,\quad \frac{dp_n}{dt}=-\frac{dH}{dq_n},$$
$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{dH}{dp_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{dH}{dp_2},\ldots,\quad \frac{dq_n}{dt}=\frac{dH}{dp_n}.$$

Cela posé, le théorème de Poisson peut s'énoncer comme il suit.

Si

$$\alpha=\varphi(q_1, q_2, q_3,\ldots, q_n,\ p_1, p_2,\ldots, p_n),$$
$$\beta=\psi(q_1, q_2,\ldots, q_n,\ p_1, p_2,\ldots, p_n)$$

sont deux intégrales d'un même problème, on aura toujours

$$\frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1}-\frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1}+\frac{d\alpha}{dq_2}\frac{d\beta}{dp_2}-\frac{d\alpha}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2}+\ldots+\frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\beta}{dp_n}-\frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\beta}{dq_n}$$
$$=(\alpha,\beta)=\text{constante}.$$

L'expression $(\alpha, \beta)$ devant rester constante pendant toute la durée du mouvement, si l'on égale cette expression à une constante arbitraire, on aura, en général, une intégrale, mais il pourra arriver que l'on obtienne ainsi une identité. Il pourra arriver aussi que $(\alpha, \beta)$ soit une fonction de $\alpha$ et de $\beta$, de telle sorte que la nouvelle intégrale soit une

[*] Le théorème de Poisson suppose essentiellement l'existence de cette fonction, et il n'est question, dans ce Mémoire, que des problèmes de Mécanique auxquels s'applique le principe des forces vives. (J. B.)

combinaison des deux autres et n'avance en rien la solution du problème. Il est important d'examiner ces deux cas et de reconnaître s'ils doivent fréquemment se présenter. Nous démontrerons d'abord un théorème qui permet de les rattacher l'un à l'autre.

*Si*

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \psi$$

*sont deux intégrales d'un même problème, telles que* $(\alpha, \beta)$ *soit une fonction de* $\alpha$ *et de* $\beta$, *il existe toujours une fonction de* $\alpha$ *et de* $\beta$ *qui, égalée à une constante* $\gamma$, *fournira une intégrale telle, que* $(\alpha, \gamma)$ *soit identiquement l'unité.*

On a, en effet, par définition,

$$(\alpha, \gamma) = \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\gamma}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\gamma}{dq_1} + \frac{d\alpha}{dq_2}\frac{d\gamma}{dp_2} - \frac{d\alpha}{dp_2}\frac{d\gamma}{dq_2} + \ldots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\gamma}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\gamma}{dq_n};$$

mais $\gamma$ étant fonction de $\alpha$ et de $\beta$, on a identiquement

$$\frac{d\gamma}{dp_1} = \frac{d\gamma}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dp_1} + \frac{d\gamma}{d\beta}\frac{d\beta}{dp_1}, \quad \frac{d\gamma}{dp_2} = \frac{d\gamma}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dp_2} + \frac{d\gamma}{d\beta}\frac{d\beta}{dp_2}, \ldots,$$

et, en substituant dans l'expression de $(\alpha, \gamma)$, il vient, après des réductions évidentes,

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta)\frac{d\gamma}{d\beta}.$$

Si donc $(\alpha, \beta)$ est, comme on l'a supposé, une fonction de $\alpha$ et de $\beta$, on pourra toujours déterminer $\gamma$ par la condition

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{(\alpha, \beta)},$$

et faire en sorte, par conséquent, que $(\alpha, \gamma)$ soit égal à l'unité.

Le résultat précédent peut être généralisé.

*Si*

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \psi$$

*sont deux intégrales d'un même problème, supposons qu'en les combinant par la méthode de Poisson on trouve une troisième intégrale*

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$

*puis une quatrième*

$$(\alpha, \gamma) = \delta,$$

*puis une cinquième*

$$(\alpha, \delta) = \varepsilon,$$

*et que l'on arrive enfin à une intégrale*

$$(\alpha, \eta) = \zeta,$$

*qui puisse résulter de la combinaison des précédentes, de telle sorte que*

$$\zeta = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots, \eta);$$

*il existe toujours une certaine intégrale de la forme*

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta) = \xi,$$

*qui, combinée avec $\alpha$, donne identiquement*

$$(\alpha, \xi) = 1.$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer qu'en remplaçant dans l'expression de $(\alpha, \xi)$ les dérivées de $\xi$ par leur expression obtenue en considérant $\xi$ comme une fonction composée, on trouve identiquement

$$\begin{aligned}(\alpha, \xi) &= (\alpha, \beta)\frac{d\xi}{d\beta} + (\alpha, \gamma)\frac{d\xi}{d\gamma} + (\alpha, \delta)\frac{d\xi}{d\delta} + \ldots + (\alpha, \eta)\frac{d\xi}{d\eta} \\ &= \gamma\frac{d\xi}{d\beta} + \delta\frac{d\xi}{d\gamma} + \varepsilon\frac{d\xi}{d\delta} + \ldots + (\alpha, \eta)\frac{d\xi}{d\eta}.\end{aligned}$$

Si donc on écrit

$$(\alpha, \xi) = 1 \quad \text{ou} \quad (\alpha, \xi) = 0,$$

on aura, pour déterminer $\xi$, une équation linéaire aux différentielles partielles dont les intégrales satisferont à la condition demandée.

On peut remarquer que si l'équation en $\xi$ renferme $k$ variables indépendantes, son intégrale générale sera une fonction arbitraire de $k - 1$ fonctions distinctes, et contiendra, par conséquent, $k - 1$ intégrales distinctes satisfaisant à la condition énoncée.

D'après ce qui précède, on peut démontrer qu'une intégrale quelconque étant donnée, il en existe d'autres qui, combinées avec elle, conduisent à des équations identiques.

Soit

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

une intégrale d'un problème de Mécanique.

Prenons arbitrairement une seconde intégrale du même problème,

$$\beta = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \; p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

et combinons ces deux intégrales pour former l'expression $(\alpha, \beta)$. Si cette expression est identiquement constante, la proposition est démontrée; si elle ne l'est pas,

$$(\alpha, \beta) = \gamma$$

sera une nouvelle intégrale. Formons l'expression $(\alpha, \gamma)$. Si elle est identiquement constante, la proposition est démontrée; si elle ne l'est pas,

$$(\alpha, \gamma) = \delta$$

sera une quatrième intégrale. En continuant ainsi indéfiniment, il arrivera de deux choses l'une : ou bien l'une des intégrales successivement obtenues se réduira à une identité, et alors la précédente satisfait à la condition énoncée; ou bien on trouvera une intégrale qui peut résulter de la combinaison des précédentes, car les intégrales distinctes sont en nombre essentiellement limité. On sait alors, d'après ce qui précède, qu'en formant une fonction convenable des intégrales successivement obtenues, on aura une intégrale qui, combinée avec $\alpha$, donnera un résultat identique, et l'on a vu même que, par ce procédé, on pouvait, dans la plupart des cas, en obtenir plusieurs, distinctes les unes des autres.

On peut démontrer, du reste, que l'intégrale des forces vives satisfait toujours à la condition dont nous venons de parler, et que, quelle que soit la seconde intégrale avec laquelle on la combine, le résultat est une identité.

Soit, en effet,

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \quad p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

une intégrale d'un problème de Mécanique. Les équations différentielles du mouvement étant

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_2}, \ldots, \quad \frac{dq_n}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_n},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_2}, \ldots, \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_n},$$

l'intégrale des forces vives est

$$\beta = \mathrm{H}.$$

Or on a, en exprimant que la dérivée de $\alpha$ est nulle lorsqu'on a égard aux équations différentielles du mouvement,

$$\frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\mathrm{H}}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\mathrm{H}}{dq_1} + \ldots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\mathrm{H}}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\mathrm{H}}{dq_n} = 0,$$

et cette équation exprime précisément la relation

$$(\alpha, \beta) = 0.$$

Si l'intégrale $\alpha$ contenait le temps et qu'elle fût de la forme

$$\alpha = t + \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

on verrait de même qu'en représentant par $\beta = \mathrm{H}$ l'intégrale des forces vives, on aurait

$$(\alpha, \beta) = -1.$$

On comprend que la méthode indiquée plus haut, fournissant un grand nombre de manières de former des intégrales qui, combinées avec une intégrale donnée, conduisent à un résultat identique, l'intégrale des forces vives ne sera pas, en général, la seule qui remplisse cette condition. Nous pouvons d'ailleurs démontrer que cette circonstance ne se présentera jamais, et que quelle que soit l'intégrale donnée, il en existe toujours une seconde, différente de celle des forces vives et qui, combinée avec elle, donne un résultat illusoire.

Soient, en effet,

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

une intégrale donnée, et

$$\beta = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

une seconde intégrale quelconque distincte de celle des forces vives. S'il arrive qu'en combinant $\alpha$ avec $\beta$, puis avec toutes celles que l'on obtient successivement, la $k^{ième}$ opération donne un résultat qui rentre dans les précédents, nous avons vu que la fonction qui, combinée avec $\alpha$, donne un résultat illusoire est fournie par une équation différentielle partielle à $k$ variables indépendantes, et elle est, par conséquent, susceptible de $k-1$ formes distinctes. Si l'on avait $k=1$, cette intégrale serait, comme on l'a vu, une combinaison de $\alpha$ et de $\beta$, distincte évidemment de l'équation des forces vives. Si $k=2$, on aura

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$
$$(\alpha, \gamma) = \psi(\alpha, \beta, \gamma);$$

et si, en déduisant de là, par la méthode indiquée plus haut, une intégrale qui, combinée avec $\alpha$, donne un résultat illusoire, on trouve précisément l'équation des forces vives

$$\mathrm{H} = \delta,$$

il faut en conclure que l'on a

$$\mathrm{H} = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma),$$

et, par suite,

$$\gamma = f(\alpha, \beta, \mathrm{H}).$$

Considérons alors une fonction $\pi(\alpha, \beta, \mathrm{H})$ qui, évidemment, sera une intégrale; on aura, comme on le vérifie aisément,

$$(\alpha, \pi) = (\alpha, \beta)\frac{d\pi}{d\beta} = f(\alpha, \beta, \mathrm{H})\frac{d\pi}{d\beta},$$

et si l'on détermine $\pi$ par la condition

$$f(\alpha, \beta, \mathrm{H})\frac{d\pi}{d\beta} = 1,$$

l'intégrale $\pi$ satisfera à la condition proposée, et, de plus, sera distincte de celle des forces vives, puisque celle-ci donne

$$(\alpha, \mathrm{H}) = 0.$$

S'il arrive, en second lieu, qu'en combinant $\alpha$ avec l'intégrale $\beta$, puis avec celles que l'on obtient successivement, on arrive à un résultat identique de la forme

$$(\alpha, \varepsilon) = 1;$$

l'intégrale $\varepsilon$ sera évidemment distincte de celle des forces vives, et la proposition se trouve encore démontrée.

