JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. PUISEUX

Solution de quelques questions relatives au mouvement d'un corps solide pesant posé sur un plan horizontal

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 1-30.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Solution de quelques questions relatives au mouvement d'un corps solide pesant posé sur un plan horizontal;

Par M. V. PUISEUX.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 28 avril 1851.)

Je suppose, dans ce Mémoire, le corps et le plan parfaitement polis, de sorte qu'on puisse faire abstraction du frottement; je néglige également la résistance de l'air. Je considère d'abord un ellipsoïde à trois axes inégaux et même hétérogène, mais tel, cependant, que le centre de gravité se confonde avec le centre de figure, et que les axes principaux d'inertie, relatifs à ce point, coïncident avec les axes géométriques. On sait qu'un pareil corps est en équilibre lorsqu'il repose sur un plan horizontal par un de ses sommets, et que cet équilibre est instable quand ce sommet n'appartient pas au petit axe. Mais si, après avoir écarté très-peu l'ellipsoïde d'une position d'équilibre et imprimé de très-petites vitesses à ses différents points, on lui donne, en outre, une vitesse de rotation finie autour de l'axe qui était d'abord vertical, il pourra se faire que cet axe s'écarte toujours très-peu de la verticale, lors même que la position d'équilibre était instable. Je détermine les conditions qui doivent être remplies pour qu'il en soit ainsi; par exemple, je trouve que le grand axe d'un ellipsoïde homogène pourra rester toujours sensiblement vertical si la vitesse de rotation autour de cet axe surpasse une limite que j'assigne [*].

Dans les cas où l'un des axes de l'ellipsoïde fait toujours un petit angle avec la verticale, j'intègre par approximation les équations du mouvement, de manière qu'on peut calculer la position approchée du corps à chaque époque donnée.

Je montre ensuite que la même analyse et les mêmes conclusions s'appliquent au mouvement d'un corps de forme quelconque posé sur un plan horizontal, dans le cas où l'un des axes principaux du centre de gravité est normal à la surface du corps et a été écarté de la verticale d'une très-petite quantité.

Enfin, je cherche le mouvement d'un corps pesant absolument quelconque posé sur un plan horizontal lorsque, après l'avoir un peu écarté d'une position d'équilibre, on n'a imprimé que de très-petites vitesses à tous ses points : je ne suppose plus ici qu'on ait donné au corps une vitesse de rotation finie autour de la droite qui, dans la position d'équilibre, passait par le centre de gravité et le point de contact; une telle vitesse ferait acquérir une valeur finie à l'angle compris entre la verticale et la droite dont on vient de parler. J'obtiens les conditions nécessaires pour que cet angle reste très-petit, et je retrouve ainsi les conditions connues de la stabilité d'équilibre : lorsqu'elles sont remplies, j'intègre par approximation les équations du mouvement, et j'en conclus l'existence de deux plans remarquables qui se coupent suivant la normale menée du centre de gravité à la surface du corps. Ces plans, qui, en général, ne sont pas rectangulaires, sont fixes dans le corps et jouissent de la propriété, que les projections sur une verticale des points qui s'y trouvent oscillent comme le fait l'extrémité d'un pendule simple : les oscillations sont

---

[*] Dans la pratique, où il faut tenir compte du frottement contre le plan et de la résistance de l'air, on peut dire seulement que le grand axe de l'ellipsoïde restera sensiblement vertical, tant que la vitesse de rotation ne sera pas abaissée par les deux causes dont on vient de parler au-dessous de la limite assignée.

synchrones pour les points d'un même plan; mais leur durée n'est pas la même pour les deux plans. Les durées des oscillations, ainsi que la position des plans dans le corps, dépendent seulement de la forme et de la constitution de celui-ci, et nullement des circonstances initiales du mouvement.

Je ferai remarquer à ce propos que lorsqu'un corps pesant posé sur un plan horizontal a été un peu dérangé d'une position d'équilibre stable, il n'est pas exact de dire qu'il s'en écartera toujours très-peu; car, indépendamment du mouvement de translation horizontale que le centre de gravité peut prendre, le corps tournera autour de la verticale menée par ce centre d'un angle dont je donne l'expression, et qui, en général, croîtra indéfiniment avec le temps s'il n'y a pas de frottement. Ce qui reste très-petit, c'est l'angle que fait avec la verticale la normale à la surface menée par le centre de gravité.

I.

Soient OX, OY, OZ trois axes rectangulaires fixes dont le dernier soit vertical : concevons qu'un ellipsoïde pesant repose sur le plan horizontal OXY ; admettons que son centre de gravité G coïncide avec son centre de figure et que ses axes géométriques Gx, Gy, Gz soient en même temps les axes principaux d'inertie du point G. Appelons α, β, γ les longueurs des demi-axes, A, B, C les moments d'inertie correspondants, M la masse de l'ellipsoïde, g la pesanteur. Soient, de plus, à l'époque t, N la résistance du plan fixe, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre G rapportées aux axes fixes OX, OY, OZ; x, y, z celles du point de contact H rapportées aux axes mobiles Gx, Gy, Gz; p, q, r les vitesses de rotation du corps autour de ces derniers axes; φ et ψ les angles que fait avec OX et Gx la trace horizontale du plan Gxy; θ l'angle de Gz avec la verticale OZ; enfin, désignons comme à l'ordinaire par a, a', a'' les cosinus des angles que Gx fait avec les trois axes fixes, et, de même, par b, b', b'', c, c', c'' les cosinus des angles que Gy et Gz font avec les mêmes axes.

