JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

# Thèse de mécanique. Sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les fonctions $X_n$ et $Y_n$

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 17 (1852), p. 265-300.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__265_0>

# THÈSE DE MÉCANIQUE.

## *Sur le développement des Fonctions en Séries ordonnées suivant les Fonctions* $X_n$ *et* $Y_n$ ;

**PAR M. OSSIAN BONNET.**

On sait que les fonctions $X_n$ et $Y_n$, introduites dans l'analyse par Legendre, sont d'un très-grand secours dans plusieurs théories importantes, en particulier dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes et dans celle de la figure des planètes; parmi les nombreuses propriétés dont jouissent ces fonctions, une des plus remarquables consiste en ce que toute fonction de deux angles $\theta$ et $\varphi$, donnée arbitrairement entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, et assujettie à la seule condition de ne pas devenir infinie entre ces limites, peut toujours être développée en série convergente ordonnée suivant les fonctions $Y_n$. C'est à Laplace que l'on doit cette importante proposition; il y avait été conduit par des considérations indirectes et qui, de son propre aveu, sont insuffisantes; plus tard, Poisson, qui s'était servi du résultat de Laplace, dans plusieurs problèmes de Mécanique et de Physique mathématique, a cherché à l'établir rigoureusement. On peut voir dans le XIX$^e$ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour les années 1829 et 1831, et enfin dans la *Théorie mathématique de la Chaleur*, page 212, la démonstration de cet illustre analyste. Cette démonstration suppose, comme on le reconnaît aisément, la fonction qu'il s'agit de développer et ses dérivées premières, continues par rapport à $\theta$ et à $\varphi$, conditions qui peuvent ne pas être satisfaites, même pour des cas très-simples; la démonstration de Poisson est donc incomplète. Depuis, M. Lejeune-Dirichlet a publié, dans le tome XVII du Journal de M. Crelle, la première et je crois l'unique démonstration entièrement rigoureuse du théorème de Laplace. Je me propose, dans cette Thèse, de donner une nouvelle démonstration plus directe que celle de M. Dirichlet, et, afin que mon travail présente un ensemble complet, je ferai préalablement une exposition rapide des principales propriétés des fonctions $X_n$ et $Y_n$, en ne m'attachant à démontrer que les moins connues de ces propriétés.

## § I^er.

### *Propriétés des fonctions* $X_n$.

THÉORÈME I. *L'expression* $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, *où* $x$ *est un nombre compris entre* $-1$ *et* $+1$ *et* $\alpha$ *un nombre positif moindre que* $1$, *est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de* $\alpha$.

*Remarque.* On appelle $X_n$ le coefficient de $\alpha^n$ dans le développement de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$.

THÉORÈME II. *On a, en général,*

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left\{\begin{array}{l} x^n - \dfrac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} \\ + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots \end{array}\right\}$$

THÉORÈME III. *Posant* $x = \cos\gamma$, *on a, comme seconde valeur de* $X_n$,

$$\begin{aligned} X_n = {} & \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}2\cos n\gamma + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{1}{2}2\cos(n-2)\gamma + \ldots \\ & + \frac{1.3.5\ldots(2n-2i-1)}{2.4.6\ldots(2n-2i)}\frac{1.3\ldots(2i-1)}{2.4\ldots 2i}2\cos(n-2i)\gamma + \ldots . \end{aligned}$$

*Corollaire.* Les coefficients de $\cos n\gamma$, $\cos(n-2)\gamma$, etc., dans la valeur précédente, étant positifs, on voit que la plus grande valeur que puisse prendre $X_n$, quand $\gamma$ varie, correspond à $\gamma = 0$ ou $x = 1$; or, dans ce cas, $X_n$ est $1$, puisque $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ se réduit à

$\frac{1}{1-\alpha}$; donc les fonctions $X_n$ sont généralement moindres que 1 et elles n'atteignent la valeur 1 que pour $x = 1$.

THÉORÈME IV. *Posant, comme dans le théorème précédent,* $x = \cos\gamma$, *et, de plus,* $\sqrt{-1} = i$, *on a, pour troisième valeur de* $X_n$,

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega)^n\,d\omega.$$

*Démonstration.* On sait que toute expression de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

peut se représenter par l'intégrale définie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega}{A - iB\cos\omega},$$

où $i = \sqrt{-1}$. Soit donc

$$A = 1 - \alpha\cos\gamma, \quad B = \alpha\sin\gamma,$$

nous aurons

$$(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega}{1 - \alpha\cos\gamma - i\alpha\sin\gamma\cos\omega};$$

développant les deux membres suivant les puissances entières et positives de $\alpha$, et identifiant les deux développements, on trouve le résultat énoncé.

THÉORÈME V. *Les trois fonctions consécutives* $X_{n+1}$, $X_n$, $X_{n-1}$, *sont liées par la relation*

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0.$$

*Corollaire.* On déduit de la relation précédente, et en s'aidant des principes de M. Sturm, que les racines de l'équation

$$X_n = 0$$

sont réelles, inégales, comprises entre $-1$ et $+1$, et telles, qu'entre deux d'entre elles consécutives se trouve une et une seule racine réelle de l'équation

$$X_{n-1} = 0.$$

THÉORÈME VI. *Les indices m et n étant différents, l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx$$

*sera toujours nulle. Si ces indices sont égaux, on aura*

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

THÉORÈME VII. *On a*

$$X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}.$$

THÉORÈME VIII. *La fonction $X_n$ vérifie l'équation différentielle du second ordre*

$$\frac{d(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0. \tag{1}$$

*Remarque.* Le produit de $X_n$ par une constante est la seule fonction entière de $x$, qui vérifie l'équation (1).

THÉORÈME IX. *Les indices m et n étant différents, l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^r X_m}{dx^r} \frac{d^r X_n}{dx^r} (1-x^2)^r \, dx$$

*sera toujours nulle. Si ces indices sont égaux, on aura*

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{d^r X_n}{dx^r}\right)^2 (1-x^2)^r \, dx = \frac{2}{2n+1} \frac{\pi(n+r)}{\pi(n-r)},$$

*$\pi(k)$ représentant, en général, le produit $1.2.3\ldots k$.*

THÉORÈME X. *Les deux fonctions consécutives $X_n$ et $X_{n+1}$ sont liées par la relation différentielle*

$$\frac{1}{n+1}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} = xX_n - X_{n+1}.$$

*Démonstration*. D'après l'équation (1), on a

$$\frac{1}{n+1}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} = -n\int_{-1}^{x} X_n\,dx;$$

il suffira donc de montrer que

$$-n\int_{-1}^{x} X_n\,dx = xX_n - X_{n+1},$$

ou, en se rappelant la valeur donnée par le théorème VII, que

$$\frac{-1}{1.2.3\ldots(n-1)2^n}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}x\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} - \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)2^{n+1}}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}},$$

ou bien encore que

$$\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}} = 2(n+1)x\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + 2n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}.$$

Mais

$$\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}} = (x^2-1)\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}$$
$$+ 2(n+1)x\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}};$$

donc il faut que

$$(x^2-1)\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}} = n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}.$$

Or, en différentiant par rapport à $x$, et multipliant par $\frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}$, on trouve

$$\frac{d(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0.$$

THÉORÈME XI. *Posant* $x = \cos\gamma$, *et supposant que* $\gamma$ *varie entre les limites* $\alpha$ *et* $\pi - \alpha$, *où* $\alpha$ *est un nombre déterminé aussi petit qu'on le veut, mais cependant différent de* 0, *on a, pour toutes ces valeurs* *de* $\gamma$,

$$X_n = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + (-1)^n \frac{\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}\sin\gamma}$$
$$+ \frac{\cot\gamma\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

*$p$ étant une fonction de $\gamma$ et de $n$ qui reste toujours au-dessous d'une certaine limite fixe.*

*Démonstration.* D'après le théorème VIII, on a

$$\frac{d(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

et, en changeant $x$ en $\cos\gamma$,

$$\frac{d^2X_n}{d\gamma^2} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\frac{dX_n}{d\gamma} + n(n+1)X_n = 0.$$

Posons $X_n = u\sin^{-\frac{1}{2}}\gamma$, afin de faire disparaître le second terme, il viendra

$$\frac{d^2u}{d\gamma^2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 u = -\frac{u}{4\sin^2\gamma},$$

ou

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{d\gamma^2} + \rho^2 u = -\frac{u}{4\sin^2\gamma},$$

en faisant $n + \frac{1}{2} = \rho$.