S'il arrive enfin, qu'en procédant comme nous l'avons dit, on soit conduit à un résultat identique de la forme

$$(\alpha, \varepsilon) = 0,$$

et que $\varepsilon$ soit précisément l'intégrale des forces vives ou une fonction de cette intégrale $\psi(\mathrm{H})$, on aura, en désignant par $\delta$ l'intégrale qui, dans la série des opérations, précède immédiatement $\varepsilon$,

$$(\alpha, \delta) = \varepsilon = \psi(\mathrm{H}).$$

Or il est facile de voir que si, au lieu de l'intégrale $\beta$ que nous avons prise pour point de départ, on avait pris $\frac{\beta}{\psi(\mathrm{H})}$, toutes les intégrales successivement obtenues auraient été divisées par $\psi(\mathrm{H})$, et l'on aurait eu

$$\left[\alpha, \frac{\delta}{\psi(\mathrm{H})}\right] = 1,$$

en sorte que $\frac{\delta}{\psi(\mathrm{H})}$ est une intégrale distincte de celle des forces vives, et qui, combinée avec $\alpha$, donne une équation identique.

## II.

Lorsque l'on connaîtra une intégrale d'un problème de Mécanique

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

il résulte du paragraphe précédent qu'il en existe d'autres qui satisfont identiquement à l'équation

$$\frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} + \frac{d\alpha}{dq_2}\frac{d\beta}{dp_2} - \frac{d\alpha}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2} + \ldots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\beta}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\beta}{dq_n} = 0,$$

ou à celle-ci,

$$\frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} + \frac{d\alpha}{dq_2}\frac{d\beta}{dp_2} - \frac{d\alpha}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2} + \ldots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\beta}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\beta}{dq_n} = 1.$$

Ces équations différentielles partielles auxquelles doivent satisfaire certaines intégrales du problème peuvent être, dans certains cas, un moyen précieux d'intégration et conduire quelquefois à classer les intégrales d'un problème, de manière à faciliter leur détermination ultérieure.

## III.

Pour premier exemple, nous étudierons le mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force fonction de la distance.

Les équations différentielles d'un tel mouvement sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', & \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{x}{r}\varphi(r), \\ \dfrac{dy}{dt} = y', & \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{y}{r}\varphi(r). \end{cases}$$

Le principe des aires fournit, comme on sait, une intégrale

$$(2)\qquad xy' - yx' = \alpha.$$

Soit

$$(3)\qquad \psi(x, y, x', y', t) = \beta$$

une seconde intégrale. En écrivant que, combinée avec la première, elle donne un résultat illusoire, nous obtiendrons l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$(4)\qquad -\frac{d\beta}{dx}y - \frac{d\beta}{dx'}y' + \frac{d\beta}{dy}x + \frac{d\beta}{dy'}x' = 0.$$

$$(5)\qquad -\frac{d\beta}{dx}y - \frac{d\beta}{dx'}y' + \frac{d\beta}{dy}x + \frac{d\beta}{dy'}x' = 1.$$

Occupons-nous d'abord de la première. Pour l'intégrer, il faut poser, conformément à la méthode générale,

$$-\frac{dx}{y} = -\frac{dx'}{y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = \frac{d\beta}{0}:$$

l'une des intégrales est

$$\beta = C_1,$$

et l'on s'assure facilement que les trois autres sont

$$x^2 + y^2 = C_2, \quad x'^2 + y'^2 = C_3, \quad xx' + yy' = C_4;$$

la valeur la plus générale de $\beta$ qui satisfasse à l'équation (4) est, par conséquent, l'une des suivantes :

$$(\text{A})\qquad \begin{cases} \beta = \mathrm{F}(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy'), \\ \beta = t + \mathrm{F}(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy'); \end{cases}$$

on devra adopter l'une ou l'autre de ces deux formes suivant que $t$ devra ou non figurer dans l'intégrale que l'on cherche.

Pour intégrer l'équation (5), il faut poser

$$-\frac{dx}{y} = -\frac{dx'}{y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{d\beta} = y,\quad \frac{dy}{d\beta} = -x,\quad \frac{dx'}{d\beta} = -y',\quad \frac{dy'}{d\beta} = x',$$

dont les intégrales sont

$$x = \mathrm{M}\cos(\beta+\alpha),\quad y = \mathrm{M}\sin(\beta+\alpha),$$
$$x' = \mathrm{M}'\cos(\beta+\alpha'),\quad y' = \mathrm{M}'\sin(\beta+\alpha'),$$

$\mathrm{M}$, $\mathrm{M}'$, $\alpha$, $\alpha'$ étant des constantes arbitraires. De ces équations on déduit sans peine

$$x^2+y^2 = \mathrm{C}_1,\qquad x'^2+y'^2 = \mathrm{C}_2,$$
$$xx'+yy' = \mathrm{C}_3,\quad \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} - \beta = \mathrm{C}_4;$$

d'où l'on conclut, pour intégrale complète de l'équation (5),

$$\beta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \mathrm{F}(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy',\ t);$$

et les intégrales du problème qui sont comprises dans cette forme pourront s'écrire, suivant que $t$ y figure ou n'y figure pas,

$$(\text{B})\qquad \begin{cases} \beta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \mathrm{F}(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy'), \\ \beta = t + \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \mathrm{F}(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy'). \end{cases}$$

Il nous reste à chercher quelles sont les intégrales du problème comprises dans les formes (A) ou (B).

Occupons-nous d'abord de la forme (A)

$$\beta = \mathrm{F}(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy').$$

Pour exprimer que cette équation est une intégrale, écrivons que la dérivée de $\beta$ est nulle lorsqu'on a égard aux équations différentielles du mouvement.

On obtient ainsi, en posant

$$x^2+y^2=u,\quad x'^2+y'^2=v,\quad xx'+yy'=w,$$

$$2\frac{d\beta}{du}w+2\frac{d\beta}{dv}w\varphi(u)+\frac{d\beta}{dw}[v+u\varphi(u)]=0.$$

Pour intégrer cette équation, il faut considérer les équations différentielles

$$\frac{du}{2w}=\frac{dv}{2w\varphi(u)}=\frac{dw}{v+u\varphi(u)}=\frac{d\beta}{0};$$

les intégrales sont

$$\beta=\mathrm{C},$$
$$v-\int\varphi(u)\,du=\mathrm{C}_1,$$
$$w^2-uv=\mathrm{C}_2;$$

par suite, la valeur de $\beta$ est de la forme

$$\beta=\mathrm{F}\left[v-\int\varphi(u)\,du,\ w^2-uv\right],$$

ou, en remplaçant $u$, $v$, $w$ par leurs valeurs,

$$\text{(C)}\qquad \beta=\mathrm{F}\left[x'^2+y'^2-\int\varphi(u)\,du,\ (xy'-yx')^2\right],$$

c'est-à-dire que l'intégrale $\beta$ est une combinaison de l'équation des forces vives avec celle des aires.

Si nous considérons maintenant la seconde des formes (A),

$$\beta=t+\mathrm{F}(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy');$$

en adoptant la même notation que dans le cas précédent, nous exprimerons qu'elle est une intégrale, à l'aide de l'équation suivante :

$$1+2\frac{d\beta}{du}w+2\frac{d\beta}{dv}w\varphi(u)+\frac{d\beta}{dw}[v+u\varphi(u)]=0.$$

Pour intégrer cette équation, il faut poser

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{2w\varphi(u)} = \frac{dw}{v + u\varphi(u)} = -\, d\beta;$$

nous obtiendrons d'abord les deux intégrales

$$v - \int \varphi(u)\, du = C_1, \quad w^2 - uv = C_2,$$

qui sont les mêmes que dans le cas précédent. En remettant la valeur de $w$ déduite de ces équations dans la relation

$$d\beta = -\frac{du}{2w},$$

il vient

$$d\beta = \frac{du}{\sqrt{C_2 + u[C_1 + \int \varphi(u)\, du]}},$$

et l'on conclut que la troisième intégrale est

$$\beta - \int \frac{du}{\sqrt{C_2 + u[C_1 + \int \varphi(u)\, du]}} = C_3,$$

et, par conséquent, la valeur générale de $\beta$ est

$$(7) \quad \beta = t + \int \frac{du}{\sqrt{C_2 + u[C_1 + \int \varphi(u)\, du]}} + F\left[v - \int \varphi(u)\, du,\ uv - w^2\right].$$

Si nous supposons $F = 0$, cette équation devient celle à l'aide de laquelle on détermine le temps en fonction du rayon vecteur.

Cherchons enfin si le problème admet des intégrales de la forme

$$(8) \qquad \beta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + F(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy');$$

en faisant toujours usage de la même notation, l'équation qui exprime que cette relation est une intégrale est

$$0 = \frac{\sqrt{uv - w^2}}{u} + 2\frac{dF}{du}w + 2\frac{dF}{dv}w\varphi(u) + \frac{dF}{dw}[v + u\varphi(u)].$$

Pour en déduire F, il faut intégrer d'abord les équations

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{2w\varphi(u)} = \frac{dw}{v + u\varphi(u)} = -\frac{u\, dF}{\sqrt{uv - w^2}}.$$

Ces équations admettent, comme dans les cas précédents, les intégrales

$$v - \int \varphi(u)\,du = C_1, \quad w^2 - uv = C_2;$$

puis, en remettant pour $v$ et $w$ leurs valeurs dans l'équation

$$\frac{du}{2w} = -\frac{u\,dF}{\sqrt{uv - w^2}},$$

il vient

$$dF = \frac{-du\sqrt{C_2}}{2u\sqrt{C_2 + u\left[\int \varphi(u)\,du + C_1\right]}};$$

donc la forme de la fonction F est

$$F = -\int \frac{\sqrt{C_2}\,du}{2u\sqrt{C_2 + u\left[\int \varphi(u)\,du + C_1\right]}} + \psi\left[v - \int \varphi(u)\,du,\ uv - w^2\right].$$

Si l'on suppose $\psi = 0$, cette valeur de F fournit l'intégrale

$$(9) \qquad \beta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} - \int \frac{\sqrt{C_2}\,du}{2u\sqrt{C_2 + u\left[\int \varphi(u)\,du + C_1\right]}}.$$

C'est précisément l'équation de la trajectoire du point mobile.

Les intégrales (8) et (9), jointes à celle des aires et à celle des forces vives, donnent la solution complète du problème.