Les principes connus de la Mécanique nous donneront d'abord les équations :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = 0, \tag{2}$$

$$M\frac{d^2z_1}{dt^2} = N - Mg; \tag{3}$$

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = N(c''y - b''z), \tag{4}$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = N(a''z - c''x), \tag{5}$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N(b''x - a''y); \tag{6}$$

$$p\,dt = \sin\psi \sin\theta\, d\varphi + \cos\psi\, d\theta, \tag{7}$$

$$q\,dt = \cos\psi \sin\theta\, d\varphi - \sin\psi\, d\theta, \tag{8}$$

$$r\,dt = d\psi + \cos\theta\, d\varphi. \tag{9}$$

Les coordonnées x, y, z satisfont à l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1: \tag{10}$$

la normale au point de contact doit être verticale, il en résulte

$$\frac{x}{\alpha^2 a''} = \frac{z}{\gamma^2 c''}, \tag{11}$$

$$\frac{y}{\beta^2 b''} = \frac{z}{\gamma^2 c''}. \tag{12}$$

De plus, ce même point de contact est dans le plan horizontal OXY; on a donc

$$z_1 + a''x + b''y + c''z = 0. \tag{13}$$

En joignant à ces treize équations les trois relations connues

$$a'' = \sin\psi \sin\theta, \quad b'' = \cos\psi \sin\theta, \quad c'' = \cos\theta,$$

on aura seize équations pour déterminer en fonction de t les seize variables

$$x_1,\ y_1,\ z_1,\ p,\ q,\ r,\ \varphi,\ \psi,\ \theta,\ a'',\ b'',\ c'',\ x,\ y,\ z,\ \mathrm{N}.$$

Admettons à présent que l'axe Gz de l'ellipsoïde reste à peu près vertical pendant tout le mouvement; l'angle θ sera, ainsi que sa dérivée $\frac{d\theta}{dt}$, une quantité très-petite que nous regarderons comme du premier ordre et dont nous négligerons le carré : nous aurons alors

$$a'' = \theta \sin\psi,\quad b'' = \theta\cos\psi,\quad c'' = 1,$$

d'où

$$\theta = \sqrt{a''^2 + b''^2},\quad \sin\psi = \frac{a''}{\sqrt{a''^2+b''^2}},\quad \cos\psi = \frac{b''}{\sqrt{a''^2+b''^2}},$$

$$d\theta = \frac{a''\,da'' + b''\,db''}{\sqrt{a''^2+b''^2}},\quad d\psi = \frac{b''\,da'' - a''\,db''}{a''^2+b''^2}.$$

Les équations (11) et (12) nous donneront

$$x = \frac{\alpha^2 a'' z}{\gamma^2},\quad y = \frac{\beta^2 b'' z}{\gamma^2},$$

par où l'on voit que x et y sont du premier ordre; négligeant leurs carrés, on tirera de l'équation (10)

$$z = -\gamma,$$

et, par conséquent,

$$x = -\frac{\alpha^2 a''}{\gamma},\quad y = -\frac{\beta^2 b''}{\gamma}:$$

puis, on conclura de l'équation (13),

$$z_1 = +\gamma,$$

Ainsi l'ordonnée du centre de gravité reste sensiblement constante; il résulte d'ailleurs des équations (1) et (2) que la projection horizontale de ce point se transporte d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Les équations (7) et (8) nous montrent que p et q sont des quantités du premier ordre, et qu'ainsi le produit pq est du second ordre: l'expression

$$b''x - a''y = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)a''\,b''}{\gamma}$$

est également du second ordre; d'ailleurs, l'équation (3) se réduit à

$$N = Mg:$$

on conclut donc de l'équation (6),

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire que la vitesse de rotation r autour de l'axe Gz est sensiblement constante pendant tout le mouvement.

De l'équation (9) on tire

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{d\psi}{dt};$$

portant cette valeur dans les équations (7) et (8), on trouvera

$$p = a''\left(r - \frac{d\psi}{dt}\right) + \cos\psi\frac{d\theta}{dt} = ra'' + \frac{db''}{dt},$$

$$q = b''\left(r - \frac{d\psi}{dt}\right) - \sin\psi\frac{d\theta}{dt} = rb'' - \frac{da''}{dt}:$$

enfin, en substituant ces valeurs ainsi que celles de x, y, z, N, dans les équations (4) et (5), on obtiendra les deux équations différentielles du second ordre,

$$(14)\qquad \begin{cases} A\dfrac{d^2b''}{dt^2} + D\dfrac{da''}{dt} + Eb'' = 0, \\ B\dfrac{d^2a''}{dt^2} - D\dfrac{db''}{dt} + Fa'' = 0, \end{cases}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$D = (A + B - C)r,$$

$$E = (C - B)r^2 + \frac{Mg(\beta^2 - \gamma^2)}{\gamma},$$

$$F = (C - A)r^2 + \frac{Mg(\alpha^2 - \gamma^2)}{\gamma}.$$

Pour les intégrer, nous poserons

$$a'' = h\sin(\omega t + \varepsilon), \quad b'' = k\cos(\omega t + \varepsilon),$$

h, k, ω, ε désignant des constantes; la substitution de ces valeurs nous donnera

$$-\mathrm{A}k\omega^2 + \mathrm{D}h\omega + \mathrm{E}k = 0,$$
$$-\mathrm{B}h\omega^2 + \mathrm{D}k\omega + \mathrm{F}h = 0,$$

d'où

$$\frac{k}{h} = \frac{\mathrm{D}\omega}{\mathrm{A}\omega^2 - \mathrm{E}} = \frac{\mathrm{B}\omega^2 - \mathrm{F}}{\mathrm{D}\omega}.$$

On voit que ω doit être une des racines de l'équation bicarrée

$$(15)\qquad (\mathrm{A}\omega^2 - \mathrm{E})(\mathrm{B}\omega^2 - \mathrm{F}) - \mathrm{D}^2\omega^2 = 0:$$

appelons ω' et ω'' deux racines qui ne soient pas égales et de signes contraires, et désignons par λ' et λ'' les valeurs correspondantes du rapport $\frac{k}{h}$; les intégrales complètes des équations (14) seront

$$(16)\qquad \begin{cases} a'' = h' \sin(\omega' t + \varepsilon') + h'' \sin(\omega'' t + \varepsilon''), \\ b'' = \lambda' h' \cos(\omega' t + \varepsilon') + \lambda'' h'' \cos(\omega'' t + \varepsilon''), \end{cases}$$

où h', h'', ε', ε'' sont quatre constantes arbitraires. Les valeurs de a'' et de b'' étant connues en fonction de t, on en conclura celles de θ et de ψ par les formules

$$\theta \sin\psi = a'', \quad \theta \cos\psi = b'';$$

puis, l'angle φ se trouvera en intégrant l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{d\psi}{dt},$$

ce qui donne

$$\varphi = rt - \psi + \text{constante}.$$

Les angles φ, ψ, θ déterminent à chaque instant la position de l'ellipsoïde autour de son centre de gravité; quant à ce centre lui-même, on aura ses coordonnées par les formules

$$z_1 = \gamma, \quad x_1 = \xi t + \xi_1, \quad y = \eta t + \eta_1,$$

où ξ, ξ_1, η, η_1 désignent des constantes arbitraires.

