JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROGER

Solution d'un problème de probabilités

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 202-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__202_0>

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROBABILITÉS;

PAR M. ROGER,
Ingénieur des Mines.

Dans le tome II du présent Journal, Poisson a traité le problème suivant :

« Trois joueurs A, B, C jouent, deux à deux, une série de coups; chaque nouveau coup est joué par le joueur qui a gagné le coup précédent, avec celui qui n'y a pas joué : le sort désigne les deux joueurs qui jouent le premier coup. La partie est finie quand un des trois joueurs a gagné consécutivement les deux autres, ou deux coups de suite, et c'est ce joueur qui a gagné la partie. On demande de déterminer, pour les trois joueurs, les probabilités de gagner la partie, d'après les chances qu'ils ont de gagner à chaque coup, et selon que le sort les a désignés pour jouer ou pour ne pas jouer au premier coup. »

La solution présentée par Poisson est très-élégante, mais elle ne me paraît pas pouvoir s'étendre au cas d'un nombre quelconque n de joueurs, jouant suivant les conditions ci-dessus énoncées, l'ordre des joueurs étant primitivement déterminé par le sort. C'est ce cas général que je me propose de résoudre.

Je considère la partie à un instant quelconque, et je suppose que les joueurs, au nombre de n, soient rangés dans l'ordre suivant :

$$A, B, C, \ldots, L, M, N;$$

en ce moment, le joueur A vient de gagner le joueur N, et il s'apprête à jouer avec B.

Si le joueur A gagne le coup, il a gagné la partie; s'il perd, c'est au joueur B à jouer avec le suivant, et, dans ce cas, les joueurs se trouveront être dans l'ordre

$$B, C, \ldots, L, M, N, A,$$

et ainsi de suite.

Il est clair qu'un joueur quelconque jouera toujours, d'abord avec celui qui le précède, ensuite avec celui qui le suit. Représentons, d'après cela, par β la chance qu'un joueur tel que B a de gagner un coup sur celui qui le suit; alors la chance que le même joueur B a de gagner celui qui le précède devra être représentée, pour la symétrie des notations, par $(1-\alpha)$; et de même pour tous les joueurs.

Cela posé, appelons A_x la probabilité qu'a le joueur A de gagner la partie au moment même où il occupe le rang x, relativement au coup qui va être commencé. A_x sera une fonction de x et des caractéristiques α, β, γ, ..., λ, μ, ν ci-dessus définies. Soit

$$A_x = f(x;\, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu).$$

Si cette expression était connue, il est évident, par la nature même de la question, qu'on en déduirait B_x par le simple changement de chacune des lettres α, β, ..., ν dans la suivante, en sorte que l'on aurait

$$B_x = f(x;\, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu, \alpha).$$

De là on déduirait de même C_x, puis D_x, et ainsi de suite.

La question est donc ramenée à la détermination de la seule fonction A_x.

Or, considérons à présent le cas où le joueur A, ayant gagné le précédent N, s'apprête à jouer avec celui qui le suit, B.

Il arrivera de ces deux choses l'une : A gagnera B ou sera gagné par lui.

La probabilité de la première hypothèse est α, et, dans ce cas, A a gagné la partie; la probabilité de la seconde hypothèse est $(1-\alpha)$, et, dans ce cas, la probabilité de gagner la partie devient, pour le joueur A, A_n au lieu de A_1. On a donc la relation

$$A_1 = \alpha + (1+\alpha)\, A_n. \tag{1}$$

Dans la première hypothèse, les probabilités de gagner, qui étaient auparavant

$$B_2,\ C_3, \ldots,\ M_{n-1},\ N_n,$$

pour chacun des autres joueurs, deviennent nulles, puisqu'ils ont perdu la partie; dans la seconde hypothèse, elles deviennent respectivement

$$B_1, \quad C_2, \ldots, \quad M_{n-2}, \quad N_{n-1},$$

ce qui fournit les relations

$$\begin{aligned} B_2 &= (1-\alpha)\, B_1, \\ C_3 &= (1-\alpha)\, C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ M_{n-1} &= (1-\alpha)\, M_{n-2}, \\ N_n &= (1-\alpha)\, N_{n-1}. \end{aligned}$$