## IV.

Nous choisirons, pour second exemple, le mouvement d'un point dans un plan, en supposant la fonction des forces de la forme

$$U = \frac{1}{x^2 + y^2}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Les équations différentielles de ce mouvement sont

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \\ &\frac{dx'}{dt} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{(x^2+y^2)}\,\frac{y}{x^2}\,\varphi'\left(\frac{y}{x}\right), \\ &\frac{dy'}{dt} = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{(x^2+y^2)}\,\frac{1}{x}\,\varphi'\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}\right.$$

On vérifie facilement que l'une des intégrales de ce système est

$$(2)\qquad (xy'-yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha.$$

Soit

$$(3)\qquad \mathrm{F}(x', y', x, y, t) = \beta$$

une seconde intégrale. En écrivant que la combinaison $(\alpha, \beta)$ est identiquement constante, on obtient l'une ou l'autre des équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &-2\frac{d\beta}{dx}(xy'-yx')y - \frac{d\beta}{dx'}\left[2(xy'-yx')y' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}\right] \\ &+2\frac{d\beta}{dy}(xy'-yx')x + \frac{d\beta}{dy'}\left[2(xy'-yx')x' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &-2\frac{d\beta}{dx}(xy'-yx')y - \frac{d\beta}{dx'}\left[2(xy'-yx')y' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}\right] \\ &+2\frac{d\beta}{dy}(xy'-yx')x + \frac{d\beta}{dy'}\left[2(xy'-yx')x' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}\right] = 1. \end{aligned}\right.$$

Nous allons successivement intégrer ces deux équations.

Pour intégrer l'équation (4), il faut considérer les équations différentielles

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\beta}{0} = -\frac{dx}{2[y(xy'-yx')]} = -\frac{dx'}{2(xy'-yx')y' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}} \\ &= \frac{dy}{2x(xy'-yx')} = \frac{dy'}{2(xy'-yx')x' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}}; \end{aligned}\right.$$

une première intégrale est évidemment $\beta = C_1$. Pour obtenir les autres, désignons par $dh$ la valeur commune des diverses fractions dont l'équation (6) exprime l'égalité, nous aurons

$$(7)\qquad \frac{dx}{dh} = -2y(xy'-yx'),$$

$$(8)\qquad \frac{dy}{dh} = 2x(xy'-yx'),$$

$$(9)\qquad \frac{dx'}{dh} = -2(xy'-yx')y' - 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2},$$

$$(10)\qquad \frac{dy'}{dh} = 2(xy'-yx')x' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

En multipliant l'équation (7) par $x$, l'équation (8) par $y$, et ajoutant, on trouve

$$(11)\qquad x\frac{dx}{dh}+y\frac{dy}{dh}=0,$$

donc

$$(12)\qquad x^2+y^2=C_2.$$

C'est une seconde intégrale du système proposé.

Si nous multiplions l'équation (9) par $x'$ et l'équation (10) par $y'$, nous obtiendrons, en les ajoutant ensuite,

$$(13)\qquad x'\frac{dx'}{dh}+y'\frac{dy'}{dh}=2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xy'-yx'}{x^2};$$

mais on déduit facilement des équations (7) et (8),

$$(14)\qquad xy'-yx'=\left(x\frac{dy}{dh}-y\frac{dx}{dh}\right)\frac{1}{2(x^2+y^2)},$$

donc

$$(15)\qquad x'\frac{dx'}{dh}+y'\frac{dy'}{dh}=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(x\frac{dy}{dh}-y\frac{dx}{dh}\right)\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2};$$

et, en intégrant les deux membres après avoir remplacé $x^2+y^2$ par sa valeur $C_2$,

$$(16)\qquad \frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-\frac{1}{C_2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=C_3.$$

C'est une troisième intégrale.

Multiplions enfin l'équation (7) par $y'$, l'équation (8) par $-x'$, l'équation (9) par $-y$, l'équation (10) par $x$, et ajoutons les résultats, nous obtiendrons

$$(17)\qquad \frac{d}{dh}(xy'-yx')=-\frac{2(y^2+x^2)}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Multipliant les deux membres de cette équation par $xy'-yx'$, il viendra, en ayant égard à l'équation (14),

$$(18)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dh}(xy'-yx')^2=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\frac{dy}{dh}-y\frac{dx}{dh}}{x^2},$$

et, par suite, en intégrant,

$$(19) \qquad (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_4.$$

C'est la quatrième intégrale du système d'équations simultanées. La valeur de $\beta$ est, par conséquent, l'une des suivantes, selon que $t$ y figure ou non,

$$(A) \left\{ \begin{aligned} \beta &= F\left[x^2+y^2,\ x'^2+y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),\ (xy'-yx')^2 - 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right], \\ \beta &= t + F\left[x^2+y^2,\ x'^2+y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),\ (xy'-yx')^2 - 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Considérons actuellement la seconde équation différentielle partielle, c'est-à-dire l'équation (5). Pour l'intégrer, il faut poser

$$(20) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{2(xy'-yx')y} &= \frac{dx'}{2(xy'-yx') + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}} = \frac{dy}{2(xy'-yx')x} \\ &= \frac{dx'}{2(xy'-yx') + \frac{2}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)} = d\beta. \end{aligned} \right.$$

Ces équations ne diffèrent des équations (7), (8), (9), (10), traitées plus haut, que par le changement de $h$ en $\beta$; elles admettent donc les mêmes intégrales

$$x^2 + y^2 = C_1,$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_2,$$

$$(xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_3.$$

Pour obtenir une quatrième intégrale, je pose

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{x\frac{dy}{d\beta} - y\frac{dx}{d\beta}}{x^2+y^2},$$

et, par suite, en vertu des équations différentielles proposées,

$$\frac{d\theta}{d\beta} = 2(xy' - yx') = 2\sqrt{C_3 + 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)};$$

donc

$$d\beta = \frac{d\theta}{2\sqrt{C_3 + 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}},$$

équation intégrable, puisque $\frac{y}{x}$ est égal à tang $\theta$. La quatrième intégrale des équations (20) est donc

$$(21)\qquad \beta - \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C_3 + 2\varphi(\operatorname{tang}\theta)}} = C_4,$$

en sorte que l'intégrale la plus générale du problème qui satisfasse à l'équation différentielle partielle (6) est comprise dans l'une des formes

$$(B)\quad \left\{ \begin{aligned} \beta = {} & \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C_3 + 2\varphi(\operatorname{tang}\theta)}} \\ & + F\left[x^2 + y^2,\ (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right], \\ \beta = {} & t + \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C_3 + 2\varphi(\operatorname{tang}\theta)}} \\ & + F\left[x^2 + y^2,\ (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Il nous reste à chercher si le problème admet des intégrales comprises dans les formes (A) ou (B). Si nous considérons d'abord la première des formes (A),

$$\beta = F\left[x^2 + y^2,\ (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

nous verrons que la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation soit une intégrale est que $x^2 + y^2$ ne figure pas dans la fonction F. On s'en convaincra en remarquant qu'en vertu des équations différentielles du mouvement,

$$(xy'-yx')^2-2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\quad x'^2+y'^2-\frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

sont l'un et l'autre constants. Si donc, en outre, $\beta$ était constant, il faudrait que $x^2+y^2$ le fût lui-même, ce qui, évidemment, n'a pas lieu. La fonction F ne doit donc pas renfermer $x^2+y^2$, et la seule intégrale contenue dans la première forme A est, par conséquent, une combinaison de l'intégrale déjà connue $\alpha$ avec celle des forces vives.

Si nous considérons actuellement la seconde des formes (A),

$$\beta=t+\mathrm{F}\left[x^2+y^2,\ (xy'-yx')^2-2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ x'^2+y'^2-\frac{2}{x^2-y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

en écrivant que la dérivée de $\beta$ est nulle et posant

$$x^2+y^2=u,$$
$$(xy'-yx')^2-2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=w,$$
$$x'^2+y'^2-\frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=v,$$

on trouve

$$0=1+2\frac{d\mathrm{F}}{du}(xx'+yy').$$

Or, on a

$$xx'+yy'=\sqrt{uv-w},$$

en sorte que l'équation de condition devient

$$1+2\frac{d\mathrm{F}}{du}\sqrt{uv-w}=0.$$

On en déduit

$$\mathrm{F}=-\frac{1}{v}\sqrt{uv-w}+\psi(v,w)=-\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2-\frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}+\psi(v,w),$$

et l'on en conclut que l'intégrale comprise dans la seconde des formes (A) est

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}\beta=t&-\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2-\frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}\\&+\psi\left[(xy'-yx')^2-2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ x'^2+y'^2-\frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Cherchons enfin si la première des formes (B) contient des intégrales. Cette forme est

$$\beta = \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C_3 + 2\varphi(\tang\theta)}}$$
$$+ F\left[x^2 + y^2,\ (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

où $C_3$ désigne l'expression $(xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, que l'on doit regarder comme constante dans l'intégration.

Si l'on forme la dérivée de $\beta$ et que l'on y remplace $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$ par leurs valeurs déduites des équations différentielles du mouvement, puis $\frac{d\theta}{dt}$ par $\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}$, il vient

$$(23)\qquad \frac{xy' - yx'}{2(x^2+y^2)\sqrt{C_3 + 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}} + 2\frac{dF}{du}(xx' + yy') = 0,$$

$u$ désignant, comme précédemment, la somme $x^2 + y^2$. Si dans l'équation (23) nous remplaçons $x^2 + y^2$ par $u$, $C_3$ par $(xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, et $xx' + yy'$ par sa valeur $\sqrt{uv - w}$, trouvée précédemment, elle devient

$$\frac{1}{2u} + 2\frac{dF}{du}\sqrt{uv - w} = 0;$$

on en déduit

$$F = -\frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{uv - w} - \sqrt{w}}{\sqrt{uv - w} + \sqrt{w}} + \psi(v, w),$$

ce qui nous fait connaître la quatrième intégrale

$$(24)\qquad \beta = \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C_3 - 2\varphi(\tang\theta)}} - \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{uv - w} - \sqrt{w}}{\sqrt{uv - w} + \sqrt{w}} + \psi(v, w).$$

Cette quatrième intégrale, jointe à celles que nous avions déjà, complète la solution du problème.

## V.

J'appliquerai la même méthode à une question qui a beaucoup occupé les géomètres, le mouvement d'un point attiré vers deux centres fixes par des forces inversement proportionnelles au carré de la distance.

En prenant pour axe des $x$ la droite qui joint les deux points fixes, on peut regarder le mobile comme restant toujours dans un même plan passant par cet axe, pourvu que l'on ajoute aux forces qui le sollicitent une force fictive parallèle à l'axe des $y$ et représentée par $\frac{\alpha^2}{y^3}$, $\alpha$ étant une constante. Les équations différentielles du mouvement sont alors

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', & \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{m(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ \dfrac{dy}{dt} = y', & \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{my}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'y}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\alpha^2}{y^3}. \end{cases}$$

On déduit de ces équations, à l'aide d'une combinaison due à Euler,

$$(2)\quad \begin{cases} (xy'-yx')^2 - \dfrac{2ma(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2m'a(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \qquad + \dfrac{\alpha^2 x^2}{y^2} - a^2 y'^2 - \dfrac{\alpha^2 a^2}{y^2} = \beta, \end{cases}$$

$\beta$ étant une constante arbitraire. C'est une première intégrale du problème. Nous allons en chercher d'autres qui, combinées avec celle-là, rendent l'équation de Poisson identique.