Observons que les constantes h', h'', ε', ε'' peuvent s'exprimer au moyen de la quantité r et des valeurs initiales θ_0, ψ_0, p_0, q_0 des variables θ, ψ, p, q : en effet, les valeurs initiales de a'' et de b'' sont $\theta_0 \sin \psi_0$, $\theta_0 \cos \psi_0$, et les équations déjà obtenues

$$\frac{da''}{dt} = rb'' - q, \quad \frac{db''}{dt} = p - ra'',$$

montrent que les valeurs initiales de $\frac{da''}{dt}$, $\frac{db''}{dt}$ sont respectivement

$$r\theta_0 \cos \psi_0 - q_0, \quad p_0 - r\theta_0 \sin \psi_0.$$

On aura donc, en faisant $t = 0$ dans les équations (16) et dans leurs dérivées,

$$h' \sin \varepsilon' + h'' \sin \varepsilon'' = \theta_0 \sin \psi_0,$$
$$\lambda' h' \cos \varepsilon' + \lambda'' h'' \cos \varepsilon'' = \theta_0 \cos \psi_0,$$
$$\omega' h' \cos \varepsilon' + \omega'' h'' \cos \varepsilon'' = r\theta_0 \cos \psi_0 - q_0,$$
$$\omega' \lambda' h' \sin \varepsilon' + \omega'' \lambda'' h'' \sin \varepsilon'' = r\theta_0 \sin \psi_0 - p_0,$$

équations d'où l'on pourra tirer h', h'', ε', ε''. On voit par ces formules que quand même r serait très-grand, on pourra toujours prendre θ_0, p_0 et q_0 assez petits pour que les constantes h' et h'' soient elles-mêmes aussi petites qu'on le voudra. Alors, si les racines ω' et ω'' sont réelles, a'' et b'' resteront toujours très-petits, et, par conséquent, l'angle $\theta = \sqrt{a''^2 + b''^2}$ sera lui-même toujours très-petit : mais si les racines ω' et ω'' étaient imaginaires ou au moins l'une d'elles, a'' et b'', et, par suite, θ ne pourraient pas rester toujours très-petits.

C'est le premier cas que nous devons supposer, savoir celui de la réalité des racines ω', ω'', puisque nous avons admis que l'axe Gz de l'ellipsoïde faisait toujours un très-petit angle avec la verticale : alors les formules précédentes, qui nous donnent en fonction de t les six quantités φ, ψ, θ, x_1, y_1, z_1, feront connaître à chaque instant la situation du corps. On peut se demander aussi la position du point de contact H, soit sur l'ellipsoïde, soit relativement aux axes fixes : les coordonnées de ce point par rapport aux axes principaux seront

$$x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}[h' \sin(\omega' t + \varepsilon') + h'' \sin(\omega'' t + \varepsilon'')],$$
$$y = -\frac{\beta^2}{\gamma}[\lambda' h' \cos(\omega' t + \varepsilon') + \lambda'' h'' \cos(\omega'' t + \varepsilon'')].$$

La courbe décrite par ce point sur l'ellipsoïde autour de l'extrémité A de l'axe Gz s'en écartera très-peu et pourra être regardée comme située dans le plan tangent en A : son équation résultera de l'élimination de t entre les deux équations précédentes, et l'angle que le rayon vecteur AH fait avec le plan Gxz aura pour tangente

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\lambda' h' \cos(\omega' t + \varepsilon') + \lambda'' h'' \cos(\omega'' t + \varepsilon'')}{h' \sin(\omega' t + \varepsilon') + h'' \sin(\omega'' t + \varepsilon'')}.$$

Cette expression est semblable à celle qui donne la tangente de la longitude géocentrique d'une planète : le rayon vecteur AH pourra donc ne pas tourner toujours dans le même sens par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde, et alors le mouvement du point de contact, vu du sommet A par un observateur qui croirait le corps immobile, offrira des stations et des rétrogradations analogues à celles que nous observons dans le mouvement des planètes.

Quant aux coordonnées X et Y du même point H, relativement aux axes fixes OX, OY, elles seront données par les formules

$$\begin{aligned} X &= x_1 + ax + by + cz = x_1 + x\cos(\varphi + \psi) \\ &\qquad - y\sin(\varphi + \psi) - \gamma\theta\sin\varphi, \\ Y &= y_1 + a'x + b'y + c'z = y_1 + x\sin(\varphi + \psi) \\ &\qquad + y\cos(\varphi + \psi) + \gamma\theta\cos\varphi, \end{aligned}$$

où $x, y, x_1, y_1, \theta, \varphi, \psi$ sont des fonctions connues du temps.