Mais d'après la remarque qui a été faite ci-dessus sur la manière de déduire B_x, C_x, ..., de A_x supposé connu, on peut, au lieu des équations que je viens d'écrire, poser les suivantes :

$$\begin{aligned} A_2 &= (1-\nu)\, A_1, \\ A_3 &= (1-\mu)\, A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1} &= (1-\gamma)\, A_{n-2}, \\ A_n &= (1-\beta)\, A_{n-1}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi n équations du premier degré entre les n inconnues A_1, A_2, ..., A_n; ce système d'équations est très-aisé à résoudre, car on a d'abord

$$A_n = (1-\beta)\,(1-\gamma)\,\ldots\,(1-\nu)\, A_1,$$

valeur qui, substituée dans l'équation (1), donnera

$$A_1 = \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\nu)\, A_1.$$

Posant, pour abréger,

$$(1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\nu) = K_n,$$

on déduit de là

$$A_1 = \frac{\alpha}{1-K_r}.$$

D'ailleurs on aurait pour A_x la formule générale

$$A_x = A_1\,[(1-\nu)(1-\mu)\ldots],$$

les crochets [ ] renfermant $(x-1)$ facteurs. Si l'on représente par a_x le produit de x facteurs pris dans l'ordre suivant,

$$(1-\nu),\quad (1-\mu),\ldots,\quad (1-\gamma),\quad (1-\beta),\quad (1-\alpha),$$

on pourra écrire

$$A_x = a_{x-1}\,A_1 = a_{x-1}\,\frac{\alpha}{1-K_n}.$$

On remarquera d'ailleurs que, dans le système de notations adopté, le produit K_n pourrait s'écrire indifféremment a_n, $b_n,\ldots,$ ou c_n.

Ce résultat peut aussi s'écrire d'une manière un peu plus commode pour les interprétations. En effet, a_{x-1} peut être considéré comme le quotient de K_n par un produit a_{n-x+1} de $(n-x+1)$ facteurs écrits dans leur ordre naturel $(1-\alpha)$, $(1-\beta),\ldots$. On aura donc, en représentant par χ le coefficient $\frac{K_n}{1-K_n}$, symétrique par rapport aux lettres α, $\beta,\ldots,$ ν, on aura, dis-je,

$$A_x = \chi\,\frac{\alpha}{a_{n-x+1}}.$$

Discussion. La partie étant considérée à un instant quelconque, il est certain qu'elle doit finir, à moins que chaque joueur ne soit sûr de gagner celui qui le précède, et de perdre avec celui qui le suit, c'est-à-dire à moins que l'on n'ait à la fois

$$\alpha = 0,\quad \beta = 0,\ldots,\quad \nu = 0,$$

auquel cas le nombre K_n se réduit à l'unité, et le coefficient χ devient infini. Ce cas excepté, la partie, prolongée autant qu'il le faudra, doit nécessairement se terminer, et l'un des joueurs devra gagner. Or la probabilité que la partie se terminera est au moment, par exemple, où le joueur A, après avoir gagné le précédent, va jouer avec B; cette probabilité, dis-je, sera

$$(A_1 + B_2 + C_3 + \ldots + M_{n-1} + N_n) \text{ qui doit être égale à } 1.$$

C'est ce qu'il est aisé de vérifier par la substitution des valeurs qui résultent pour A_1, B_2, etc., de la formule générale trouvée ci-dessus.

Pour le cas particulier de $n = 3$, traité par Poisson, on aura

$$\chi = \frac{(1-\alpha)(1-6)(1-\gamma)}{1-(1-\alpha)(1-6)(1-\gamma)},$$

$$A_1 = \chi\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-6)(1-\gamma)} = \frac{\alpha}{1-K_n},$$

$$B_2 = \chi\frac{6}{(1-6)(1-\gamma)} = \frac{6(1-\alpha)}{1-K_n},$$

$$C_3 = \chi\frac{\gamma}{(1-\gamma)} = \frac{\gamma(1-\alpha)(1-6)}{1-K_n};$$

formules qui sont les mêmes, sauf quelques légères différences de notation, que celles énoncées à la page 378 du Journal de M. Liouville.