Soit

$$(3)\qquad \gamma = \mathrm{F}(t,\ x,\ y,\ x',\ y')$$

une telle intégrale. $\gamma$ doit satisfaire à l'équation différentielle partielle

$$(4)\quad \begin{cases} -2\dfrac{d\gamma}{dx}(xy'-yx')y \\ -\dfrac{d\gamma}{dx'}\left\{2(xy'-yx')y' - \dfrac{2may^2}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2m'ay^2}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2\alpha^2 x}{y^3}\right\} \\ +\dfrac{d\gamma}{dy}[2(xy'-yx')x - 2a^2y'] \\ +\dfrac{d\gamma}{dy'}\left\{2(xy'-yx')x' - \dfrac{2may(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2m'ay(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2\alpha^2 x^2}{y^3} - \dfrac{2\alpha^2 a^2}{y^3}\right\} = 0, \end{cases}$$

ou à la même équation dans laquelle le second membre serait remplacé par l'unité.

Pour intégrer l'équation (4), il faut traiter d'abord le système des équations simultanées,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d\gamma}{0} = -\frac{dx}{2y(xy'-yx')} \\ & = \frac{-dx'}{2(xy'-yx')y' - \frac{2may^2}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2m'ay^2}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\alpha^2 x}{y^2}} = \frac{dy}{2(xy'-yx')x - 2a^2 y'} \\ & = \frac{dy'}{2(xy'-yx')x' - \frac{2may(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2m'ay(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2a^2x^2}{y^3} - \frac{2\alpha^2 a^2}{y^3}}. \end{aligned}\right.$$

Nous connaissons, à priori, trois intégrales de ce système, car nous connaissons deux formes de la fonction $\gamma$ qui satisfont à la condition demandée, savoir le premier membre de l'équation d'Euler, et le premier membre de l'intégrale des forces vives. Les équations (5) ont donc pour intégrales :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \beta = (xy'-yx')^2 & - \frac{2ma(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{2m'a(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{\alpha^2 x^2}{y^2} - a^2 y'^2 - \frac{\alpha^2 a^2}{y^2}, \end{aligned}\right.$$

$$(7)\qquad h = \frac{1}{2}(x'^2+y'^2) - \frac{m}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{m'}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha^2}{2y^2},$$

$$(8)\qquad \gamma = c.$$

Pour en trouver une quatrième, remarquons que le multiplicateur du système des équations (5) est l'unité. Il est facile de le constater en formant la somme des dérivées des dénominateurs de ses quatre membres, prises, respectivement, par rapport aux variables dont la différentielle forme le numérateur; on trouvera que cette somme est nulle, et c'est précisément la condition pour que le multiplicateur soit l'unité. D'après cela, si l'on résolvait les équations (6) et (7) par rapport à $x'$ et à $y'$, et qu'on remplaçât ces deux lettres par leur valeur dans l'expression

$$\frac{[2(xy'-yx')x-2a^2y']\,dx+2y(xy'-yx')\,dy}{\frac{d\beta}{dx'}\frac{dh}{dy'}-\frac{d\beta}{dy'}\frac{dh}{dx'}},$$

cette expression deviendrait une différentielle exacte, et la quatrième intégrale du système des équations (5) est

$$(9)\qquad \delta=\int\frac{[(xy'-yx')x-a^2y']\,dx+y(xy'-yx')\,dy}{\frac{d\beta}{dx'}\frac{dh}{dy'}-\frac{d\beta}{dy'}\frac{dh}{dx'}}.$$

D'après cela, la valeur la plus générale de $\gamma$ qui satisfasse à l'équation (4) est

$$\gamma=\mathrm{F}(\beta,\ h,\ \delta,\ t),$$

et, par conséquent, les intégrales qui, combinées avec celle d'Euler, donneraient à l'équation de Poisson la forme identique $0=0$, sont de la forme

$$(10)\qquad \gamma=\mathrm{F}(\beta,h,\delta),$$

$$(11)\qquad \gamma=t+\mathrm{F}(\beta,h,\delta).$$

Pour décider s'il existe ou non des intégrales comprises dans l'une ou l'autre de ces formes, il faut former préalablement la dérivée de $\delta$ par rapport au temps en ayant égard aux équations différentielles du mouvement. Pour trouver cette dérivée, il suffit de supprimer le signe $\int$ dans l'expression (9) et de remplacer $dx$ et $dy$ par $x'$ et $y'$; on obtient ainsi, après avoir remplacé $\frac{d\beta}{dx'}$, $\frac{d\beta}{dy'}$, $\frac{dh}{dx'}$, $\frac{dh}{dy'}$ par leurs valeurs,

$$\frac{d\delta}{dt}=\frac{(y'x-x'y)xx'-a^2y'x'+yy'(xy'-yx')}{xy(x'^2-y'^2)+(a^2-x^2+y^2)x'y'}=-1;$$

de sorte que $\delta$ ne reste pas constant pendant la durée du mouvement, et comme $\beta$ et $h$, au contraire, restent constants, l'expression (10) ne peut être une intégrale qu'à la condition de ne pas contenir $\delta$, et d'être, par conséquent, une simple combinaison de l'intégrale d'Euler avec celle des forces vives.

Pour chercher les intégrales comprises dans la forme (11), il faut égaler sa dérivée à zéro; on trouve ainsi

$$0 = 1 + \frac{dF}{d\delta},$$

donc

$$F = -\delta + \psi(h, \beta),$$

et, par conséquent, nous avons l'intégrale

$$(12)\quad \gamma = t - \delta + \psi(h, \beta) = t - \int \frac{[(xy' - yx')x - a^2 y']\,dx + y(xy' - yx')\,dy}{xy(x'^2 - y'^2) + (a^2 - x^2 + y^2)\,x'y'} + \psi(\beta, h).$$

Cette intégrale, dans laquelle on peut supprimer le terme $\psi.(\beta, h)$ qui est constant, donnera un résultat identique de la forme $0 = 0$, quand on la combinera avec l'intégrale d'Euler.

Cherchons enfin à intégrer l'équation différentielle partielle obtenue en remplaçant par $+1$ le second membre de l'équation (4). Cette équation nous fournira les intégrales qui, combinées avec celle d'Euler, donnent un résultat de la forme $1 = 1$.

Les équations simultanées qu'il faut intégrer sont cette fois

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} d\gamma &= -\frac{dx}{2y(xy' - yx')} \\ &= -\frac{dx'}{2(xy' - yx')y' - \dfrac{2 m a y^2}{[(x-a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2 m' a y^2}{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2\alpha^2 x}{y^2}} = \frac{dy}{2(xy' - yx')x - 2a^2 y'} \\ &= \frac{dy'}{2(xy' - yx')y' - \dfrac{2 m a y(x-a)}{[(x-a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2 m' a y(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2a^2 x^2}{y^2} - \dfrac{2\alpha^2 a^3}{y^3}}. \end{aligned} \right.$$

On a, d'après ces équations,

$$(14)\quad \frac{dx}{d\gamma} = -2y(xy' - yx'), \quad \frac{dy}{d\gamma} = 2(xy' - yx')x - 2a^2 y',$$

d'où l'on déduit

$$(15)\quad d\gamma = \frac{y'\,dx - x'\,dy}{-2y'y(xy' - yx') - 2xx'(xy' - yx') + 2a^2 y'x'}.$$

Or, les équations (13) ne différant des équations (5) que par l'adjonction du premier membre $d\gamma$ substitué à $\frac{d\gamma}{0}$, elles admettent toutes les intégrales de ces équations (5) dans lesquelles ne figure pas $\gamma$, et, en particulier, les intégrales (6) et (7). On pourra donc, de ces deux intégrales, déduire l'expression de $x'$ et de $y'$ en fonction de $x$ et de $y$, et les substituer dans l'équation (15). Or on peut s'assurer (par un calcul un peu long) que le second membre de cette équation devient ainsi une différentielle exacte. On obtient donc, pour la quatrième intégrale des équations (13),

$$\gamma - \int \frac{y'\,dx - x'\,dy}{-2\,yy'(xy' - yx') - 2\,xx'(xy' - yx') + 2\,a^2x'y'} = \varepsilon,$$

et, par conséquent, la forme la plus générale de $\gamma$ qui puisse satisfaire à l'équation (4), quand on lui donne l'unité pour second membre, est

$$\gamma = \int \frac{y'\,dx - x'\,dy}{-2\,yy'(xy' - yx') - 2\,xx'(xy' - yx') + 2\,a^2x'y'} + \mathrm{F}(h, \beta, \delta).$$

En égalant à zéro la dérivée de $\gamma$, on trouve

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\delta} = 0,$$

car $h$ et $\beta$ sont constants en vertu des équations différentielles du mouvement, et l'on a, en vertu des mêmes équations,

$$y'\frac{dx}{dt} - x'\frac{dy}{dt} = y'x' - x'y' = 0.$$

La quatrième intégrale du problème est donc, si l'on supprime le terme constant $\mathrm{F}(h, \beta)$,

$$\gamma = \int \frac{y'\,dx - x'\,dy}{-2\,yy'(xy' - yx') - 2\,xx'(xy' - yx') + 2\,a^2x'y'},$$

dans laquelle l'intégration du second membre devra être effectuée après que l'on aura remplacé $x'$ et $y'$ par leurs valeurs en $x$ et $y$ déduites de l'intégrale des forces vives et de l'intégrale d'Euler.

Le problème est complétement résolu, puisque nous en avons quatre intégrales.

## VI.

En comparant les résultats obtenus dans les trois cas traités jusqu'ici, nous apercevons qu'ils sont entièrement analogues. Après avoir trouvé une intégrale autre que celle des forces vives, nous en obtenons, dans chacun de ces problèmes, une troisième, qui contient le temps, par la condition que, combinée à la première, elle donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$; puis nous trouvons une quatrième intégrale, qui complète la solution, en exprimant que l'équation de Poisson se réduit à $1 = 1$. Cette grande similitude des résultats relatifs à trois questions différentes n'est pas due au hasard. On peut prouver qu'il doit en être ainsi toutes les fois qu'il s'agit du mouvement d'un point dans un plan, ou, plus généralement, toutes les fois que les coordonnées des points du système peuvent s'exprimer en fonction de deux variables indépendantes.

Soient, en effet,

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dH}{dp_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{dH}{dq_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{dH}{dp_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{dH}{dq_2},$$

les équations différentielles d'un tel problème. Supposons connue, outre l'intégrale des forces vives $H = \alpha$, une seconde intégrale $F = \beta$, et cherchons s'il en existe une troisième $\psi = \gamma$, qui, combinee avec la seconde, donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$.