Il nous faut examiner maintenant quelles conditions doivent remplir la constitution de l'ellipsoïde et la vitesse de rotation r pour que l'axe Gz puisse rester à peu près vertical, c'est-à-dire pour que les racines de l'équation (15) soient réelles. Ces conditions sont exprimées par les trois inégalités

$$(AF + BE + D^2)^2 - 4ABEF > 0, \quad EF > 0, \quad AF + BE + D^2 > 0,$$

dont la première doit avoir lieu pour que les valeurs de ω^2 soient réelles, la seconde pour qu'elles soient de même signe, la troisième pour qu'elles soient positives : en y remplaçant D, E, F par leurs valeurs, on pourra les mettre sous la forme

$$\begin{gathered}C^2(A+B-C)^2 r^4 \\ +\frac{2Mg}{\gamma}(A+B-C)[A(2B-C)(\alpha^2-\gamma^2)+B(2A-C)(\beta^2-\gamma^2)]r^2 \\ +\frac{M^2g^2}{\gamma^2}[A(\alpha^2-\gamma^2)-B(\beta^2-\gamma^2)]^2>0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(C-A)(C-B)r^4+\frac{Mg}{\gamma}[(C-B)(\alpha^2-\gamma^2)+(C-A)(\beta^2-\gamma^2)]r^2 \\ +\frac{M^2g^2}{\gamma^2}(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)>0,\end{gathered}$$

$$[(C-A)(C-B)+AB]r^2+\frac{Mg}{\gamma}[A(\alpha^2-\gamma^2)+B(\beta^2-\gamma^2)]>0.$$

Supposons que l'axe Gz de l'ellipsoïde, qui est sensiblement vertical au commencement du mouvement, soit l'axe du plus grand ou du plus petit moment d'inertie : cette propriété peut appartenir même à l'axe moyen, lorsque l'ellipsoïde est hétérogène [*]. Alors, les différences $C-A$, $C-B$ étant de même signe, on pourra toujours donner à r une valeur telle que, pour cette valeur et pour toute valeur plus grande, les inégalités précédentes soient satisfaites. Ainsi, dans ce cas, si la vitesse de rotation autour de l'axe Gz est supérieure à une certaine limite qui ne dépend pas des circonstances initiales, il suffira de donner aux variables p, q, θ des valeurs initiales assez petites, et alors cet axe restera toujours à peu près vertical.

Supposons, en second lieu, que l'axe Gz soit le petit axe de l'ellipsoïde et en même temps corresponde au plus grand moment d'inertie (l'une de ces choses est une conséquence de l'autre, quand l'ellipsoïde est homogène). Les différences $\alpha^2-\gamma^2$, $\beta^2-\gamma^2$, $C-A$, $C-B$ sont alors positives, et il en est de même, par conséquent, des quantités E et F. On a donc bien, quelle que soit r,

$$EF>0, \quad AF+BE+D^2>0,$$

---

[*] Cela arriverait, par exemple, si la densité du corps était beaucoup plus grande dans le voisinage de l'axe moyen que partout ailleurs, ou bien si près du plan des axes extrêmes elle était beaucoup plus grande que dans le reste de l'ellipsoïde.

et la première inégalité

$$(\mathrm{AF} + \mathrm{BE} + \mathrm{D}^2)^2 - 4\,\mathrm{ABEF} > 0$$

est aussi satisfaite, comme on le voit, en l'écrivant

$$(\mathrm{AF} - \mathrm{BE})^2 + 2\,\mathrm{D}^2(\mathrm{AF} + \mathrm{BE}) + \mathrm{D}^4 > 0.$$

Ainsi, dans notre hypothèse, le petit axe restera toujours sensiblement vertical, quelle que soit la vitesse de rotation r, pourvu que les valeurs initiales de p, q, θ soient assez petites.

Généralement, quelles que soient les longueurs des axes et les valeurs des moments d'inertie, on saura de nos trois inégalités déduire des limites supérieures ou inférieures de r. Si ces limites sont incompatibles, l'axe Gz ne pourra pas rester sensiblement vertical; si, au contraire, il existe des valeurs de r qui remplissent les conditions ainsi trouvées, alors, pour ces valeurs de r et pour des valeurs initiales de p, q, θ suffisamment petites, l'axe Gz fera toujours un très-petit angle avec la verticale.

Considérons, en particulier, le cas où la vitesse de rotation r est nulle ou très-petite : alors la première inégalité sera satisfaite, et les deux autres deviendront

$$(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2) > 0, \quad \mathrm{A}(\alpha^2 - \gamma^2) + \mathrm{B}(\beta^2 - \gamma^2) > 0,$$

d'où il suit nécessairement

$$\alpha > \gamma, \quad \beta > \gamma.$$

Ainsi, pour que l'axe Gz puisse rester toujours à peu près vertical, lorsque tous les points du corps n'ont reçu que de très-petites vitesses, il faut que cet axe soit le plus petit. On retrouve ainsi la condition connue de la stabilité de l'équilibre d'un ellipsoïde [*].

Ne supposons plus r très-petite, et considérons encore spécialement

[*] L'hypothèse de r très-petite finissant toujours par se vérifier dans les expériences à cause du frottement contre le plan et de la résistance de l'air, on voit qu'en réalité le petit axe de l'ellipsoïde est le seul qui puisse conserver toujours une direction sensiblement verticale.

le cas d'un ellipsoïde homogène. Les moments principaux d'inertie sont alors

$$A = \frac{M}{5}(\beta^2 + \gamma^2), \quad B = \frac{M}{5}(\alpha^2 + \gamma^2), \quad C = \frac{M}{5}(\alpha^2 + \beta^2) :$$

par suite, nos trois inégalités deviennent

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 \left(\frac{\gamma r^2}{5g}\right)^2 + 2(\alpha^4 + \beta^4 - 2\gamma^4)\frac{\gamma r^2}{5g} + (\alpha^2 - \beta^2)^2 > 0,$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2) > 0,$$

$$\frac{\gamma r^2}{5g} > \frac{\gamma^4 - \alpha^2\beta^2}{\gamma^4 + \alpha^2\beta^2}.$$

Comme on l'a déjà remarqué, elles sont satisfaites, quelle que soit r, lorsque 2γ est le petit axe de l'ellipsoïde. Si l'axe Gz ou 2γ était l'axe moyen, la seconde inégalité n'aurait pas lieu : ainsi, quelle que soit r, l'axe moyen d'un ellipsoïde homogène ne peut pas rester toujours sensiblement vertical. Enfin, si Gz est le grand axe, la seconde égalité sera vérifiée; de plus, il faudra que $\frac{\gamma r^2}{5g}$ surpasse la quantité positive $\frac{\gamma^4 - \alpha^2\beta^2}{\gamma^4 + \alpha^2\beta^2}$ et ne soit pas compris entre les deux racines de l'équation