Multiplions maintenant cette équation par $\sin\rho\gamma\, d\gamma$, et intégrons de $\alpha$ à $\gamma$, nous aurons

$$\sin\rho\gamma\frac{du}{d\gamma} - \rho u\cos\rho\gamma = C - \frac{1}{4}\int_\alpha^\gamma \frac{u\sin\rho\gamma\, d\gamma}{\sin^2\gamma},$$

ou bien, en remplaçant, sous le signe $\int$, la variable $\gamma$ par $\gamma'$, afin de la distinguer de la valeur particulière qui représente la limite supérieure, et appelant $u'$ ce que devient $u$ par ce changement,

$$(2) \qquad \sin\rho\gamma\frac{du}{d\gamma} - \rho u\cos\rho\gamma = C - \frac{1}{4}\int_\alpha^\gamma \frac{u'\sin\rho\gamma'\, d\gamma'}{\sin^2\gamma'};$$

multipliant de même l'équation (1) par $\cos\rho\gamma\,d\gamma$, et intégrant de $\alpha$ à $\gamma$, on a

$$(3)\qquad \cos\rho\gamma\frac{du}{d\gamma}+\rho u\sin\rho\gamma = C' - \frac{1}{4}\int_\alpha^\gamma \frac{u'\cos\rho\gamma'\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}.$$

Éliminant $\frac{du}{d\gamma}$ entre les équations (2) et (3), il vient

$$u = \frac{C'\sin\rho\gamma - C\cos\rho\gamma}{\rho} + \frac{1}{4\rho}\int_\alpha^\gamma \frac{u'\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'},$$

ou bien, en substituant à C et C' deux nouvelles constantes $\delta$ et $\varepsilon$, convenablement choisies,

$$u = \frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho} + \frac{1}{4\rho}\int_\alpha^\gamma \frac{u'\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}.$$

Ce résultat fait connaître les différents termes du développement de $u$, suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\rho}$; en effet, on en déduit successivement

$$\begin{aligned} u = {} & \frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho} + \frac{\delta}{4\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\cos(\rho\gamma'+\varepsilon)\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'} \\ & + \frac{1}{16\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'} \frac{u''\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} u = {} & \frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho} + \frac{\delta}{4\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\cos(\rho\gamma'+\varepsilon)\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'} \\ & + \frac{\delta}{16\rho^3}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'} \frac{\cos(\rho\gamma''+\varepsilon)\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''} \\ & + \frac{1}{64\rho^3}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'} \frac{\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''}\int_\alpha^{\gamma''} \frac{u'''\sin\rho(\gamma'''-\gamma'')\,d\gamma'''}{\sin^2\gamma'''}; \end{aligned}$$

ainsi de suite. On peut remarquer que, pour éviter toute confusion, nous changeons sous le signe $\int$ successivement $\gamma'$ en $\gamma''$, $\gamma'''$,...; ce qui transforme $u'$ en $u''$, $u'''$,....

Nous ne ferons usage, dans ce qui va suivre, que de la valeur de $u$, écrite en dernier lieu, mais après l'avoir mise sous une forme beaucoup plus simple. Il est clair que $u$ ou bien $X_n \sin^{\frac{1}{2}}\gamma$ est, pour toutes les valeurs de $\rho$ et pour toutes les valeurs de $\gamma$, depuis $\alpha$ jusqu'à $\pi - \alpha$, constamment inférieur, en valeur absolue, à 1; d'ailleurs $\sin^2\gamma'$, $\sin^2\gamma''$, $\sin^2\gamma'''$ sont au moins égaux à $\sin^2\alpha$. D'après cela, l'intégrale triple

$$\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'} \frac{\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''}\int_\alpha^{\gamma''} \frac{u'''\sin\rho(\gamma'''-\gamma'')\,d\gamma'''}{\sin^2\gamma'''}$$

ne peut jamais dépasser, quel que soit $\rho$ et quel que soit $\gamma$, depuis $\alpha$ jusqu'à $\pi - \alpha$, un certain nombre déterminé; il en est de même évidemment de l'intégrale double

$$\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'} \frac{\cos(\rho\gamma''+\varepsilon)\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''};$$

on peut donc écrire

$$u = \frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho} + \frac{\delta}{4\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\cos(\rho\gamma'+\varepsilon)\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{\rho^3} + \frac{q}{\rho^3},$$

$p$ et $q$ restant finis pour toutes les valeurs de $\rho$ et pour les valeurs de $\gamma$, comprises entre $\alpha$ et $\pi - \alpha$. De plus, si l'on remplace dans l'intégrale le produit de sinus et cosinus par une somme de sinus, il vient

$$\frac{\delta}{8\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin(2\rho\gamma'-\rho\gamma+\varepsilon)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'} - \frac{\delta}{8\rho^2}\sin(\rho\gamma+\varepsilon)\int_\alpha^\gamma \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'}:$$

or le premier terme, en remarquant que

$$\sin(2\rho\gamma'-\rho\gamma+\varepsilon) = -\frac{1}{2\rho}\frac{d\cos(2\rho\gamma'-\rho\gamma+\varepsilon)}{d\gamma'},$$

et appliquant le procédé de l'intégration par parties, se met aisément sous la forme $\frac{p'\delta}{\rho^3}$, $p'$ étant, comme $p$, une certaine fonction de $\rho$ et de $\gamma$, qui ne dépasse jamais une limite fixe; on peut donc grouper ce terme avec $\frac{p\delta}{\rho^3}$ dans la valeur de $u$, et il vient finalement

$$(4)\qquad u = \frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho} - \frac{\delta}{8\rho^2}\sin(\rho\gamma+\varepsilon)\int_\alpha^\gamma \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{\rho^3} + \frac{q}{\rho^3}.$$

$p$ et $q$ sont, comme plus haut, des fonctions de $\rho$ et $\gamma$, qui restent pour toutes les valeurs de $\rho$ et pour les valeurs de $\gamma$ comprises entre $\alpha$ et $\pi - \alpha$, constamment au-dessous d'une certaine limite fixe.

Occupons-nous maintenant de la détermination des constantes $\delta$ et $\varepsilon$ introduites par l'intégration de l'équation (1). Pour cela, remarquons que, lorsque $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on a, suivant le degré de parité de $n$,

$$u = \mathrm{X}_{2k+1} = 0,$$

$$u = \mathrm{X}_{2k} = (-1)^k \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k} = (-1)^k \frac{1.2.3\ldots 2k}{2^{2k}(1.2.3\ldots k)^2}$$

$$= (-1)^k \frac{\sqrt{2\pi}\,(2k)^{2k+\frac{1}{2}}\, e^{-2k+\frac{1}{24k}-\frac{\theta}{2880k^3}}}{2^{2k}.\,2\pi k^{2k+1}\, e^{-2k+\frac{1}{6k}-\frac{\theta'}{180k^3}}} = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k\pi}} e^{-\frac{1}{8k}+\frac{\theta''}{k^3}},$$

$\theta$ et $\theta'$ étant compris entre 0 et 1, et, par suite, $\theta''$ entre $-\frac{1}{2880}$ et $\frac{1}{180}$; nous obtenons ainsi les deux relations

$$0 = \frac{\delta \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k+\frac{3}{2}} + \frac{\delta \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{8\left(2k+\frac{3}{2}\right)^2} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{\left(2k+\frac{3}{2}\right)^3} + \frac{q}{\left(2k+\frac{3}{2}\right)^3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k\pi}} e^{-\frac{1}{8k}+\frac{\theta''}{k^3}}$$

$$= \frac{\delta \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k+\frac{1}{2}} - \frac{\delta \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{8\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{q}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^3},$$

dans lesquelles $p$ et $q$ n'ont pas la même signification que dans l'égalité (4), et représentent, comme dans tout ce qui va suivre, deux nombres fonctions de $k$ seulement qui restent, quel que soit $k$, au-dessous d'une certaine limite fixe. Ordonnant les seconds membres par rapport aux puissances croissantes de $\frac{1}{k}$, groupant, dans $\frac{p\delta}{k^3}$ et $\frac{q}{k^3}$, tous les termes de même forme, et posant, pour simplifier,