En exprimant que cette condition est remplie, et, en outre, que $\gamma$ est une intégrale, nous obtiendrons, si nous supposons d'abord que cette intégrale ne contienne pas le temps,

$$(1) \qquad \frac{d\gamma}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} - \frac{d\gamma}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} + \frac{d\gamma}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2} - \frac{d\gamma}{dq_2}\frac{d\beta}{dp_2} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d\gamma}{dp_1}\frac{dH}{dq_1} - \frac{d\gamma}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} + \frac{d\gamma}{dp_2}\frac{dH}{dq_2} - \frac{d\gamma}{dq_2}\frac{dH}{dp_2} = 0,$$

équations auxquelles nous pouvons adjoindre l'équation identique

$$(3) \qquad \frac{d\gamma}{dp_1}\frac{d\gamma}{dq_1} - \frac{d\gamma}{dq_1}\frac{d\gamma}{dp_1} + \frac{d\gamma}{dp_2}\frac{d\gamma}{dq_2} - \frac{d\gamma}{dq_2}\frac{d\gamma}{dp_2} = 0.$$

Or, on peut considérer les trois équations (1), (2), (3) comme trois équations du premier degré en $\frac{d\gamma}{dp_1}, \frac{d\gamma}{dq_1}, \frac{d\gamma}{dp_2}, \frac{d\gamma}{dq_2}$, pourvu que, dans l'équation (3), on regarde les coefficients comme égaux aux inconnues elles-mêmes. Ces équations du premier degré donneraient l'expression des rapports $\frac{d\gamma}{dp_1} : \frac{d\gamma}{dq_1}, \frac{d\gamma}{dp_2} : \frac{d\gamma}{dq_1}, \frac{d\gamma}{dp_2} : \frac{d\gamma}{dq_1}$. Or il est facile de voir que les équations (1), (2), (3) seraient également satisfaites si les inconnues $\frac{d\gamma}{dp_1}, \frac{d\gamma}{dp_2}, \frac{d\gamma}{dq_1}, \frac{d\gamma}{dq_2}$ étaient remplacées par $\frac{d\beta}{dp_1}, \frac{d\beta}{dp_2}, \frac{d\beta}{dq_1}, \frac{d\beta}{dq_2}$ [la substitution ne doit pas être faite dans les coefficients de l'équation (3)]. Il en résulte que ces nouvelles quantités ont les mêmes rapports que les premières, et que, par conséquent,

$$\frac{\frac{d\gamma}{dp_1}}{\frac{d\beta}{dp_1}} = \frac{\frac{d\gamma}{dp_2}}{\frac{d\beta}{dp_2}} = \frac{\frac{d\gamma}{dq_1}}{\frac{d\beta}{dq_1}} = \frac{\frac{d\gamma}{dq_2}}{\frac{d\beta}{dq_2}},$$

d'où l'on conclut facilement que $\gamma$ doit être une fonction de $\beta$, et que, par suite, l'intégrale $\gamma = \psi$, supposée indépendante du temps, n'est pas distincte de celle que l'on connaissait déjà.

Le raisonnement qui précède serait en défaut si l'une des équations (1), (2), (3) rentrait dans les autres; mais il faudrait alors, d'après la théorie des équations du premier degré, que l'on eût des relations de la forme

$$\frac{d\gamma}{dq_1} = \mathrm{M}\frac{d\beta}{dq_1} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{H}}{dq_1}, \quad \frac{d\gamma}{dp_1} = \mathrm{M}\frac{d\beta}{dp_1} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{H}}{dp_1},$$
$$\frac{d\gamma}{dq_2} = \mathrm{M}\frac{d\beta}{dq_2} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{H}}{dq_2}, \quad \frac{d\gamma}{dp_2} = \mathrm{M}\frac{d\beta}{dp_2} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{H}}{dp_2},$$

M et N désignant des fonctions quelconques de $p_1$, $p_2$, $q_1$, $q_2$. Or on déduit de ces équations que $\gamma$ doit être une fonction de $\beta$ et de H, c'est-à-dire encore que l'intégrale $\gamma$ doit rentrer dans celle que l'on avait déjà.

Comme il existe trois intégrales distinctes, et pas davantage, qui sont indépendantes du temps, il résulte de ce qui précède, que, parmi ces intégrales, il y en a nécessairement qui ne donnent pas à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$.

Soit $\delta = \varphi$ une de ces intégrales. Posons

$$(\delta, \beta) = \varepsilon.$$

Si $\varepsilon$ est une constante numérique, il est prouvé, comme nous l'avons annoncé, qu'il existe une intégrale qui, combinée avec $\beta$, donne à l'équation de Poisson la forme $1 = 1$.

Si $\varepsilon$ n'est pas une constante numérique,

$$\varepsilon = \text{constante}$$

est une intégrale indépendante du temps qui, évidemment, doit rentrer dans les trois précédentes; on aura donc

$$(\delta, \beta) = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \delta).$$

Posons actuellement

$$\psi(\alpha, \beta, \delta) = \eta;$$

$\eta$ sera une intégrale des équations proposées, et l'on aura (§ I^er^)

$$(\eta, \beta) = (\alpha, \beta)\frac{d\eta}{d\alpha} + (\delta, \beta)\frac{d\eta}{d\delta} = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \delta)\frac{d\eta}{d\delta},$$

puisque $(\alpha, \beta)$ est égal à zéro. Or on peut évidemment poser

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \delta)\frac{d\eta}{d\delta} = 1,$$

et déterminer par là la forme de $\eta$ qui, combinée avec l'intégrale $\beta$, donne à l'équation de Poisson la forme illusoire $1 = 1$.

Prouvons enfin qu'il existe une intégrale de la forme

$$\gamma = t + \mathrm{F}(q_1, q_2, p_1, p_2),$$

qui, combinée avec $\beta$, donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$.

Considérons, pour cela, l'une quelconque des intégrales dans lesquelles figure le temps

$$\zeta = t + \mathrm{F}(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

Si nous combinons $\zeta$ avec $\beta$, le temps $t$ disparaîtra, et nous aurons, pour $(\zeta, \beta)$, une expression qui sera zéro, auquel cas le théorème est démontré, ou une constante numérique, ou une intégrale nouvelle.

Dans les deux derniers cas, nous pouvons poser

$$(\zeta, \beta) = \chi(\alpha, \beta, \eta),$$

car toute intégrale indépendante du temps peut être considérée comme une combinaison des trois intégrales $\alpha$, $\beta$, $\eta$. Si $(\zeta, \beta)$ est une constante numérique, la fonction $\chi$ se réduira à une constante.

Nous pouvons ajouter au second membre de l'intégrale $\zeta$ une fonction quelconque de $(\alpha, \beta, \eta)$, et nous formons une intégrale nouvelle

$$\eta_1 = t + \mathrm{F}(q_1, q_2, p_1, p_2) + \pi(\alpha, \beta, \eta),$$

et nous aurons évidemment, puisque $(\eta, \beta) = 1$,

$$(\eta_1, \beta) = (\eta, \beta) + [\pi(\alpha, \beta, \eta), \beta] = \chi(\alpha, \beta, \eta) + \frac{d\pi}{d\eta}.$$

Or, on peut poser

$$\chi(\alpha, \beta, \eta) + \frac{d\pi}{d\eta} = 0,$$

et en déduire par une quadrature l'expression de $\pi$ en fonction de $\alpha$, $\beta$, $\eta$. En adoptant cette expression, l'intégrale $\eta_1$, combinée avec $\alpha$, donnera à l'expression de Poisson la forme $0 = 0$.

## VII.

Nous allons étudier, pour quatrième exemple, un problème un peu plus compliqué. Nous supposerons deux points attirés vers un centre fixe et s'attirant, en outre, mutuellement, la loi d'attraction étant représentée par une fonction quelconque de la distance.

Les équations différentielles du mouvement sont

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', \ \dfrac{dy}{dt} = y', \ \dfrac{dz}{dt} = z', \ \dfrac{dx_1}{dt} = x'_1, \ \dfrac{dy_1}{dt} = y'_1, \ \dfrac{dz_1}{dt} = z'_1, \\ \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{\mu x}{r}\varphi(r) + \dfrac{m_1(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}\varphi[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2], \\ \dfrac{dx'_1}{dt} = \dfrac{\mu x_1}{r_1}\varphi(r_1) - \dfrac{m(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}\varphi[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2], \end{cases}$$

et quatre autres qui se déduiraient des deux dernières en changeant $x$ et $x_1$ en $y$, $y_1$ et en $z$, $z_1$.

Le principe des aires nous fournit les trois intégrales

$$(2)\qquad \begin{cases} m(xy'-yx')+m_1(x_1y'_1-y_1x'_1)=\alpha_1,\\ m(xz'-yz')+m_1(x_1z'_1-z_1x'_1)=\alpha_2,\\ m(yz'-zy')+m_1(y_1z'_1-z_1y'_1)=\alpha_3.\end{cases}$$

Cherchons d'abord la forme des intégrales qui, combinées avec $\alpha_1$, donnent à l'équation de Poisson la forme illusoire $0=0$.

Soit

$$(3)\qquad \beta=\varphi(x,y,z,\ x_1,y_1,z_1,t)$$

une telle intégrale. $\beta$ devra satisfaire à l'équation différentielle partielle

$$\frac{d\beta}{dx}\frac{d\alpha_1}{dmx'}-\frac{d\beta}{dmx'}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\frac{d\alpha_1}{dmy'}-\frac{d\beta}{dmy'}\frac{d\alpha_1}{dy}+\frac{d\beta}{dx_1}\frac{d\alpha_1}{dmx'_1}$$
$$-\frac{d\beta}{dmx'_1}\frac{d\alpha_1}{dx_1}+\frac{d\beta}{dy_1}\frac{d\alpha_1}{dmy'_1}-\frac{d\alpha_1}{dy_1}\frac{d\beta}{dm_1y'_1}=0.$$

En remplaçant les dérivées de $\alpha_1$ par leurs valeurs, cette équation devient

$$(4)\qquad \begin{cases} -y\dfrac{d\beta}{dx}-y'\dfrac{d\beta}{dx'}+x\dfrac{d\beta}{dy}+x'\dfrac{d\beta}{dy'}-y_1\dfrac{d\beta}{dx_1}-y'_1\dfrac{d\beta}{dx'_1}\\ \qquad\qquad +x_1\dfrac{d\beta}{dy_1}+x'_1\dfrac{d\beta}{dy'_1}=0.\end{cases}$$

Pour l'intégrer, il faut traiter d'abord le système des équations simultanées

$$-\frac{dx}{y}=-\frac{dx'}{y'}=\frac{dy}{x}=\frac{dy'}{x'}=-\frac{dx_1}{y_1}=-\frac{dx'_1}{y'_1}=\frac{dy_1}{x_1}=\frac{dy'_1}{x'_1}=\frac{d\beta}{0};$$

une première intégrale de ce système est

$$\beta=C_1,$$

et l'on reconnaît aisément que les autres sont

$$(5)\qquad \begin{cases} x^2+y^2=C_2,\\ x_1^2+y_1^2=C_3,\\ x'^2+y'^2=C_4,\\ x'^2_1+y'^2_1=C_5,\\ xx'+yy'=C_6,\\ x_1x'_1+y_1y'_1=C_7,\\ xx_1+yy_1=C_8;\end{cases}$$

en sorte que la forme la plus générale que l'on puisse adopter pour $\beta$ est

$$(6)\quad \beta = \varphi(x^2+y^2,\ x_1^2+y_1^2,\ x'^2+y'^2,\ x_1'^2+y_1'^2,\ xx'+yy',\ x_1x_1'+y_1y_1',\ xx_1+yy_1,\ z,\ z',\ z_1,\ z_1',\ t).$$