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 u^2 + 2(\alpha^4 + \beta^4 - 2\gamma^4)u + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0,$$

racines qui sont positives et ont pour valeurs

$$\left(\frac{\sqrt{\gamma^4 - \alpha^4} + \sqrt{\gamma^4 - \alpha^4}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2, \quad \left(\frac{\sqrt{\gamma^4 - \alpha^4} - \sqrt{\gamma^4 - \alpha^4}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2.$$

Mais, si dans le premier membre de l'équation précédente on met à la place de u la quantité $\frac{\gamma^4 - \alpha^2\beta^2}{\gamma^4 + \alpha^2\beta^2}$, le résultat de la substitution, savoir

$$-\frac{4\gamma^4(\gamma^4 - \alpha^4)(\gamma^4 - \beta^4)}{(\gamma^4 + \alpha^2\beta^2)^2},$$

sera négatif : on en conclut que $\frac{\gamma^4 - \alpha^2\beta^2}{\gamma^4 + \alpha^2\beta^2}$ tombe entre les racines de cette équation. Pour que les trois inégalités soient satisfaites, il faut donc et il suffit que $\frac{\gamma r^2}{5g}$ surpasse la plus grande racine de l'équation en u, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{\gamma r^2}{5g} > \left(\frac{\sqrt{\gamma^4 - \alpha^4} + \sqrt{\gamma^4 - \beta^4}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2,$$

ou bien

$$r > \sqrt{\frac{5g}{\gamma}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma^4 - \alpha^4} + \sqrt{\gamma^4 - \beta^4}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Telle est la condition que doit remplir la vitesse de rotation r pour que le grand axe d'un ellipsoïde homogène puisse rester toujours à peu près vertical. On voit que, si les dimensions du corps croissent proportionnellement dans le rapport de 1 à n, la limite inférieure de r diminuera dans le rapport de 1 à $\sqrt{n}$.

Afin de donner une application numérique, considérons un ellipsoïde de révolution homogène; supposons que le rayon de l'équateur ayant 1 décimètre de long, l'axe de révolution soit de 4 décimètres; pour que cet axe puisse rester sensiblement vertical, il suffira qu'on ait imprimé au corps une vitesse de rotation d'au moins dix tours par seconde.

II.

La méthode que nous venons de suivre pour déterminer le mouvement d'un ellipsoïde qui s'écarte peu d'une position d'équilibre, peut servir à résoudre le même problème pour un solide de forme quelconque, homogène ou hétérogène, mais tel, qu'un des axes principaux d'inertie pour le centre de gravité soit normal à la surface du corps. Lorsque cet axe est vertical, le solide posé sur un plan horizontal est en équilibre; supposons qu'on l'ait très-peu écarté de sa position d'équilibre, qu'on ait imprimé à tous ses points des vitesses très-petites, et, de plus, qu'on lui ait donné une vitesse de rotation quelconque autour de l'axe dont il s'agit. Nous nous proposons de savoir si cet axe restera toujours à peu près vertical, et de trouver le mouvement du corps lorsque cette circonstance aura lieu.

Soient Gx, Gy, Gz les trois axes principaux d'inertie relativement au centre de gravité, Gz étant celui qui reste sensiblement vertical : nommons γ la portion GA du prolongement de cet axe comprise entre le centre de gravité et la surface du corps, de sorte que A désigne le point de cette surface qui sert de point de contact dans la position d'équilibre. Nous aurons toujours les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) et (13), en conservant aux lettres qui s'y trouvent les significations que nous leur avons données dans le cas de l'ellipsoïde.

Si l'on rapporte la surface du corps aux trois axes Gx, Gy, Gz, les coordonnées x et y seront très-petites dans le voisinage du point A, et en nommant l, m, n les valeurs des dérivées partielles $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ pour ce point, on aura sensiblement dans les environs,

$$z = -\gamma + \tfrac{1}{2}(lx^2 + 2mxy + ny^2).$$

Regardons maintenant x, y, z comme les coordonnées du point de contact à l'époque t; la condition que la normale en ce point soit verticale nous donnera

$$\frac{lx + my}{a''} = \frac{mx + ny}{b''} = -\frac{1}{c''};$$

ou bien, en négligeant le carré de θ,

$$lx + my = -a'', \quad mx + ny = -b'',$$

d'où

$$x = \frac{mb'' - na''}{ln - m^2}, \quad y = \frac{ma'' - lb''}{ln - m^2}.$$

On voit que θ étant regardé comme une quantité très-petite du premier ordre, x et y sont du même ordre, de sorte qu'en négligeant les quantités du second ordre, on a

$$z = -\gamma.$$

Alors l'équation (13) nous donne

$$z_1 = \gamma,$$

d'où l'on conclut, comme ci-dessus,

$$R = Mg:$$

d'ailleurs les équations (7) et (8) nous montrent que p et q sont du premier ordre. Les équations (4), (5) et (6) se réduisent donc aux suivantes :

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,rq = Mg\left(\gamma b'' + \frac{ma'' - lb''}{ln - m^2}\right),$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = -\,Mg\left(\gamma a'' + \frac{mb'' - na''}{ln - m^2}\right),$$