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} = a,$$

ces égalités deviennent

$$(a)\quad 0 = \frac{\delta \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k} - \frac{\delta}{8k^2}\left[3\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right) - \frac{a}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\right] + \frac{p\delta}{k^3} + \frac{q}{k^3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k\pi}} e^{-\frac{1}{8k}+\frac{\theta''}{k^3}}$$

$$= \frac{\delta\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k} - \frac{\delta}{8k^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right) + \frac{a}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\right] + \frac{p\delta}{k^3} + \frac{q}{k^3},$$

d'où, en faisant la somme membre à membre de leurs carrés et simplifiant,

$$\frac{1}{k\pi} e^{-\frac{1}{4k}+\frac{2\theta''}{k^3}} = \frac{\delta^2}{4k^2} - \frac{\delta^2}{8k^3}(2+\sin 2\varepsilon) + \frac{p\delta^2}{k^4} + \frac{q\delta}{k^4} + \frac{r}{k^6},$$

ou mieux,

$$(b)\quad \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4k^2\pi} + \frac{1}{32k^3\pi} = \frac{\delta^2}{4k^2} - \frac{\delta^2}{8k^3}(2+\sin 2\varepsilon) + \frac{p\delta^2}{k^4} + \frac{q\delta}{k^4} + \frac{r}{k^4}.$$

$r$ étant un nombre de même nature que $p$ et $q$, toujours fini, quel que soit $k$.

L'égalité $(b)$ montre facilement que $\delta$ est de la forme $2\sqrt{\frac{k}{\pi}}(1+\zeta)$, $\zeta$ s'annulant avec $\frac{1}{k}$, puis l'égalité $(a)$ que $\varepsilon = -\frac{\pi}{4}+\eta$, $\eta$ s'annulant aussi avec $\frac{1}{k}$. Reste donc à trouver $\zeta$ et $\eta$; or, à cause des valeurs précédentes de $\delta$ et de $\varepsilon$, les égalités $(a)$ et $(b)$ peuvent se simplifier et s'écrire ainsi :

$$(a')\qquad 0 = \sin\eta - \frac{1}{4k}\left(3\sin\eta - \frac{a}{4}\cos\eta\right) + \frac{p}{k^2},$$

$$(b')\qquad \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4k^2\pi} = \frac{\delta^2}{4k^2} - \frac{\delta^2}{8k^3}(2-\cos 2\eta) + \frac{p}{k^3}.$$

L'égalité $(a')$ ne contenant que $\eta$, fait connaître cette inconnue; on peut d'abord la mettre sous la forme

$$\left(1-\frac{3}{4k}\right)\operatorname{tang}\eta+\frac{a}{16k}+\frac{p}{k^2}=0,$$

et de là on tire

$$\operatorname{tang}\eta=-\frac{a}{16k}+\frac{p}{k^2},$$

par conséquent,

$$\eta=-\frac{a}{16k}+\frac{p}{k^2}.$$

L'égalité $(b')$, qui peut, à cause de la valeur de $\eta$, s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{k\pi}-\frac{1}{4k^2\pi}=\frac{\delta^2}{4k^2}-\frac{\delta^2}{8k^3}+\frac{p}{k^3},$$

donne ensuite

$$\delta^2=\frac{\frac{1}{k\pi}-\frac{1}{4k^2\pi}-\frac{p}{k^3}}{\frac{1}{4k^2}-\frac{1}{8k^3}}=\frac{4k}{\pi}+\frac{1}{\pi}+\frac{p}{k},$$

d'où

$$\delta=2\sqrt{\frac{k}{\pi}}+\frac{1}{4\sqrt{k\pi}}+\frac{p}{k\sqrt{k}}.$$

Ainsi les constantes $\delta$ et $\varepsilon$ ont respectivement pour valeur,

$$\delta=2\sqrt{\frac{k}{\pi}}+\frac{1}{4\sqrt{k\pi}}+\frac{p}{k\sqrt{k}},$$
$$\varepsilon=-\frac{\pi}{4}-\frac{a}{16k}+\frac{q}{k^2},$$

$p$ et $q$ étant des fonctions de $k$ jouissant de la propriété de ne pas pouvoir dépasser une certaine limite fixe.

Dans les valeurs précédentes de $\delta$ et de $\varepsilon$, $k$ représente la moitié de l'indice $n$ de $X_n$ quand cet indice est pair, ou la moitié de l'indice diminuée de $\frac{1}{2}$ quand cet indice est impair; or il convient d'introduire l'indice lui-même dans les valeurs de $\delta$ et de $\varepsilon$; faisant la substitution, on trouve facilement

$$\delta = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \pm \frac{1}{2\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n\sqrt{n}}, \qquad \varepsilon = -\frac{\pi}{4} - \frac{a}{8n} + \frac{q}{n^2},$$

le signe $+$ du second terme de $\delta$ convenant au cas de $n$ pair, et le signe $-$ au cas de $n$ impair.

Reprenons la valeur de $u$ fournie par l'équation (4), et écrivons-la comme il suit :

$$u = \frac{\delta \cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon\right)}{n} - \frac{\delta \cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon\right)}{2n^2}$$
$$- \frac{\delta}{8n^2} \sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon\right) \int_\alpha^\gamma \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{n^3} + \frac{q}{n^3},$$

en ordonnant par rapport aux puissances de $\frac{1}{n}$; puis remplaçons $\delta$ et $\varepsilon$ par leurs valeurs précédemment obtenues, il viendra

$$u = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi}} + (-1)^n \frac{\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}}$$
$$+ \frac{\left(a - \int_\alpha^\gamma \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\right) \sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

$p$ étant maintenant une fonction de $\gamma$, quoique jouissant toujours de la même propriété; ou mieux

$$u = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi}} + (-1)^n \frac{\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}}$$
$$+ \frac{\cot\gamma \sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

en se rappelant les valeurs de $a$ et de $\int_\alpha^\gamma \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'}$.

Divisant enfin par $\sin^{\frac{1}{2}}\gamma$, afin d'avoir $X_n$, on trouve

$$X_n = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + (-1)^n \frac{\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}}$$
$$+ \frac{\cot\gamma\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

comme il fallait le démontrer.

## § II.

### *Propriétés des fonctions* $Y_n$.

Si, dans l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, on suppose

$$x = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'),$$

le coefficient de $\alpha^n$, qui jusqu'ici a été désigné par $X_n$, deviendra ce qu'on appelle habituellement $P_n$.

THÉORÈME I. *La fonction* $P_n$ *satisfait à l'équation aux différences partielles*

$$(1) \qquad \frac{d\left(\sin\theta\frac{dP_n}{d\theta}\right)}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2P_n}{d\varphi^2} + n(n+1)P_n = 0.$$

*Remarque.* $P_n$ n'est pas la seule fonction entière des trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, qui vérifie l'équation (1); on donnera plus bas, théorème IV, la forme générale des fonctions qui jouissent de cette double propriété, et que l'on appelle fonctions $Y_n$.