Si nous cherchions de la même manière les intégrales qui, combinées avec $\alpha_2$, donnent à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$, nous trouverions qu'elles sont de la forme

$$(7)\quad \beta = \varphi(x^2+z^2,\ x_1^2+z_1^2,\ x'^2+z'^2,\ x_1'^2+z_1'^2,\ xx'+zz',\ x_1x_1'+z_1z_1',\ xx_1+zz_1,\ y,\ y',\ y_1,\ y_1',\ t),$$

et, enfin, celles qui, combinées avec $\alpha_3$, donnent un résultat illusoire, sont de la forme

$$(8)\quad \beta = \varphi(y^2+z^2,\ y_1^2+z_1^2,\ y'^2+z'^2,\ y_1'^2+z_1'^2,\ yy'+zz',\ y_1y_1'+z_1z_1',\ yy_1+zz_1,\ x,\ x',\ x_1,\ x_1',\ t).$$

Or je dis que la forme suivante

$$(9)\quad \beta = \mathrm{F}\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2,\ x_1^2+y_1^2+z_1^2,\ x'^2+y'^2+z'^2,\ x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2,\ xx'+yy'+zz', \\ x_1x_1'+y_1y_1'+z_1z_1',\ xx_1'+yy_1'+zz_1',\ x_1x'+y_1y'+z_1z',\ xx_1+yy_1+zz_1,\ t \end{pmatrix}$$

est comprise dans les trois précédentes et satisfait aux trois conditions à la fois.

Il suffit, en effet, à cause de la symétrie, de prouver que cette dernière forme est comprise dans la forme (6). Or il est évident que $x^2+y^2+z^2$, $x_1^2+y_1^2+z_1^2$, $x'^2+y'^2+z'^2$, $x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2$, $xx'+yy'+zz'$, $x_1x_1'+y_1y_1'+z_1z_1'$, $xx_1+yy_1+zz_1$, sont précisément des fonctions des quantités qui figurent dans cette forme (6); il suffit donc de prouver qu'il en est de même de $xx_1'+yy_1'+zz_1'$, et de $x_1x'+y_1y'+z_1z'$: or on a, identiquement,

$$xx_1'+yy_1'+zz_1'$$
$$= zz_1' + \frac{(x_1x_1'+y_1y_1')(xx_1+yy_1)+\sqrt{[(x_1^2+y_1^2)(x'^2+y'^2)-(x_1x_1'+y_1y_1')^2]}\sqrt{(x^2+y^2)(x_1^2+y_1^2)-(xx_1+yy_1)^2}}{x_1^2+y_1^2},$$

$$x_1x'+y_1y'+z_1z'$$
$$= z_1z' + \frac{(xx'+yy')(xx_1+yy_1)+\sqrt{[(x^2+y^2)(x_1'^2+y_1'^2)-(xx'+yy')^2][(x_1^2+y_1^2)(x^2+y^2)-(xx_1+yy_1)^2]}}{x^2+y^2},$$

et ces équations donnent précisément l'expression des quantités considérées en fonction de celles qui figurent dans la forme (6).

Cherchons, actuellement, si le problème admet des intégrales de la forme (9)

$$(9)\qquad \beta = \mathrm{F}\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2,\ x_1^2+y_1^2+z_1^2,\ x'^2+y'^2+z'^2,\ x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2,\ xx'+yy'+zz', \\ x_1x_1'+y_1y_1'+z_1z_1',\ xx_1'+yy_1'+zz_1',\ x_1x'+y_1y'+z_1z',\ xx_1+yy_1+zz_1 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, écrivons que la dérivée de $\beta$ est nulle lorsqu'on a égard aux équations différentielles du mouvement ; en posant

$$\begin{array}{lllll} x^2+y^2+z^2=u, & x'^2+y'^2+z'^2=v, & xx'+yy'+zz'=w, & x_1x'+y_1y'+z_1z'=\mathrm{R}, & \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2=u_1, & x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2=v_1, & x_1x_1'+y_1y_1'+z_1z_1'=w_1, & xx_1'+yy_1'+zz_1'=\mathrm{R}_1, & xx_1+yy_1+zz_1=\mathrm{Q}, \end{array}$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} & 2\frac{d\mathrm{F}}{du}w + 2\frac{d\mathrm{F}}{du_1}w_1 + 2\frac{d\mathrm{F}}{dv}\left[\frac{w\mu}{\sqrt{u}}\varphi(u) + \frac{(w-\mathrm{R})m_1}{\sqrt{u+u_1-2\mathrm{Q}}}\varphi(u+u_1-2\mathrm{Q})\right] \\ & + 2\frac{d\mathrm{F}}{dv_1}\left[\frac{w_1\mu}{\sqrt{u_1}}\varphi(u_1) + \frac{(w_1-\mathrm{R}_1)m}{\sqrt{u+u_1-2\mathrm{Q}}}\varphi(u+u_1-2\mathrm{Q})\right] \\ & + \frac{d\mathrm{F}}{dw}\left[v + u\varphi(u)\mu + \frac{(u-\mathrm{Q})m_1}{\sqrt{u+u_1-2\mathrm{Q}}}\varphi(u+u_1-2\mathrm{Q})\right] \\ & + \frac{d\mathrm{F}}{dw_1}\left[v_1 + u_1\varphi(u_1)\mu + \frac{(u_1-\mathrm{Q})m}{\sqrt{u+u_1-2\mathrm{Q}}}\varphi(u+u_1-2\mathrm{Q})\right] \\ & + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{Q}}(\mathrm{R}+\mathrm{R}_1) + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{R}}\left[x'x_1'+y'y_1'+z'z_1' + \frac{\mu\mathrm{Q}}{\sqrt{u}}\varphi(u) + \frac{\mathrm{R}_1(u_1-\mathrm{Q})m_1}{\sqrt{(u+u_1-2\mathrm{Q}}}\varphi(u+u_1-2\mathrm{Q})\right] \\ & + \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{R}_1}\left[x_1'x'+y_1'y'+z_1'z' + \frac{\mu\mathrm{Q}}{\sqrt{u_1}}\varphi(u_1) + \frac{\mathrm{R}_1(u-\mathrm{Q})m_1}{\sqrt{(u+u_1-2\mathrm{Q})}}\varphi(u+u_1-2\mathrm{Q}\right] = 0. \end{aligned}$$

Pour prouver que l'on peut déduire de cette équation l'expression de F, en fonction de $u$, $u_1$, $v$, $v_1$, $v$, $w$, Q, R, $\mathrm{R}_1$, il suffit de vérifier que les coefficients sont fonctions de ces neuf seules variables, et tout se réduit évidemment à montrer que $x'x_1'+y'y_1'+z'z_1'$ est une fonction de $u$, $u_1$, $v$, $v_1$, $w$, $w_1$, R, $\mathrm{R}_1$, Q.

Le calcul qui conduirait à cette expression serait assez pénible. Nous nous bornerons à prouver ici qu'il y a possibilité d'obtenir ce résultat. Considérons, pour cela, quatre droites passant par l'origine des coordonnées, et dont deux coïncident avec les rayons vecteurs des points mobiles, tandis que les autres sont parallèles aux directions de leurs vitesses. Désignons ces droites par $o\mathrm{M}$, $o\mathrm{M}_1$, $o\mathrm{V}$, $o\mathrm{V}_1$. On aura évidemment pour les cosinus des angles qu'elles forment deux à deux,

$$\cos \overline{oM.oM_1} = \frac{Q}{\sqrt{uu_1}}, \quad \cos oM.oV = \frac{w}{\sqrt{uv}}, \quad \cos oM.oV' = \frac{R_1}{\sqrt{uv_1}},$$

$$\cos oM_1 oV' = \frac{w_1}{\sqrt{u_1 v_1}}, \quad \cos oM_1 oV = \frac{R}{\sqrt{u_1 v}}, \quad \cos \overline{oV.oV'} = \frac{x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1}{\sqrt{vv_1}};$$

or, les méthodes de la trigonométrie sphérique permettent de calculer l'angle $\overline{oV.oV'}$ en fonction des cinq autres. Cela revient à résoudre un quadrilatère sphérique, connaissant trois côtés et les deux diagonales. On exprimera, par conséquent, $x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1$, en fonction des neuf variables $u$, $u_1$, etc.

Il est donc démontré que la fonction F, pour représenter une intégrale du problème, est assujettie seulement à satisfaire à une équation différentielle partielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions connues des neuf variables qui entrent dans F. L'intégration de cette équation conduirait à une fonction arbitraire de huit expressions déterminées qui contiendraient ces variables.

Chacune de ces expressions, égalée à une constante, fournira une intégrale du problème : l'une de ces huit intégrales sera évidemment l'intégrale des forces vives. Nous devons nous demander si les sept autres sont distinctes de celles des aires. Pour répondre à cette question, il faut résoudre le problème suivant :

*Quelles sont les intégrales résultant de la combinaison des équations des aires, et qui, combinées avec chacune de ces équations, donnent à l'équation de Poisson la forme* $0 = 0$?