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

La troisième nous apprend que r est une constante ; quant aux deux autres, en y remplaçant p en q par leurs valeurs trouvées plus haut,

$$ra'' + \frac{db''}{dt}, \quad rb'' - \frac{da''}{dt},$$

on les mettra sous la forme

$$A\frac{d^2 b''}{dt^2} + D\frac{da''}{dt} + Eb'' - Ga'' = 0,$$

$$B\frac{d^2 a''}{dt^2} - D\frac{db''}{dt} + Fa'' - Gb'' = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$D = (A + B - C)\,r,$$

$$G = \frac{Mgm}{ln - m^2},$$

$$E = (C - B)\,r^2 + Mg\left(\frac{l}{ln - m^2} - \gamma\right),$$

$$F = (C - A)\,r^2 + Mg\left(\frac{n}{ln - m^2} - \gamma\right).$$

Observons qu'on peut dans ces coefficients introduire, au lieu des quantités l, m, n, les rayons de courbure principaux de la surface du corps au point A : en effet, soient ρ et ρ' ces deux rayons et δ l'angle compris entre le plan Gxz et le plan de la section normale dont ρ est le rayon de courbure; on trouve sans peine

$$l = \frac{1}{\rho}\cos^2\delta + \frac{1}{\rho'}\sin^2\delta,$$

$$m = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\sin\delta\cos\delta,$$

$$n = \frac{1}{\rho}\sin^2\delta + \frac{1}{\rho'}\cos^2\delta,$$

d'où

$$\frac{l}{ln - m^2} = \rho \sin^2 \delta + \rho' \cos^2 \delta,$$

$$\frac{m}{ln - m^2} = (\rho' - \rho) \sin \delta \cos \delta,$$

$$\frac{n}{ln - m^2} = \rho \cos^2 \delta + \rho' \sin^2 \delta.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= (\mathrm{C} - \mathrm{B})\, r^2 + \mathrm{M}g\,[(\rho - \gamma)\sin^2 \delta + (\rho' - \gamma)\cos^2 \delta], \\ \mathrm{F} &= (\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r^2 + \mathrm{M}g\,[(\rho - \gamma)\cos^2 \delta + (\rho' - \gamma)\sin^2 \delta], \\ \mathrm{G} &= \mathrm{M}g\,(\rho' - \rho)\sin \delta \cos \delta. \end{aligned}$$

Pour intégrer les équations différentielles que nous venons d'obtenir, nous poserons

$$a'' = h \sin(\omega t) + h' \cos(\omega t), \quad b'' = k \sin(\omega t) + k' \cos(\omega t),$$

h, h', k, k', ω désignant des constantes : la substitution de ces valeurs nous donnera les quatre équations

$$\begin{aligned} (\mathrm{A}\omega^2 - \mathrm{E})\, k + \mathrm{G} h &= -\mathrm{D}\omega h', \\ (\mathrm{A}\omega^2 - \mathrm{E})\, k' + \mathrm{G} h' &= \mathrm{D}\omega h, \\ (\mathrm{B}\omega^2 - \mathrm{F})\, h + \mathrm{G} k &= \mathrm{D}\omega k', \\ (\mathrm{B}\omega^2 - \mathrm{F})\, h' + \mathrm{G} k' &= -\mathrm{D}\omega k. \end{aligned}$$

De la première et de la troisième on tire

$$h' = -\frac{(\mathrm{A}\omega^2 - \mathrm{E})\, k + \mathrm{G} h}{\mathrm{D}\omega}, \quad k' = \frac{(\mathrm{B}\omega^2 - \mathrm{F})\, h + \mathrm{G} k}{\mathrm{D}\omega} :$$

en portant ces valeurs dans les deux autres, on arrivera à une seule et même équation, savoir

$$(\mathrm{A}\omega^2 - \mathrm{E})(\mathrm{B}\omega^2 - \mathrm{F}) - \mathrm{D}^2\omega^2 - \mathrm{G}^2 = 0,$$

ou bien

$$\mathrm{AB}\omega^4 - (\mathrm{AF} + \mathrm{BE} + \mathrm{D}^2)\,\omega^2 + \mathrm{EF} - \mathrm{G}^2 = 0.$$

Appelons ω_1 et ω_2 deux racines de cette équation qui ne soient pas égales et de signes contraires, les intégrales complètes de nos deux équations différentielles seront

$$a'' = h_1 \sin(\omega_1 t) + h'_1 \cos(\omega_1 t) + h_2 \sin(\omega_2 t) + h'_2 \cos(\omega_2 t),$$
$$b'' = k_1 \sin(\omega_1 t) + k'_1 \cos(\omega_1 t) + k_2 \sin(\omega_2 t) + k'_2 \cos(\omega_2 t),$$

où h_1, h_2, k_1, k_2 sont quatre constantes arbitraires, tandis que h'_1, h'_2, k'_1, k'_2 sont données par les formules

$$h'_1 = -\frac{(A\omega^2 - E)\,k_1 + G h_1}{D\omega}, \quad k'_1 = \frac{(B\omega^2 - F)\,h_1 + G k_1}{D\omega},$$
$$h'_2 = -\frac{(A\omega^2 - E)\,k_2 + G h_2}{D\omega}, \quad k'_2 = \frac{(B\omega^2 - F)\,h_2 + G k_2}{D\omega}.$$

Ce que nous avons dit dans le cas de l'ellipsoïde de la recherche des autres variables et de la détermination des constantes arbitraires à l'aide des données initiales, s'étend sans difficulté au problème qui nous occupe ici.

Mais, pour que l'angle θ puisse rester toujours très-petit, comme nous l'avons supposé, il faut que les racines ω_1 et ω_2 soient réelles : les conditions nécessaires et suffisantes pour cela sont exprimées par les trois inégalités

$$(AF + BE + D^2)^2 - 4AB(EF - G^2) > 0,$$
$$EF - G^2 > 0,$$
$$AF + BE + D^2 > 0.$$

En ordonnant par rapport à r les premiers membres de ces inégalités, on les mettra sous la forme

$$C^2(A + B - C)^2 r^4 + H r^2 + I > 0,$$
$$(C - A)(C - B) r^4 + H' r^2 + I' > 0,$$
$$[(C - A)(C - B) + AB] r^2 + K > 0,$$

H, I, H′, I′, C désignant des quantités indépendantes de r. On voit, comme dans le cas de l'ellipsoïde, que si l'axe Gz est l'axe du plus grand ou du plus petit moment d'inertie, les conditions précédentes seront satisfaites dès que r surpassera une certaine limite. Ainsi, cet axe restera toujours sensiblement vertical, si la vitesse de rotation r

est suffisamment grande, pourvu qu'en même temps les valeurs initiales des variables θ, p, q soient assez petites.