THÉORÈME II. *On a*

$$P_n = X_n X'_n + \frac{2\Pi(n-1)}{\Pi(n+1)}\sin\theta\sin\theta'\frac{dX_n}{dx}\frac{dX'_n}{dx'}\cos(\varphi - \varphi')$$
$$+ \frac{2\Pi(n-2)}{\Pi(n+2)}\sin^2\theta\sin^2\theta'\frac{d^2X_n}{dx^2}\frac{d^2X'_n}{dx'^2}\cos 2(\varphi - \varphi') + \ldots,$$

$\Pi(k)$ *représentant en général le produit* $1.2.3\ldots k$, *et* $X_n$ *et* $X'_n$ *étant* *les coefficients de* $\alpha^n$ *dans les développements de* $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, *et de* $(1 - 2\alpha x' + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, *où l'on fait d'ailleurs*

$$x = \cos\theta, \quad x' = \cos\theta'.$$

Théorème III. *On a*

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{P}_n \, d\varphi = 2\pi \mathrm{X}_n \mathrm{X}'_n,$$

$\mathrm{X}_n$ *et* $\mathrm{X}'_n$ *ayant la même signification que dans le théorème précédent.*

Théorème IV. *On a*

$$\mathrm{Y}_n = a\mathrm{X}_n + (b'\cos\varphi + c'\sin\varphi)\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}\sin\theta$$
$$+ (b''\cos 2\varphi + c''\sin 2\varphi)\frac{d^2\mathrm{X}_n}{dx^2}\sin^2\theta + \ldots,$$

$\mathrm{X}_n$ *étant toujours le coefficient de* $\alpha^n$ *dans le développement de* $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ *où l'on suppose*

$$x = \cos\theta,$$

*et* $a, b', c', b'', c'', \ldots$ *représentant des constantes quelconques par rapport à* $\theta$ *et à* $\varphi$.

Théorème V. *On a, m et n étant différents,*

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{Y}_m \mathrm{Y}_n \sin\theta \, d\theta = 0.$$

Théorème VI. *On a*

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{Y}_n \mathrm{P}_n \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{2n+1}\mathrm{Y}'_n,$$

*en appelant* $\mathrm{Y}'_n$ *ce que devient* $\mathrm{Y}_n$ *quand on y fait*

$$\theta = \theta' \quad et \quad \varphi = \varphi'.$$

Théorème VII. *On a*

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{P}_n^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

## § III.

*Développement des fonctions de deux angles en séries ordonnées suivant les fonctions* $Y_n$.

1. La formule qui sert à développer toute fonction de deux angles $\theta$ et $\varphi$ en série ordonnée suivant les fonctions $Y_n$ est exprimée par l'égalité suivante,

$$(a)\quad f(\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\int_0^{\pi}\sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi}P_n f(\theta',\varphi')\,d\varphi'.$$

Cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $\theta$ et de $\varphi$ comprises entre les limites $\theta=0$ et $\theta=\pi$, $\varphi=0$ et $\varphi=2\pi$, et la fonction $f(\theta,\varphi)$ dont elle donne le développement, n'est assujettie qu'à la seule condition de ne pas devenir infinie. Quand le système de valeurs attribuées à $\theta$ et $\varphi$ rend $f(\theta,\varphi)$ discontinue, le premier membre, qui n'a plus alors aucun sens précis, doit être remplacé par la valeur moyenne de la fonction $f(\theta,\varphi)$ répondant au système des valeurs de $\theta$ et de $\varphi$ considérées. Voici, d'ailleurs, ce que l'on entend par valeur moyenne d'une fonction pour un système de valeurs des variables, rendant cette fonction discontinue. Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires et regardons, pour plus de commodité, $\theta$ comme l'angle inférieur à $\pi$ que forme une certaine droite OA issue de l'origine avec l'axe OZ, et $\varphi$ comme l'angle positif que fait le plan de OA et de OZ avec le plan ZOX, de manière qu'à chaque système de valeurs de $\theta$ et de $\varphi$ réponde une et une seule droite issue de l'origine; ou mieux, en représentant ces droites par leur point de rencontre avec une sphère S de rayon 1 et ayant le point O pour centre, un et un seul point de la sphère S. Ceci admis, supposons la fonction $f(\theta,\varphi)$ discontinue pour un système de valeurs de $\theta$ et $\varphi$ répondant à un certain point A de la sphère S; on devra en conclure que la limite vers laquelle tend $f(\theta,\varphi)$, à mesure qu'on s'approche indéfiniment du point A en suivant une certaine ligne tracée sur la surface S et issue du point A, est variable avec la position de cette ligne qu'on peut supposer être un grand cercle dans le voisinage du point A; or, appelons $\omega$ l'angle variable qu'un arc de grand cercle quelconque AM, issu du point A, fait avec un autre arc de grand cercle fixe AB, issu du même point, et soit $F(\omega)$ la limite vers laquelle tend la fonction $f(\theta, \varphi)$, quand on s'approche du point A en suivant la ligne MA; l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega)\, d\omega$$

sera la valeur moyenne de la fonction $f(\theta, \varphi)$ relative au point A.

Il est presque inutile de dire que lorsque $f(\theta, \varphi)$ n'est pas discontinue pour le point A, il y a égalité entre la valeur moyenne et la valeur propre de la fonction en ce point.

**2**. Pour démontrer l'égalité $(a)$, nous chercherons à sommer la série

$$(b) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi')\, d\varphi';$$

à cet effet, nous considérerons d'abord la série

$$(c) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\,\alpha^n \int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi')\, d\varphi',$$

que l'on obtient en multipliant les différents termes de la précédente par les puissances successives d'un nombre $\alpha$ positif et moindre que 1; puis, ayant obtenu la somme de cette série, nous déterminerons la limite vers laquelle elle tend à mesure que $\alpha$ s'approche indéfiniment de 1; cette limite sera la somme de la série $(b)$ si toutefois cette dernière série est convergente, comme cela résulte d'un théorème connu dû à Abel.

**3**. Posons

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi') = \cos\gamma$$

et

$$(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = V;$$

nous aurons, pour toutes les valeurs de $\alpha$ moindres que 1,

$$V = P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \ldots + P_n\alpha^n + \ldots;$$

de là on déduit aisément

$$V + 2\alpha \frac{dV}{d\alpha} = \frac{1-\alpha^2}{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= P_0 + 3P_1\alpha + 5P_2\alpha^2 + \ldots + (2n+1)P_n\alpha^n + \ldots,$$

égalité qui subsiste aussi pour toutes les valeurs de $\alpha$ moindres que 1.

Multipliant les deux membres par $f(\theta', \varphi')\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'$, et intégrant par rapport à $\theta'$ de 0 à $\pi$, et par rapport à $\varphi'$ de 0 à $2\pi$, il vient

$$(1-\alpha^2)\int_0^\pi \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta', \varphi')\, d\varphi'}{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\alpha^n \int_0^\pi \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi')\, d\varphi',$$

ce qui déjà nous fait connaître la somme de la série $(c)$.

**4.** Déterminons, en second lieu, la limite vers laquelle tend l'intégrale

$$(d) \qquad (1-\alpha^2)\int_0^\pi \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta', \varphi')\, d\varphi'}{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

à mesure que $\alpha$ s'approche indéfiniment de 1, en lui restant constamment moindre. Reprenons la sphère S, appelons $d\sigma'$ l'élément de cette sphère qui répond au point M pour lequel

$$\mathrm{ZOM} = \theta' \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\mathrm{ZOM}, \mathrm{ZOX}}\right) = \varphi';$$

si N représente le point pour lequel

$$\mathrm{ON} = \alpha, \quad \mathrm{ZON} = \theta, \quad \left(\widehat{\mathrm{ZON}, \mathrm{ZOX}}\right) = \varphi,$$

et que A soit le point de la sphère S situé à l'extrémité du rayon ON, nous pourrons mettre l'intégrale $(d)$ sous la forme

$$(e) \qquad (1+\alpha)\,\mathrm{AN}\int\int \frac{f(\theta', \varphi')\, d\sigma'}{\overline{\mathrm{MN}}^3}.$$