Soit

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \beta$$

une des intégrales cherchées. D'après ce que nous avons vu (§ Ier), on a

$$(\beta, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_1)\frac{d\beta}{d\alpha_2} + (\alpha_3, \alpha_1)\frac{d\beta}{d\alpha_3},$$

$$(\beta, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\frac{d\beta}{d\alpha_1} + (\alpha_3, \alpha_1)\frac{d\beta}{d\alpha_3},$$

$$(\beta, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_3)\frac{d\beta}{d\alpha_1} + (\alpha_2, \alpha_3)\frac{d\beta}{d\alpha_2}.$$

Or, on vérifie facilement que

$$(\alpha_2, \alpha_1) = \alpha_3, \quad (\alpha_3, \alpha_2) = \alpha_1, \quad (\alpha_1, \alpha_3) = \alpha_2,$$

et les équations précédentes deviennent

$$(\beta, \alpha_1) = \alpha_3 \frac{d\beta}{d\alpha_2} - \alpha_2 \frac{d\beta}{d\alpha_3},$$

$$(\beta, \alpha_2) = -\alpha_3 \frac{d\beta}{d\alpha_1} + \alpha_1 \frac{d\beta}{d\alpha_3},$$

$$(\beta, \alpha_3) = \alpha_2 \frac{d\beta}{d\alpha_1} - \alpha_1 \frac{d\beta}{d\alpha_2}.$$

En égalant ces trois expressions à zéro, on obtient, pour déterminer $\beta$, la condition suivante :

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha_1}}{\alpha_1} = \frac{\frac{d\beta}{d\alpha_2}}{\alpha_2} = \frac{\frac{d\beta}{d\alpha_3}}{\alpha_3},$$

de laquelle on conclut aisément

$$\beta = \varphi(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2);$$

et, par conséquent, toutes les intégrales qui satisfont à la condition proposée rentrent les unes dans les autres, et l'on ne doit en considérer qu'une,

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \beta.$$

On constaterait aisément qu'elle rentre dans la forme générale (19) trouvée plus haut. Cette forme (19) contient donc seulement six intégrales nouvelles du problème. On s'assurerait, par un calcul tout semblable à celui que nous venons de faire, qu'il existe une intégrale distincte des précédentes et de la forme

$$\beta = t + \mathrm{F}(u, u_1, v, v_1, w, w_1, \mathrm{R}, \mathrm{R}_1, \mathrm{Q}).$$

En résumé, le problème que nous venons d'étudier, admet sept intégrales distinctes, outre celles des forces vives, qui, combinées avec les trois équations des aires, donnent à l'équation de Poisson la forme identique $0 = 0$. Pour trouver ces intégrales, il faudrait intégrer une équation différentielle partielle linéaire à neuf variables indépendantes, et, pour cela, traiter huit équations simultanées du premier ordre.

Mais comme on connaît deux intégrales de ces huit équations, le problème pourra se ramener à l'intégration de six équations du premier ordre.

## VIII.

Nous prendrons, pour dernier exemple, le célèbre problème des trois corps. Nous supposerons que ces trois corps, réduits à des points matériels, s'attirent mutuellement suivant des forces fonctions quelconques de la distance. On sait que, sans changer les équations différentielles du problème, on peut supposer que le centre de gravité soit fixe, et rapporter la position des points à trois axes passant par ce centre. En nommant alors $x_1$, $y_1$, $z_1$, $x_2$, $y_2$, $z_2$, $x_3$, $y_3$, $z_3$, les neuf coordonnées, nous aurons

$$(1)\qquad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0, \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0, \end{cases}$$

qui permettent d'exprimer les neuf coordonnées en fonctions de six variables seulement; on pourra poser, par exemple,

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 q_1 + \beta_1 q_2, & y_1 = \alpha_1 q_3 + \beta_1 q_4, & z_1 = \alpha_1 q_5 + \beta_1 q_6, \\ x_2 = \alpha_2 q_1 + \beta_2 q_2, & y_2 = \alpha_2 q_3 + \beta_2 q_4, & z_2 = \alpha_2 q_5 + \beta_2 q_6, \\ x_3 = \alpha_3 q_1 + \beta_3 q_2, & y_3 = \alpha_3 q_3 + \beta_3 q_4, & z_3 = \alpha_3 q_5 + \beta_3 q_6; \end{cases}$$

$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ étant de nouvelles variables, et $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, des constantes assujetties aux seules relations

$$(3)\qquad \begin{cases} m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 = 0, \\ m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2 + m_3 \beta_3 = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose, de plus,

$$(4)\qquad \begin{cases} 1 = m_1 \alpha_1^2 + m_2 \alpha_2^2 + m_3 \alpha_3^2, \\ 1 = m_1 \beta_1^2 + m_2 \beta_2^2 + m_3 \beta_3^2, \\ 0 = m_1 \alpha_1 \beta_1 + m_2 \alpha_2 \beta_2 + m_3 \alpha_3 \beta_3, \end{cases}$$

l'expression de la demi-somme des forces vives deviendra

$$(5) \qquad T = \frac{1}{2}(q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + q_4'^2 + q_5'^2 + q_6'^2);$$

et, par conséquent, en vertu des formules de Lagrange, rapportées au commencement de ce Mémoire, les équations différentielles du mouvement seront

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_1}, & \dfrac{dq_2'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_2}, & \dfrac{dq_3'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_3}, \\ \dfrac{dq_4'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_4}, & \dfrac{dq_5'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_5}, & \dfrac{dq_6'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_6}, \end{cases}$$

U désignant la fonction des forces, qui est ici

$$U = \sum m_1 m_2 \psi[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2];$$

$\psi$ désignant une certaine fonction dont la forme dépend de la loi d'attraction.

Or on a, d'après la formule (2), pour exprimer les distances mutuelles des trois points,

$$\begin{aligned} \rho_3^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 (z_1 - z_2)^2 \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2) + (\beta_1 - \beta_2)^2 (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2) \\ &+ 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6), \\ \rho_1^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 \\ &= (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2) + (\beta_2 - \beta_3)^2 (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2) \\ &+ 2(\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3)(q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6), \\ \rho_2^2 &= (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 \\ &= (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2) + (\beta_1 - \beta_3)^2 (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2) \\ &+ 2(\alpha_1 - \alpha_3)(\beta_1 - \beta_3)(q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6). \end{aligned}$$

D'après ces formules, les équations différentielles du mouvement deviennent

$$\frac{dq'_1}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2).2q_2\right],$$

$$\frac{dq'_2}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_1\right],$$

$$\frac{dq'_3}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_3 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_4\right],$$

$$\frac{dq'_4}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_4 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_3\right],$$

$$\frac{dq'_5}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_5 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_6\right],$$

$$\frac{dq'_6}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_6 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_5\right];$$

on en déduit facilement les intégrales suivantes, qui ne sont autre chose que les intégrales des aires écrites dans le nouveau système de variables,

$$\begin{aligned}
q_3 q'_1 - q_1 q'_3 + q_4 q'_2 - q_2 q'_4 &= \alpha_1, \\
q_5 q'_1 - q_1 q'_5 + q_6 q'_2 - q_2 q'_6 &= \alpha_2, \\
q_5 q'_3 - q_3 q'_5 + q_6 q'_4 - q_4 q'_6 &= \alpha_3.
\end{aligned}$$

Si nous cherchons les intégrales qui, combinées avec ces trois-là, donnent à l'équation de Poisson la forme identique $0 = 0$, nous trouverons, absolument comme dans le paragraphe précédent, que ces intégrales sont de la forme

$$\beta = \mathrm{F}\left(\begin{matrix} q_1^2 + q_3^2 + q_5^2, \; q_2^2 + q_4^2 + q_6^2, \; q'^2_1 + q'^2_3 + q'^2_5, \; q'^2_2 + q'^2_4 + q'^2_6, \; q_1 q'_1 + q_3 q'_3 + q_5 q'_5, \\ q_2 q'_2 + q_4 q'_4 + q_6 q'_6, \; q_1 q'_2 + q_3 q'_4 + q_5 q'_6, \; q_2 q'_1 + q_4 q'_3 + q_6 q'_5, \; q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6 \end{matrix}\right),$$

ou représentées par la même équation, au second membre de laquelle on ajouterait le terme $t$.

Il nous reste à examiner s'il existe, en effet, des intégrales de la forme précédente. Pour cela, prenons la dérivée de $\beta$, et écrivons qu'elle est nulle quand on a égard aux équations différentielles du mouvement.

En posant

$$\begin{matrix}
q_1^2 + q_3^2 + q_5^2 = u, & q'^2_1 + q'^2_3 + q'^2_5 = v, & q_1 q'_1 + q_3 q'_3 + q_5 q'_5 = w, & q'_1 q_2 + q'_3 q_4 + q'_5 q_6 = \mathrm{R}, \\
q_2^2 + q_4^2 + q_6^2 = u_1, & q'^2_2 + q'^2_4 + q'^2_6 = v_1, & q_2 q'_2 + q_4 q'_4 + q_6 q'_6 = w_1, & q_1 q'_2 + q_3 q'_4 + q_5 q'_6 = \mathrm{R}_1,
\end{matrix} \quad q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6 = \mathrm{Q},$$

on trouve l'équation

$$\begin{aligned}
&2w\frac{dF}{du}+2w_1\frac{dF}{du_1}+2\frac{dF}{dv}\left(q'_1\frac{dq'_1}{dt}+q'_3\frac{dq'_3}{dt}+q'_5\frac{dq'_5}{dt}\right)+2\frac{dF}{dv_1}\left(q'_2\frac{dq'_2}{dt}+q'_4\frac{dq'_4}{dt}+q'_6\frac{dq'_6}{dt}\right)\\
&\quad+\frac{dF}{dw}\left(v+q_1\frac{dq'_1}{dt}+q_3\frac{dq'_3}{dt}+q_5\frac{dq'_5}{dt}\right)+\frac{dF}{dw_1}\left(q_2\frac{dq'_2}{dt}+q_4\frac{dq'_4}{dt}+q_6\frac{dq'_6}{dt}+v_1\right)\\
&\quad+\frac{dF}{dQ}(R+R_1)+\frac{dF}{dR}\left(q'_1q'_2+q'_3q'_4+q'_5q'_6+q_2\frac{dq'_1}{dt}+q_4\frac{dq'_3}{dt}+q_6\frac{dq'_5}{dt}\right)\\
&\quad+\frac{dF}{dR_1}\left(q'_1q'_2+q'_3q'_4+q'_5q'_6+q_1\frac{dq'_2}{dt}+q_3\frac{dq'_4}{dt}+q_5\frac{dq'_6}{dt}\right)=0.
\end{aligned}$$

Il suffit, pour le but que nous nous proposons, de montrer que tous les coefficients de cette équation sont des fonctions des neuf variables $u$, $u_1$, $v$, $v_1$, $w$, $w_1$, $R$, $R_1$, $Q$. Or on trouve, en substituant aux dérivées qui y figurent, leurs valeurs fournies par les équations différentielles du mouvement,

$$\begin{aligned}
q_1\frac{dq'_1}{dt}+q_3\frac{dq'_3}{dt}+q_5\frac{dq'_5}{dt}&=\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1-\alpha_2)^2w+2R(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\right]m_1m_2,\\
q'_2\frac{dq'_2}{dt}+q'_4\frac{dq'_4}{dt}+q'_6\frac{dq'_6}{dt}&=\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1-\beta_2)^2w_1+2R_1(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\right]m_1m_2,\\
q_1\frac{dq'_1}{dt}+q_3\frac{dq'_3}{dt}+q_5\frac{dq'_5}{dt}&=\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1-\alpha_2)^2u+2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)Q\right]m_1m_2,\\
q_2\frac{dq'_2}{dt}+q_4\frac{dq'_4}{dt}+q_6\frac{dq'_6}{dt}&=\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1-\beta_2)^2u_1+2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)Q\right]m_1m_2,\\
q_2\frac{dq'_1}{dt}+q_4\frac{dq'_3}{dt}+q_6\frac{dq'_5}{dt}&=\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1-\alpha_2)^2Q+2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)u\right]m_1m_2,\\
q_1\frac{dq'_2}{dt}+q_3\frac{dq'_4}{dt}+q_5\frac{dq'_6}{dt}&=\sum\psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1-\beta_2)^2Q+2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)u_1\right]m_1m_2;
\end{aligned}$$

et comme $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ s'expriment évidemment par les formules

$$\begin{aligned}
\rho_1^2&=(\alpha_2-\alpha_3)^2u+(\beta_2-\beta_3)^2u_1+2(\alpha_2-\alpha_3)(\beta_2-\beta_3)Q,\\
\rho_2^2&=(\alpha_1-\alpha_3)^2u+(\beta_1-\beta_3)^2u_1+2(\alpha_1-\alpha_3)(\beta_1-\beta_3)Q,\\
\rho_3^2&=(\alpha_1-\alpha_2)^2u+(\beta_1-\beta_2)^2u_1+2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)Q,
\end{aligned}$$

il nous reste seulement à prouver que la somme $q'_1q'_2+q'_3q'_4+q'_5q'_6$ peut s'exprimer en fonction des neuf mêmes variables.