Considérons, en particulier, le cas où la vitesse de rotation r est nulle ou très-petite : les inégalités à vérifier pour que l'axe Gz puisse rester toujours à peu près vertical, se réduiront à

$$\mathrm{I} > 0, \quad \mathrm{I}' > 0, \quad \mathrm{K} > 0,$$

ou bien

$$\begin{gathered}[(A\cos^2\delta + B\sin^2\delta)(\rho-\gamma) - (A\sin^2\delta + B\cos^2\delta)(\rho'-\gamma)]^2 \\ + 2(A-B)^2(\rho-\gamma)(\rho'-\gamma)\sin^2\delta\cos^2\delta > 0,\end{gathered}$$

$$(\rho-\gamma)(\rho'-\gamma) > 0,$$

$$(A\cos^2\delta + B\sin^2\delta)(\rho-\gamma) + (A\sin^2\delta + B\cos^2\delta)(\rho'-\gamma) > 0.$$

On conclut des deux dernières que γ doit être moindre à la fois que ρ et que ρ', et alors la première se trouve satisfaite. Par conséquent, lorsque les points du corps écarté de sa position d'équilibre n'auront reçu que des vitesses très-petites, l'axe Gz pourra rester sensiblement vertical, si la distance GA du centre de gravité à la surface du corps est moindre que les deux rayons de courbure principaux de cette surface au point A. On retrouve ainsi une proposition connue : mais pour une valeur finie de r, quelle qu'elle soit, on saura toujours, connaissant la constitution du corps, décider par l'analyse précédente si l'axe Gz peut ou non rester toujours très-voisin de la verticale : il suffira d'examiner si nos trois inégalités sont ou ne sont pas vérifiées.

III.

Considérons maintenant un corps pesant de forme quelconque ; par le centre de gravité G menons une normale à sa surface qui la perce en A ; ce corps est en équilibre lorsqu'il repose sur un plan horizontal par le point A. Concevons qu'on l'écarte un peu de cette position d'équilibre et qu'on imprime de très-petites vitesses à tous ses points ; nous nous proposons de déterminer le mouvement qui a lieu dans le cas où la droite GA reste toujours à peu près verticale.

Soient toujours OX, OY, OZ trois axes rectangulaires fixes dont les deux premiers sont dans le plan horizontal fixe, et Gx, Gy, Gz les axes principaux d'inertie pour le centre de gravité. Conservons aux lettres x_1, y_1, z_1, φ, ψ, θ, p, q, r, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', N, M, g la signification que nous leur avons donnée jusqu'à présent, et nommons toujours γ la distance GA qui n'est plus dirigée suivant Gz. Imaginons, en outre, trois nouveaux axes rectangulaires emportés avec le corps, ayant leur origine en A et dont l'un $A\zeta$ est dirigé suivant la normale AG, tandis que les deux autres $A\xi$, $A\eta$ sont tangents aux sections normales principales en A. Désignons par θ_1 l'angle que fait Gz avec $A\zeta$ et par φ_1 et ψ_1 les angles que fait avec $A\xi$ et Gx l'intersection des plans $A\xi\eta$, Gxy : ces angles seront des constantes qui dépendront de la forme et de la constitution du corps. Nommons a_1, a'_1, a''_1 les cosinus des angles que Gx fait avec $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$, et pareillement b_1, b'_1, b''_1, c_1, c'_1, c''_1 les cosinus analogues pour Gy et Gz. On aura les équations

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
a_1 &= \cos\varphi_1\cos\psi_1 - \sin\varphi_1\sin\psi_1\cos\theta_1,\\
a'_1 &= \sin\varphi_1\cos\psi_1 + \cos\varphi_1\sin\psi_1\cos\theta_1,\\
a''_1 &= \sin\psi_1\sin\theta_1;\\
b_1 &= -\cos\varphi_1\sin\psi_1 - \sin\varphi_1\cos\psi_1\cos\theta_1,\\
b'_1 &= -\sin\varphi_1\sin\psi_1 + \cos\varphi_1\cos\psi_1\cos\theta_1,\\
b''_1 &= \cos\psi_1\sin\theta_1;\\
c_1 &= \sin\varphi_1\sin\theta_1,\\
c'_1 &= -\cos\varphi_1\sin\theta_1,\\
c''_1 &= \cos\theta_1;
\end{aligned}\right.$$

et aussi les relations connues

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{lll}
b'_1c''_1 - c'_1b''_1 = a_1, & c'_1a''_1 - a'_1c''_1 = b_1, & a'_1b''_1 - b'_1a''_1 = c_1,\\
c_1b''_1 - b_1c''_1 = a'_1, & a_1c''_1 - c_1a''_1 = b'_1, & b_1a''_1 - a_1b''_1 = c'_1.\\
b_1c'_1 - c_1b'_1 = a''_1, & c_1a'_1 - a_1c'_1 = b''_1, & a_1b'_1 - b_1a'_1 = c''_1.
\end{array}\right.$$

Pour les points de la surface voisins du point A, on aura approximativement

$$\zeta - \frac{\xi^2}{2\rho} - \frac{\eta^2}{2\rho'} = 0,$$

ρ et ρ' désignant les rayons de courbure principaux au point A. Cette équation, qui représente la surface du corps rapportée aux axes $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$, deviendra celle de la même surface rapportée aux axes Gx, Gy, Gz si l'on y fait

$$\begin{aligned}\xi &= a_1 x + b_1 y + c_1 z,\\ \eta &= a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z,\\ \zeta &= \gamma + a''_1 x + b''_1 y + c''_1 z.\end{aligned}$$

Représentons par V ce que devient après cette substitution le premier membre

$$\zeta - \frac{\xi^2}{2\rho} - \frac{\eta^2}{2\rho'}:$$

les cosinus des angles que la normale à la surface au point (ξ, η, ζ) fait avec les axes Gx, Gy, Gz seront respectivement proportionnels aux trois dérivées partielles