Cette nouvelle intégrale est étendue à tous les éléments de la sphère S; mais, comme il ne s'agit ici que de trouver la limite vers laquelle elle tend à mesure que $\alpha$ s'approche de 1, ou à mesure que le point N s'approche du point A, on peut évidemment se contenter de l'étendre à la portion de la sphère comprise dans un contour quelconque comprenant le point A, car l'autre partie de l'intégrale aura toujours zéro pour limite. Prenons donc pour définir les limites de l'intégrale un petit cercle ayant le point A pour pôle et supposons son rayon sphérique assez petit pour que, dans l'intérieur de ce cercle, il n'y ait pas d'autres points que le point A dont les coordonnées $\theta$ et $\varphi$ puissent rendre discontinue la fonction $f(\theta, \varphi)$. On comprendra facilement que cette dernière condition peut toujours être remplie, en remarquant que les solutions de continuité de $f(\theta, \varphi)$ ne correspondent qu'à des points isolés et en nombre fini de la sphère S, et que cette fonction ne saurait être discontinue pour tous les points d'une ligne tracée sur la surface S, sans quoi la formule que nous nous proposons d'établir pourrait cesser d'être exacte. Ceci posé, transformons encore l'intégrale $(e)$. Appelons $\gamma$ l'angle MOA et $\omega$ l'angle que le plan MOA fait avec un plan fixe conduit suivant OA, le plan ZOA par exemple. En supposant à l'élément $d\sigma'$ une forme convenable, nous pourrons le considérer comme égal à $\sin\gamma d\gamma d\omega$, et si nous appelons $f_1(\gamma, \omega)$ la fonction $f(\theta, \varphi)$ exprimée en $\gamma$ et $\omega$, notre intégrale deviendra

$$(1+\alpha)\,\mathrm{AN}\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\gamma'} \frac{f_1(\gamma,\omega)\sin\gamma\, d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2 - 2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$\gamma'$ étant le rayon sphérique du contour qui détermine les limites de l'intégrale.

5. Occupons-nous de l'intégrale simple

$$\mathrm{AN}\int_0^{\gamma'} \frac{f_1(\gamma,\omega)\sin\gamma\, d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2 - 2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Intégrons par parties, ce qui est permis ici, puisque $f_1(\gamma, \omega)$ est continue entre les limites de l'intégration; il viendra

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}\frac{f_1(\gamma,\omega)}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_{\gamma=0}-\left[\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}\frac{f_1(\gamma,\omega)}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_{\gamma=\gamma'}\\&\qquad+\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}\int_0^{\gamma'}\frac{\frac{df_1}{d\gamma}d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}\right.$$

Le premier terme de cette somme est égal à $\frac{f_1(0,\omega)}{\mathrm{ON}}$, et se réduit à $f_1(0,\omega)$ quand le point N coïncide avec le point A; le second a évidemment zéro pour limite. Passons au troisième

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}\int_0^{\gamma'}\frac{\frac{df_1}{d\gamma}d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

La fonction $\frac{df_1}{d\gamma}$, qui entre sous le signe $\int$ dans cette intégrale, peut présenter, entre les limites $0$ et $\gamma'$ de l'intégration, un certain nombre de changements de signes; toutefois, ce nombre doit être fini, sans quoi la fonction $f_1(\gamma,\omega)$ aurait, dans le voisinage du point A, un nombre infini de maxima ou minima, hypothèse qu'il faut nécessairement écarter. Décomposons l'intégrale en une série d'autres, de telle sorte qu'entre les limites de chacune, la fonction $\frac{df_1}{d\gamma}$ ait constamment le même signe; et soit

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}\int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}}\frac{\frac{df_1}{d\gamma}d\gamma}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}$$

l'une de ces nouvelles intégrales; comme $\frac{\mathrm{AN}}{\left(1+\overline{\mathrm{ON}}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}$ est au plus égal à $1$ et que $\frac{df_1}{d\gamma}$ a constamment le même signe de $\gamma_k$ à $\gamma_{k+1}$, cette intégrale a une valeur absolue moindre que celle de la différence

$$\frac{1}{\mathrm{ON}}[f_1(\gamma_{k+1}, \omega) - f_1(\gamma_k, \omega)],$$

et, par conséquent, aussi petite que l'on veut; car $f_1(\gamma, \omega)$ est une fonction continue de $\gamma$, et les deux valeurs $\gamma_k$, $\gamma_{k+1}$ de $\gamma$ ont une différence aussi petite que l'on veut, puisqu'elles sont toutes deux moindres que $\gamma'$, qui peut être supposé aussi petit que l'on veut; on a ainsi, pour le troisième terme de la somme $(f)$, un nombre fini de quantités aussi petites que l'on veut, et, par conséquent, une quantité aussi petite que l'on veut; de là nous pouvons conclure que la limite vers laquelle tend l'intégrale simple

$$\mathrm{AN}\int_0^{\gamma'} \frac{f_1(\gamma, \omega)\sin\gamma\, d\gamma}{(1+\overline{\mathrm{ON}}^2 - 2\,\mathrm{ON}\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

est égale à $f_1(0, \omega)$, et, par conséquent, que celle vers laquelle tend l'intégrale double

$$(1+\alpha)\,\mathrm{AN}\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\gamma'} \frac{f_1(\gamma, \omega)\sin\gamma\, d\gamma}{(1+\overline{\mathrm{ON}}^2 - 2\,\mathrm{ON}\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

est

$$2\int_0^{2\pi} f_1(0, \omega)\, d\omega,$$

c'est-à-dire le produit par $4\pi$ de la valeur moyenne de $f(\theta, \varphi)$ au point A.

6. Il nous reste, et c'est là la principale difficulté de la question, à démontrer la convergence de la série $(b)$. Transformons d'abord le terme général

$$(2n+1)\int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} \mathrm{P}_n f(\theta', \varphi')\, d\varphi'$$

de cette série, en substituant aux variables $\theta'$ et $\varphi'$ les variables $\gamma$ et $\omega$, dont nous avons fait usage précédemment; il viendra, en observant que $\mathrm{P}_n$ s'exprime au moyen de $\gamma$ seulement,

$$(2n+1)\int_0^{\pi} \mathrm{P}_n \sin\gamma\, d\gamma \int_0^{2\pi} f_1(\gamma, \omega)\, d\omega,$$

ou bien

$$(g) \qquad (2n+1)\int_0^{\pi} P_n F(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma,$$

en posant, pour simplifier,

$$\int_0^{2\pi} f_1(\gamma, \omega)\, d\omega = F(\gamma).$$

Faisons encore $\cos\gamma = x$; $P_n$ deviendra $X_n$, et si nous appelons $\varphi(x)$ ce que devient $F(\gamma)$, nous aurons

$$(g') \qquad (2n+1)\int_{-1}^{+1} X_n \varphi(x)\, dx$$

comme seconde valeur du terme général de la série, qui, dans ce qui va suivre, sera employé concurremment avec la valeur $(g)$.

**7.** Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de signaler une propriété très-importante des fonctions $F(\gamma)$ et $\varphi(x)$ : ces deux fonctions, qui peuvent présenter un nombre fini quelconque de solutions de continuité entre les limites $0$ et $\pi$, $-1$ et $+1$ des intégrales où elles entrent, ne peuvent jamais être discontinues pour ces limites mêmes. Ainsi, par exemple, $F(\gamma)$ ne saurait être discontinue pour

$$\gamma = 0.$$

En effet, remarquons que $F(0)$ est égal à $\int_0^{2\pi} f_1(0, \omega)\, d\omega$, c'est-à-dire au produit par $2\pi$ de la valeur moyenne de $f_1(\gamma, \omega)$ pour le point A; or on peut évidemment toujours tracer autour d'un point A un cercle assez petit pour que, dans son intérieur, il n'y ait pas d'autre discontinuité de la fonction $f_1(\gamma, \omega)$ que celle qui peut avoir lieu au point A; on en déduit qu'en prenant $\gamma$ suffisamment petit, $f_1(\gamma, \omega)$ est aussi près que l'on veut de $f_1(0, \omega)$, quel que soit d'ailleurs $\omega$; par suite, que $\int_0^{2\pi} f_1(\gamma, \omega)\, d\omega$ est aussi près que l'on veut de $\int_0^{2\pi} f_1(0, \omega)\, d\omega$.