Pour y parvenir, considérons dans l'espace, à partir de l'origine des coordonnées, quatre droites qui forment, avec trois axes rectangulaires, des angles dont les cosinus soient respectivement proportionnels à $q_1, q_3, q_5$, $q_2, q_4, q_6$, $q'_1, q'_3, q'_5$, $q'_2, q'_4, q'_6$, et désignons ces droites par les numéros (1), (2), (3), (4); on aura évidemment

$$\cos(1,2) = \frac{Q}{\sqrt{uu_1}}, \quad \cos(2,3) = \frac{R}{\sqrt{u_1 v}},$$

$$\cos(1,3) = \frac{w}{\sqrt{uv}}, \quad \cos(2,4) = \frac{w_1}{\sqrt{u_1 v_1}},$$

$$\cos(1,4) = \frac{R_1}{\sqrt{uv_1}}, \quad \cos(3,4) = \frac{q'_1 q'_2 + q'_3 q'_4 + q'_5 q'_6}{\sqrt{vv_1}}.$$

On voit donc que, parmi les six angles que forment les quatre droites considérées deux à deux, il y en a cinq qui sont fonctions de $u$, $u_1$, $v$, $v_1$, $w$, $w_1$, R, $R_1$ et Q. Le sixième s'exprime au moyen des mêmes quantités et de la somme $q'_1 q'_2 + q'_3 q'_4 + q'_5 q'_6$. Donc cette somme peut, réciproquement, s'exprimer en fonction de ce sixième angle et des variables $v$, $v_1$, etc. Mais le sixième angle est exprimable en fonction des cinq autres, car un quadrilatère sphérique est déterminé quand on donne trois côtés et les deux diagonales, et, par conséquent, la somme $q'_1 q'_2 + q'_3 q'_4 + q'_5 q'_6$ peut s'exprimer en fonction des neuf variables $u$, $u_1$, etc.

Les coefficients de l'équation qui définit F ne contenant que les variables qui figurent dans cette fonction, on pourra intégrer cette équation et obtenir pour F une expression dans laquelle figureront d'une manière arbitraire huit fonctions déterminées des huit variables. Chacune de ces huit intégrales égalée à une constante fournira une intégrale du problème des trois corps. Mais, parmi ces huit intégrales, six seulement seront nouvelles; l'une d'elles sera évidemment l'équation des forces vives, et une autre pourrait s'obtenir en faisant la somme des carrés des intégrales des aires. On démontrerait, comme au paragraphe précédent, que celle-là est la seule qui puisse résulter de la combinaison des intégrales des aires.

Si nous considérons, en second lieu, la forme

$$\beta = t + F(u, u_1, v, v_1, w, w_1, R, R_1, Q),$$

on verra de la même manière qu'en exprimant que $\beta$ est une intégrale, on obtient une équation en F qui ne diffère de la précédente que par l'addition du terme $+1$. L'une des solutions de cette équation sera une intégrale nouvelle du problème; les six autres, combinées avec celle-là, reproduiraient les intégrales déjà obtenues.

## IX.

Les intégrales dont l'existence a été démontrée au paragraphe précédent sont de la forme

$$\beta = \mathrm{F}\left(\begin{array}{l} q_1^2+q_3^2+q_5^2,\ q_2^2+q_4^2+q_6^2,\ q_1'^2+q_3'^2+q_5'^2,\ q_2'^2+q_4'^2+q_6'^2,\ q_1q_1'+q_3q_3'+q_5q_5', \\ q_2q_2'+q_4q_4'+q_6q_6',\ q_1q_2'+q_3q_4'+q_5q_6',\ q_2q_1'+q_4q_3'+q_6q_5',\ q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6 \end{array}\right).$$

Nous allons voir que les intégrales comprises dans cette forme générale peuvent elles-mêmes se partager en deux classes distinctes dans l'expression de chacune desquelles ne figure plus qu'une fonction inconnue de huit variables.

En posant, comme dans le paragraphe précédent,

$$\begin{array}{llll} q_1^2+q_3^2+q_5^2=u, & q_1'^2+q_3'^2+q_5'^2=v, & q_1q_1'+q_3q_3'+q_5q_5'=w, & q_1q_2'+q_3q_4'+q_5q_6'=\mathrm{R}, \\ q_2^2+q_4^2+q_6^2=u_1, & q_2'^2+q_4'^2+q_6'^2=v_1, & q_2q_2'+q_4q_4'+q_6q_6'=w_1, & q_2q_1'+q_4q_3'+q_6q_5'=\mathrm{R}_1, \end{array} \quad q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6=\mathrm{Q}.$$

j'ai été conduit, par des considérations d'homogénéité que je développerai dans un autre Mémoire, à donner à l'expression de $\beta$ la forme suivante :

$$\beta = u^m \mathrm{F}\left(\frac{u}{u_1},\ v\sqrt{u},\ \ v_1\sqrt{u_1},\ \ \frac{w}{\sqrt{uv}},\ \frac{w_1}{\sqrt{u_1v_1}},\ \frac{\mathrm{Q}}{\sqrt{uu_1}},\ \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{uv_1}},\ \frac{\mathrm{R}_1}{\sqrt{u_1v}}\right),$$

qui ne contient plus qu'une fonction inconnue de huit variables. Cette forme se partage en deux autres distinctes suivant que $m$ est ou n'est pas différent de zéro, et l'on peut vérifier que l'une et l'autre contiennent des intégrales fournies par l'intégration d'une équation différentielle partielle linéaire à huit variables indépendantes. La première forme, dans laquelle nous supposons $m=-\frac{1}{2}$,

$$(1)\qquad \beta = u^{-\frac{1}{2}} \mathrm{F}\left(\frac{u}{u_1},\ v\sqrt{u},\ \ v_1\sqrt{u_1},\ \ \frac{w}{\sqrt{uv}},\ \frac{w_1}{\sqrt{u_1v_1}},\ \frac{\mathrm{Q}}{\sqrt{uu_1}},\ \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{uv_1}},\ \frac{\mathrm{R}_1}{\sqrt{u_1v}}\right),$$

contient l'intégrale des forces vives, et une combinaison des trois intégrales des aires, et, en outre, cinq intégrales inconnues.

$$\beta = \mathrm{F}\left(\frac{u}{u_1},\ v\sqrt{u},\ v_1\sqrt{u_1},\ \frac{\varpi}{\sqrt{uv}},\ \frac{\varpi_1}{\sqrt{u_1 v_1}},\ \frac{\mathrm{Q}}{\sqrt{uu_1}},\ \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{uv_1}},\ \frac{\mathrm{R}_1}{\sqrt{u_1 v}}\right)$$

ne contient qu'une seule intégrale distincte des précédentes.

Les équations différentielles partielles qu'il faudra intégrer pour trouver les intégrales comprises dans l'une ou l'autre de ces formes, sont linéaires et à huit variables indépendantes.

Nous reviendrons dans un autre Mémoire sur ces résultats que nous ne faisons qu'indiquer ici. Il nous suffit en ce moment d'avoir montré que, sans connaître les intégrales du problème des trois corps, on peut les classer de la manière suivante :

1°. L'intégrale des forces vives;

2°. Les trois intégrales des aires;

3°. Cinq intégrales distinctes des précédentes, dans l'expression desquelles figure une fonction inconnue de huit variables;

4°. Une intégrale obtenue en égalant à une constante une fonction des huit mêmes variables;

5°. Une intégrale qui contient le temps;

6°. Une intégrale qui n'appartient à aucune des catégories précédentes.

Les géomètres comprendront, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, que cette séparation des intégrales est un pas important dans la solution du problème, et qu'en partageant ainsi la question en plusieurs autres plus simples, on augmente les chances de la résoudre.

## X.

Je terminerai ce Mémoire en indiquant l'interprétation géométrique dont sont susceptibles les résultats que nous venons d'obtenir. En considérant $q_1$, $q_3$, $q_5$, $q_2$, $q_4$, $q_6$ comme les coordonnées de deux points mobiles, le problème des trois corps se ramène à celui du mouvement de ces deux points que l'on peut considérer comme s'attirant mutuellement en même temps qu'ils sont attirés par l'origine des coordonnées; or il est évident que les intégrales complètes du problème devraient donner, si elles étaient connues, les valeurs de $q_1$, $q_3$, $q_5$, $q_2$, $q_4$, $q_6$ et de leurs dérivées en fonction du temps et des valeurs initiales de ces douze quantités. Si maintenant on distingue parmi les données initiales celles qui fixent la position absolue des corps et la direction absolue de leurs vitesses et celles qui font connaître seulement les positions et vitesses relatives, il est évident que la connaissance seule des dernières permettra de calculer, à un instant donné, tout ce qui ne dépend que de ces positions ou vitesses relatives, et que, par conséquent, il doit exister des intégrales dont les quantités qui fixent les positions absolues soient complétement éliminées. Or c'est précisément ce qui est indiqué par notre analyse. Si l'on considère, en effet, les neuf quantités

$$\begin{array}{lll} q_1^2 + q_3^2 + q_5^2, & q_2^2 + q_4^2 + q_6^2, & q_1'^2 + q_3'^2 + q_5'^2, \\ q_2'^2 + q_4'^2 + q_6'^2, & q_1 q_1' + q_3 q_3' + q_5 q_5', & q_2 q_2' + q_4 q_4' + q_6 q_6', \\ q_1 q_2' + q_3 q_4' + q_5 q_6', & q_2 q_1' + q_4 q_3' + q_6 q_5', & q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6, \end{array}$$

il est facile de voir qu'en les supposant connues, on peut déterminer seulement les distances des deux mobiles à l'origine des coordonnées, les angles formés par les directions des rayons vecteurs et par celles des vitesses considérées deux à deux, et, enfin, la grandeur de ces vitesses, c'est-à-dire tous les éléments qui déterminent le système formé à un instant donné par les corps en mouvement considérés indépendamment de leur position absolue dans l'espace.