Considérons maintenant la partie tout à fait au commencement. Le sort a désigné les joueurs pour jouer dans l'ordre suivant : N et A ensemble et tout d'abord, puis les autres, successivement, B, C,..., M.

Ou le joueur A gagnera N, ou il sera gagné par lui. Dans la première hypothèse, dont la probabilité est $(1-\nu)$, les probabilités des joueurs seront, après le coup,

$$A_1,\ B_2,\ C_3, \ldots,\ N_n;$$

et, dans la seconde hypothèse, dont la probabilité est ν, les probabilités des joueurs seront, après le coup,

$$N'_1,\ B'_2,\ C'_3, \ldots,\ A'_n,$$

et elles se déduiront de la formule générale trouvée tout à l'heure, à l'aide de simples changements de lettres. D'après cela on aura, à priori, pour la probabilité $({}_i I)$ d'un joueur quelconque de rang i,

$$({}_i I) = (1-\nu)\, I_{i-1} + \nu\, I'_{i-1},$$

les quantités I_{i-1} et I'_{i-1} se calculant comme il vient d'être dit. Quant aux joueurs A et N, leurs probabilités à priori seraient

$$(A) = (1-\nu)\, A_1 + \nu\, A'_n,$$
$$(N) = (1-\nu)\, N_n + \nu\, N'_1.$$

Ces formules de transformation seraient, en général, assez compliquées; aussi nous bornerons-nous à considérer le cas où tous les joueurs sont de force égale, et où l'on a, par conséquent,

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = (1 - \alpha) = (1 - \beta) = \ldots = \frac{1}{2}.$$

Alors on aura aussi

$$A_x = B_x = C_x = \ldots = N_x;$$

d'ailleurs

$$A_x = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \; \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x+1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Si l'on fait $n = 3$, on aura

$$A_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{4}{7}, \quad A_2 = \frac{2}{7}, \quad A_3 = \frac{1}{7}.$$

C'est dans ces proportions qu'il faudra partager l'enjeu total, si la partie est interrompue au moment où le joueur A_1 vient de gagner le joueur A_3.

En général, on voit que chaque joueur, à un instant donné, a droit à une part deux fois plus forte que celui qui le suit immédiatement; c'est ce qu'il est aisé de faire voir à priori. En effet, pour que le joueur A_x puisse gagner, il faut d'abord que le joueur A_1 perde le coup qu'il va jouer avec A_2, événement dont la probabilité est $\frac{1}{2}$. Mais alors la probabilité A_x se change en A_{x-1}, donc

$$A_x = \frac{1}{2} A_{x-1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette équation conduirait de suite à l'expression trouvée ci-dessus pour A_x. Car on aura

$$A_2 = \frac{1}{2} A_1,$$

$$A_3 = \frac{1}{2} A_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_x = \frac{1}{2} A_{x-1};$$

d'où, en multipliant terme à terme,

$$A_x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} A_1;$$

et comme

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 1,$$

on a

$$A_1\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = 1,$$

ou bien

$$A_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1;$$

d'où l'on tire

$$A_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

et enfin

$$A_x = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Dans le cas des forces égales, les joueurs N et A étant désignés par le sort pour jouer tout d'abord ensemble, il n'importe pas aux autres joueurs que ce soit l'un plutôt que l'autre qui gagne le premier coup. C'est ce qu'indique la formule

$$({}_i\mathrm{I}) = (1 - \nu)\,\mathrm{I}_{i-1} + \nu\,\mathrm{I}'_{i-1},$$

qui se réduit alors à

$$({}_i\mathrm{I}) = \mathrm{I}_{i-1}.$$

Quant au joueur A, s'il gagne ce premier coup, la probabilité devient A_1; s'il perd ce coup, elle devient A_n; on a donc

$$(\mathrm{N}) = (\mathrm{A}) = \frac{1}{2}(A_1 + A_n).$$

Chacun des joueurs N et A se trouve ainsi avoir la moyenne des chances qu'ont les deux joueurs extrêmes dans le cours de la partie.