**8.** Cette propriété étant admise, appelons $\varepsilon$ un nombre déterminé assez petit pour que, entre $-1$ et $-1+\varepsilon$ et entre $1-\varepsilon$ et $1$, il n'y ait aucune solution de continuité de la fonction $\varphi(x)$; nous pourrons décomposer l'intégrale $(g')$ de la manière suivante :

$$(2n+1)\int_{-1}^{-1+\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx + (2n+1)\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx$$
$$+ (2n+1)\int_{1-\varepsilon}^{1} X_n \varphi(x)\,dx,$$

et tout consistera à prouver que les trois séries ayant pour termes généraux respectifs les termes de la somme précédente sont convergentes, ou plus simplement, d'après un théorème d'Abel, que les trois séries

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{-1}^{-1+\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx,$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx,$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{1-\varepsilon}^{1} X_n \varphi(x)\,dx,$$

le sont.

**9.** Considérons d'abord la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{-1}^{-1+\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx;$$

en nous rappelant que $X_n$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d(1-x^2)\dfrac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

nous pouvons mettre le terme général de notre série sous la forme

$$-\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{-1+\varepsilon} \varphi(x)\frac{d(1-x^2)\dfrac{dX_n}{dx}}{dx}\,dx.$$

Intégrant par parties, ce qui est permis ici, puisque $\varphi(x)$ est continue entre $-1$ et $-1+\varepsilon$, on a

$$-\frac{\left[\varphi(x)(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\right]_{x=-1+\varepsilon}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\varphi'(x)(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}dx.$$

Or,

$$\frac{1}{n+1}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}=x\,X_n-X_{n+1},$$

d'après le théorème X du § I[er]; d'ailleurs la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(x\,X_n-X_{n+1})_{x=-1+\varepsilon}$$

est convergente; donc déjà la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\left[\varphi(x)(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\right]_{x=-1+\varepsilon}}{n+1}$$

est convergente, et il suffit de démontrer que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\varphi'(x)(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}dx,$$

ou

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\varphi'(x)(x\,X_n-X_{n+1})\,dx,$$

l'est aussi. Pour cela, remarquons que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(x\,X_n-X_{n+1}),$$

qui est convergente, avons-nous dit, pour $x=-1+\varepsilon$, l'est aussi pour $x=-1$. En effet, ses différents termes se réduisent à zéro pour cette hypothèse; il est donc possible de fixer un nombre A que ne dépasse jamais, en valeur absolue, la somme

$$\sum_{n=0}^{n=n}(x\,X_n-X_{n+1}),$$

quel que soit $n$ et quel que soit $x$ de $-1$ à $-1+\varepsilon$. Cela étant, on voit aisément que l'intégrale

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon} \varphi'(x) \sum_{n=0}^{n=n} (x X_n - X_{n+1})\, dx$$

est, quel que soit $n$, aussi près que l'on veut de zéro, en ayant soin de prendre $\varepsilon$ suffisamment petit [il faut pourtant que $\varphi'(x)$ ne change de signe, ou que $\varphi(x)$ ne devienne *maximum* ou *minimum*, qu'un nombre fini de fois entre $-1$ et $-1+\varepsilon$]; il suffit de décomposer cette intégrale en une série d'autres, de façon qu'entre les limites de chacune, $\varphi'(x)$ ait toujours le même signe, puis d'observer que chacune de ces intégrales partielles est, en valeur absolue, moindre que A multiplié par la différence positive des valeurs que prend $\varphi(x)$ lorsqu'on remplace $x$ par les deux limites de l'intégrale.

**10.** Il ne sera pas inutile, pour lever toutes les difficultés, de montrer comment on peut trouver une valeur de A, ce qui nous permettra en même temps d'établir la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (x X_n - X_{n+1}),$$

que nous avons admise un peu plus haut. Rétablissons $\cos\gamma$ à la place de $x$, et $P_n$ à la place de $X_n$.

On sait que l'on a (théorème IV, § I^er^)

$$P_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega)^n d\omega;$$

d'où l'on tire, en posant, pour simplifier, $\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega = z$,

$$\sum_{n=0}^{n=n-1} P_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-z^n}{1-z}\, d\omega,$$

$$\sum_{n=0}^{n=n-1} P_{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (z + z^2 + \ldots + z^n)\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{z(1-z^n)}{1-z}\, d\omega,$$

et

$$\sum_{n=0}^{n=n-1}(\cos\gamma\,P_n - P_{n+1}) = \frac{-i}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\gamma\,(1-z^n)}{1-z}\cos\omega\,d\omega$$

$$= -\frac{i\sin\gamma}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\omega\,d\omega}{1-\cos\gamma - i\sin\gamma\cos\omega} + \frac{i\sin\gamma}{\pi}\int_0^\pi \frac{(\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega)^n\cos\omega\,d\omega}{1-\cos\gamma - i\sin\gamma\cos\omega}.$$

Ne prenons que les parties réelles de ces intégrales, car la somme de leurs parties imaginaires est évidemment nulle; nous trouverons, en considérant d'abord la première intégrale,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2\gamma\cos^2\omega\,d\omega}{(1-\cos\gamma)^2 + \sin^2\gamma\cos^2\omega},$$

ou bien, excluant le cas de $\gamma = 0$, pour lequel, du reste, la somme

$$\sum_{n=0}^{n=n-1}(\cos\gamma\,P_n - P_{n+1})$$

est nulle,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\omega\,d\omega}{\sin^2\frac{\gamma}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\omega};$$

divisant, sous le signe $\int$, par $\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^4\omega$, ce qui exige qu'on laisse encore de côté le cas de $\gamma = \pi$, pour lequel on a aussi

$$\sum_{n=0}^{n=n-1}(\cos\gamma\,P_n - P_{n+1}) = 0,$$

il vient

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\mathrm{tang}\,\omega}{(1+\mathrm{tang}^2\omega)\left(1+\mathrm{tang}^2\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tang}^2\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tang}^2\omega\right)} = 1 - \sin\frac{1}{2}\gamma.$$

Ainsi, la partie réelle de la première intégrale est toujours moindre que 1.

Occupons-nous de la seconde intégrale

$$\frac{i \sin \gamma}{\pi} \int_0^\pi \frac{(\cos \gamma + i \sin \gamma \cos \omega)^n \cos \omega \, d\omega}{(1 - \cos \gamma - i \sin \gamma \cos \omega)} :$$

il est évident que le module de $(\cos \gamma + i \sin \gamma \cos \omega)^n$ est au plus égal à 1 : donc la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression sont, aussi séparément, au plus égales à 1, en valeur absolue; cela montre que la valeur absolue de la partie réelle de l'intégrale précédente est au plus égale à

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma \cos^2 \omega \, d\omega}{(1 - \cos \gamma)^2 + \sin^2 \gamma \cos^2 \omega} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \gamma (1 - \cos \gamma) \cos \omega \, d\omega}{(1 - \cos \gamma)^2 + \sin^2 \gamma \cos^2 \omega}.$$

Mais la première de ces intégrales est moindre que 1, comme on l'a déjà vu; quant à la seconde, en excluant les cas de $\gamma = 0$ et de $\gamma = \pi$, on la ramène à celle-ci :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma \cos \omega \, d\omega}{\sin^2 \frac{1}{2} \gamma + \cos^2 \frac{1}{2} \gamma \cos^2 \omega} = \frac{4}{\pi} \cos^2 \frac{1}{4} \gamma \operatorname{tang} \frac{1}{4} \gamma \log \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{4} \gamma} :$$

mais, $\gamma$ variant de 0 à $\pi$ ou $\operatorname{tang} \frac{1}{4} \gamma$ de 0 à 1, le *maximum* de $\operatorname{tang} \frac{1}{4} \gamma \log \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{4} \gamma}$ est $\frac{1}{e}$ : cela prouve que l'intégrale considérée est moindre que $\frac{4}{\pi e} < 1$. Ainsi, on a une valeur pour A, en prenant $1 + 1 + 1$ ou 3.

**11.** Il est démontré, par ce qui précède, que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n \int_{-1}^{-1+\varepsilon} X_n \varphi(x) \, dx$$

est convergente. On établirait de même la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n \int_{1-\varepsilon}^{1} X_n \varphi(x) \, dx.$$

Il ne nous reste donc à considérer que celle qui a pour terme général

$$n\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n\,\varphi(x)\,dx,$$

ou, en rétablissant $\gamma$ à la place de $x$,

$$n\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} F(\gamma)\,P_n \sin\gamma\,d\gamma,$$

$\alpha$ étant un nombre déterminé, positif, mais aussi voisin que l'on veut de zéro.

**12.** Remplaçons $P_n$, qui ne diffère de $X_n$ que par l'échange de $x$ en $\cos\gamma$, par la valeur fournie par le théorème XI du § I<sup>er</sup>; on reconnaîtra aisément que la question se ramène à démontrer la convergence des séries

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\cos n\gamma\sin\gamma\,\operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\sin n\gamma\sin\gamma\,\operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\gamma\cos\gamma\,\operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin n\gamma\cos\gamma\,\operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{n\sqrt{n}}\,p\sin\gamma\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

où les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de $n$, et celle des séries

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\gamma\sin\gamma\,\operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin n\gamma\sin\gamma\,\operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

où les sommes s'étendent successivement à toutes les valeurs paires et à toutes les valeurs impaires de $n$. D'abord il est inutile de s'occuper de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} p\sin\gamma\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

puisque la série $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente, et que la fonction $p \sin\gamma \mathrm{F}(\gamma)$ reste toujours finie entre les limites de l'intégration; quant aux autres, je dis qu'il suffira de faire voir que les deux séries

$$\sum \int_\alpha^\beta \sqrt{n} \cos n\gamma \Phi(\gamma)\, d\gamma, \qquad \sum \int_\alpha^\beta \sqrt{n} \sin n\gamma \Phi(\gamma)\, d\gamma,$$

où les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de $n$, et où $\Phi(\gamma)$ désigne une fonction ou un produit de fonctions indépendantes de $n$, ne devenant jamais infinies entre $\alpha$ et $\beta$, et ne présentant entre ces limites qu'un nombre fini de maxima ou minima, sont convergentes.

Supposons, en effet, ce point établi; il en résultera que les séries

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \sin n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

où les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de $n$, sont convergentes, et, par conséquent, d'après le théorème d'Abel, déjà employé, que les suivantes :

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \gamma \mathrm{F}(\gamma)\, d\gamma,$$

où les sommes s'étendent également à toutes les valeurs entières de $n$, le sont aussi; d'un autre côté, il est facile de démontrer que si des séries de la forme

$$\sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}} \Phi(\gamma)\, d\gamma, \quad \sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin n\gamma}{\sqrt{n}} \Phi(\gamma)\, d\gamma,$$

où $\Phi(\gamma)$ représente une fonction ou un produit de fonctions indépendantes de $n$ et toujours finies entre $\alpha$ et $\beta$, sont convergentes quand on étend les sommes à toutes les valeurs entières de $n$, il en est de même lorsqu'on n'étend ces sommes qu'aux valeurs paires ou impaires. En effet, supposons que $n$ doive toujours être pair dans la première somme par exemple, nous pourrons la mettre sous la forme

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma,$$

le signe s'étendant à toutes les valeurs entières de $n$, et cette série étant convergente, il en sera de même de la première; si $n$ doit toujours être impair, nous pourrons mettre la même somme sous la forme

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma,$$

puis sous celle-ci,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{\cos n\gamma \cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{n}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{\sin n\gamma \sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{n}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma + \sum \int_{2\alpha}^{2\beta} \frac{p\, d\gamma}{n\sqrt{n}},$$

toutes ces nouvelles sommes s'étendant aux valeurs paires et impaires de $n$, et $p$ représentant une fonction de $\gamma$ et de $n$, toujours au-dessous d'une certaine limite. Or les trois dernières séries sont convergentes, il en est donc de même de la série proposée. On voit par là que les séries

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi - \alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \sin \gamma \operatorname{tang}^{\pm \frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \, F(\gamma) \, d\gamma,$$

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi - \alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \sin \gamma \operatorname{tang}^{\pm \frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} \, F(\gamma) \, d\gamma,$$

où les sommes s'étendent tantôt aux valeurs paires, tantôt aux valeurs impaires de $n$, seront convergentes, s'il en est ainsi lorsque les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de $n$. Ainsi, comme on l'avait énoncé, tout se réduit à établir la convergence des séries

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{\alpha}^{\pi - \alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \, \Phi(\gamma) \, d\gamma, \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{\alpha}^{\pi - \alpha} \sqrt{n} \sin n\gamma \, \Phi(\gamma) \, d\gamma,$$

où $\Phi(\gamma)$ représente, nous le répétons, une fonction ou un produit de fonctions, indépendantes de $n$, ne devenant jamais infinies entre $\alpha$ et $\pi - \alpha$, et ne présentant entre ces limites qu'un nombre fini de maxima et minima. Nous allons, pour cela, évaluer d'abord les deux sommes

$$\sum_{n=1}^{n=n} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{n=n} \frac{\sin n\gamma}{\sqrt{n}}.$$

**13.** Or on a

$$\frac{1}{\Gamma \frac{1}{2}} \int_0^1 x^{n-1} \log^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma \frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x}\right) \left(e^{\gamma\sqrt{-1}} + x e^{2\gamma\sqrt{-1}} + x^2 e^{3\gamma\sqrt{-1}} + \ldots + x^{n-1} e^{n\gamma\sqrt{-1}}\right) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{n=n} \frac{e^{n\gamma\sqrt{-1}}}{\sqrt{n}};$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{n=n} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\cos\gamma - x - x^n\cos(n+1)\gamma + x^{n+1}\cos n\gamma}{1 + x^2 - 2x\cos\gamma}\, dx,$$

$$\sum_{n=1}^{n=n} \frac{\sin n\gamma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\sin\gamma - x^n\sin(n+1)\gamma + x^{n+1}\sin n\gamma}{1 + x^2 - 2x\cos\gamma}\, dx:$$

différentiant par rapport à $\gamma$, et ne développant les calculs que pour les termes dépendants de $n$, il vient

$$\sum_{n=1}^{n=n} \sqrt{n}\sin n\gamma = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2x^{n+2}\sin\gamma\cos n\gamma - 2x^{n+1}\sin\gamma\cos(n+1)\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)^2}\, dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-(n+1)x^n\sin(n+1)\gamma + nx^{n+1}\sin n\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)}\, dx + k,$$

$$\sum_{n=1}^{n=n} \sqrt{n}\cos n\gamma = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2x^{n+1}\sin\gamma\sin(n+1)\gamma - 2x^{n+2}\sin\gamma\sin n\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)^2}\, dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-(n+1)x^n\cos(n+1)\gamma + nx^{n+1}\cos n\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)}\, dx + k';$$

$k$ et $k'$ représentant des fonctions de $\gamma$ indépendantes de $n$ et jouissant de la propriété de rester au-dessous d'une limite fixe, lorsque $\gamma$ varie de $\alpha$ à $\pi - \alpha$.

Actuellement on peut remarquer que puisque, en général,

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) x^{p-1}\, dx = \frac{1}{\sqrt{p}},$$

on a aussi

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}}\int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^2-2x\cos\gamma}=\frac{M}{\sqrt{p}};$$

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}}\int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x^2-2x\cos\gamma)^2}=\frac{N}{\sqrt{p}},$$

M et N étant des fonctions de $p$ et de $\gamma$ qui, pour toutes les valeurs de $p$ et pour les valeurs de $\gamma$ comprises entre $\alpha$ et $\pi-\alpha$, restent au-dessous d'une certaine limite fixe, et qui jouissent en outre de la propriété de constamment décroître, lorsqu'après avoir fixé $p$ on fait croître $\gamma$ de $\alpha$ à $\pi-\alpha$; d'après cela, les formules ci-dessus deviennent

$$\sum_{n=1}^{n=n}\sqrt{n}\cos n\gamma=\frac{M(n+1)\cos(n+1)\gamma}{\sqrt{n+1}}+\frac{M_1 n\cos n\gamma}{\sqrt{n+2}}$$
$$+\frac{N\sin\gamma\sin(n+1)\gamma}{\sqrt{n+2}}+\frac{N_1\sin\gamma\sin n\gamma}{\sqrt{n+3}}+k,$$

$$\sum_{n=1}^{n=n}\sqrt{n}\sin n\gamma=\frac{M(n+1)\sin(n+1)\gamma}{\sqrt{n+1}}+\frac{M_1 n\sin n\gamma}{\sqrt{n+2}}$$
$$-\frac{N\sin\gamma\cos(n+1)\gamma}{\sqrt{n+2}}-\frac{N_1\sin\gamma\cos n\gamma}{\sqrt{n+3}}+k',$$

M, $M_1$, N, $N_1$ étant des quantités analogues aux quantités M et N précédemment définies, et l'on a

$$\sum_{n=1}^{n=n}\int_\alpha^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma=\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{M(n+1)\cos(n+1)\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}}$$
$$+\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{M_1 n\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}+\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{N\sin\gamma\sin(n+1)\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}$$
$$+\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{N_1\sin\gamma\sin n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}}+\int_\alpha^{\pi-\alpha}k\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum_{n=1}^{n=n}\int_\alpha^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma=\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}(n+1)\sin(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}}$$

$$+\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}_1 n\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}-\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}\sin\gamma\cos(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}$$

$$-\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}_1\sin\gamma\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}}+\int_\alpha^{\pi-\alpha}k'\Phi(\gamma)\,d\gamma;$$

de telle sorte que, pour établir la convergence des deux séries

$$\sum\int_\alpha^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \sum\int_\alpha^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma,$$

il suffit de faire voir que les limites vers lesquelles tendent les différentes expressions

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}(n+1)\cos(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}},\qquad \int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}_1 n\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},$$

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}\sin\gamma\sin(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},\qquad \int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}_1\sin\gamma\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}},$$

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}(n+1)\sin(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}},\qquad \int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{M}_1 n\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},$$

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}\sin\gamma\cos(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},\qquad \int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{\mathrm{N}_1\sin\gamma\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}},$$

à mesure que $n$ croît, sont toutes finies et déterminées, puisque les deux intégrales

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha}k\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \int^{\pi-\alpha}k'\,\Phi(\gamma)\,d\gamma$$

sont indépendantes de $n$ et finies. A cet effet, nous démontrerons, il est clair que cela suffit, que zéro est la limite des deux intégrales

$$\sqrt{n}\int_\alpha^{\pi-\alpha}\mathrm{M}\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \sqrt{n}\int_\alpha^{\pi-\alpha}\mathrm{M}\sin n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,$$

dans lesquelles $\Phi(\gamma)$ représente, comme plus haut, un produit de fonctions de $\gamma$ ne devenant jamais infinies entre $\alpha$ et $\pi-\alpha$, et n'ayant entre ces limites qu'un nombre fini de maxima ou minima, et M une fonction de $\gamma$ et de $n$ qui, pour toutes les valeurs de $n$ et pour toutes les valeurs de $\gamma$, depuis $\alpha$ jusqu'à $\pi-\alpha$, reste au-dessous d'une certaine limite, et décroît lorsque $\gamma$ croît.

**14.** Divisons l'intervalle compris entre $\alpha$ et $\pi-\alpha$ en une série d'autres, de façon que dans chacun de ces nouveaux intervalles les facteurs qui composent $\Phi(\gamma)$ varient dans le même sens; soient $a$ et $b$ les limites d'un quelconque de ces intervalles, appelons $p$, $p_1$, $p_2$ les facteurs de $\Phi(\gamma)$ qui vont en diminuant, lorsque $\gamma$ augmente de $a$ à $b$, et $q, q_1, q_2$ ceux qui vont en augmentant; soit d'ailleurs A un nombre positif supérieur à la valeur absolue de chacun des deux produits

$$\mathrm{M}pp_1p_2,\quad qq_1q_2$$

pour toutes les valeurs de $n$ et pour les valeurs de $\gamma$ depuis $a$ jusqu'à $b$; nous pourrons écrire la partie des deux intégrales ci-dessus qui se rapporte à l'intervalle compris entre $a$ et $b$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&-\int_a^b \sqrt{n}\cos n\gamma(\mathrm{A}+\mathrm{M}pp_1p_2)(\mathrm{A}-qq_1q_2)\,d\gamma\\
&+\mathrm{A}\int_a^b \sqrt{n}\cos n\gamma(\mathrm{A}+\mathrm{M}pp_1p_2)\,d\gamma\\
&+\mathrm{A}\int_a^b \sqrt{n}\cos n\gamma(\mathrm{A}-qq_1q_2)\,d\gamma-\mathrm{A}^2\int \sqrt{n}\cos n\gamma\,d\gamma,\\
&-\int_a^b \sqrt{n}\sin n\gamma(\mathrm{A}+\mathrm{M}pp_1p_2)(\mathrm{A}-qq_1q_2)\,d\gamma\\
&+\mathrm{A}\int_a^b \sqrt{n}\sin n\gamma(\mathrm{A}+\mathrm{M}pp_1p_2)\,d\gamma\\
&+\mathrm{A}\int_a^b \sqrt{n}\sin n\gamma(\mathrm{A}-qq_1q_2)\,d\gamma-\mathrm{A}^2\int_a^b \sqrt{n}\sin n\gamma\,d\gamma;
\end{aligned}$$

remarquant alors que les intégrales définies

$$\int_a^\gamma \sqrt{n}\cos n\gamma\,d\gamma,\quad \int_a^\gamma \sqrt{n}\sin n\gamma\,d\gamma$$

sont, quelles que soient les limites, inférieures à $\frac{2}{\sqrt{n}}$, et que les expressions

$$A + M\,pp_1p_2,\quad A - qq_1q_2,\quad (A + M\,pp_1p_2)(A - qq_1q_2)$$

sont positives et décroissantes, on verra aisément, d'après un lemme de calcul intégral que j'ai démontré dans le tome XIV de ce Recueil, que la partie considérée des deux intégrales

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n}\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n}\sin n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma$$

est moindre qu'un nombre de la forme $\frac{k}{\sqrt{n}}$, $k$ étant indépendant de $n$ et au-dessous d'une certaine limite, et, par conséquent, aussi petite qu'on le veut, en prenant $n$ suffisamment grand. Ce que nous avons dit de la partie des intégrales précédentes, qui se rapporte à l'intervalle compris entre $a$ et $b$, nous pourrions le dire de tous les autres intervalles en lesquels nous avons décomposé l'intervalle de $\alpha$ à $\pi-\alpha$; donc le nombre de ces intervalles étant fini, puisque le nombre des maxima et minima, compris entre $\alpha$ et $\pi-\alpha$, des différents facteurs $p$, $p_1$, $p_2$, $q$, $q_1$, $q_2$ de $\Phi(\gamma)$, est lui-même limité, nous pouvons conclure que les intégrales totales

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n}\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma,\qquad \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n}\sin n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma$$

sont aussi petites que l'on veut, en prenant $n$ suffisamment grand.

15. *Nota.* Si dans la formule

$$f(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi} P_n\,f(\theta',\varphi')\,d\varphi',$$

qui donne le développement d'une fonction de deux angles en série ordonnée suivant les fonctions $Y_n$, on suppose la fonction $f(\theta,\varphi)$ indépendante de $\varphi$, on trouve

$$f(\theta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\int_0^\pi f(\theta')\sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi} P_n\,d\varphi'$$

ou bien, posant $\cos\theta = x$, $\cos\theta' = x'$, appelant $F(x)$ ce que devient $f(\theta)$ et se rappelant le théorème III du § II,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{2} X_n \int_{-1}^{+1} F(x') X_n' \, dx'.$$

C'est la formule par laquelle on développe une fonction d'une variable $x$ ($x$ restant compris entre $-1$ et $+1$), en série ordonnée suivant les fonctions $X_n$. Il ne faut pas perdre de vue que lorsqu'on attribue à $x$ une valeur qui rend la fonction $F(x)$ discontinue, l'égalité précédente n'est exacte qu'en ayant soin de remplacer le premier membre par la valeur moyenne de la fonction, c'est-à-dire ici par $\frac{F(x-\varepsilon)+F(x+\varepsilon)}{2}$, $\varepsilon$ étant un nombre infiniment petit.