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} &= a''_1 - a_1\frac{\xi}{\rho} - a'_1\frac{\eta}{\rho'},\\ \frac{dV}{dy} &= b''_1 - b_1\frac{\xi}{\rho} - b'_1\frac{\eta}{\rho'},\\ \frac{dV}{dz} &= c''_1 - c_1\frac{\xi}{\rho} - c'_1\frac{\eta}{\rho'}.\end{aligned}$$

Cela posé, regardons les coordonnées $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ comme celles du point de contact à l'époque t : la normale en ce point devant être verticale, on aura

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{a''}\left(a''_1 - a_1\frac{\xi}{\rho} - a'_1\frac{\eta}{\rho'}\right) &= \frac{1}{b''}\left(b''_1 - b_1\frac{\xi}{\rho} - b'_1\frac{\eta}{\rho'}\right)\\ &= \frac{1}{c''}\left(c''_1 - c_1\frac{\xi}{\rho} - c'_1\frac{\eta}{\rho'}\right).\end{aligned}\right.$$

Mais la ligne GA restant toujours à peu près verticale, les angles θ et ψ diffèrent peu de θ_1 et de ψ_1 : posons donc

$$\theta = \theta_1 + \delta\theta,\quad \psi = \psi_1 + \delta\psi,$$

$\delta\theta$ et $\delta\psi$ désignant des variables très-petites que nous regarderons comme du premier ordre; faisons de même

$$a'' = a''_1 + \delta a'', \quad b'' = b''_1 + \delta b'', \quad c'' = c''_1 + \delta c'',$$

et, enfin, observons que les coordonnées ξ, η du point de contact sont aussi très-petites. En négligeant, dans les équations (19), les termes d'ordre supérieur, on les mettra sous la forme

$$\frac{1}{a''_1}\left(a_1\frac{\xi}{\rho} + a'_1\frac{\eta}{\rho'} + \frac{\delta a''}{a''_1}\right) = \frac{1}{b''_1}\left(b_1\frac{\xi}{\rho} + b'_1\frac{\eta}{\rho'} + \frac{\delta b''}{b''_1}\right)$$
$$= \frac{1}{c''_1}\left(c_1\frac{\xi}{\rho} + c'_1\frac{\eta}{\rho'} + \frac{\delta c''}{c''_1}\right),$$

ou bien

$$(a_1 c''_1 - c_1 a''_1)\frac{\xi}{\rho} + (a'_1 c''_1 - c'_1 a''_1)\frac{\eta}{\rho'} = a''_1\,\delta c'' - c''_1\,\delta a'',$$

$$(c_1 b''_1 - b_1 c''_1)\frac{\xi}{\rho} + (c'_1 b''_1 - b'_1 c''_1)\frac{\eta}{\rho'} = c''_1\,\delta b' - b''_1\,\delta c'',$$

ou encore, en vertu des relations (18),

$$b'_1\frac{\xi}{\rho} - b_1\frac{\eta}{\rho'} = a''_1\,\delta c'' - c''_1\,\delta a'',$$

$$a'_1\frac{\xi}{\rho} - a_1\frac{\eta}{\rho'} = c''_1\,\delta b'' - b''_1\,\delta c'':$$

on en tire, en ayant égard aux mêmes relations,

$$c''_1\frac{\xi}{\rho} = a_1(a''_1\,\delta c'' - c''_1\,\delta a'') - b_1(c''_1\,\delta b'' - b''_1\,\delta c''),$$

$$c''_1\frac{\eta}{\rho} = a'_1(a''_1\,\delta c'' - c''_1\,\delta a'') - b'_1(c''_1\,\delta b'' - b''_1\,\delta c'').$$

Mais des valeurs de a'', b'', c'' on déduit $\delta a''$, $\delta b''$, $\delta c''$, et, par suite, on trouve sans peine

$$(20)\quad \begin{cases} a''_1\,\delta c'' - c''_1\,\delta a'' = -\,\delta\theta \sin\psi_1 - \delta\psi \cos\psi_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1, \\ c''_1\,\delta b'' - b''_1\,\delta c'' = \delta\theta \cos\psi_1 - \delta\psi \sin\psi_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1, \\ b''_1\,\delta a'' - a''_1\,\delta b'' = \delta\psi \sin^2\theta_1 : \end{cases}$$

il en résulte, en ayant égard aux formules (17),

$$(21)\quad \begin{cases} \xi = \rho\,(\delta\theta \sin\varphi_1 - \delta\psi \cos\varphi_1 \sin\theta_1), \\ \eta = -\,\rho'(\delta\theta \cos\varphi_1 + \delta\psi \sin\varphi_1 \sin\theta_1). \end{cases}$$

On voit que ξ et η sont de très-petites quantités du premier ordre et qu'ainsi ζ est du second.

Il nous sera facile maintenant de calculer les différences $c''y - b''z$, $a''z - c''x$, $b''x - a''y$ qui entrent dans les équations (4), (5) et (6): on a, en effet, en négligeant ζ,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} x &= -a''_1\gamma + a_1\xi + a'_1\eta,\\ y &= -b''_1\gamma + b_1\xi + b'_1\eta,\\ z &= -c''_1\gamma + c_1\xi + c'_1\eta;\end{aligned}\right.$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} c''y - b''z = {} & (c''_1 + \delta c'')(-b''_1\gamma + b_1\xi + b'_1\eta)\\ & - (b''_1 + \delta b'')(-c''_1\gamma + c_1\xi + c'_1\eta),\end{aligned}$$

ou bien, en supprimant les termes du second ordre,

$$\begin{aligned} c''y - b''z &= (c''_1\delta b'' - b''_1\delta c'')\gamma - (c_1 b''_1 - b_1 c''_1)\xi + (b'_1 c''_1 - c'_1 b''_1)\eta\\ &= (c''_1\delta b''_1 - b''_1\delta c'')\gamma - a'_1\xi + a_1\eta.\end{aligned}$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned} a''z - c''x &= (a''_1\delta c'' - c''_1\delta a'')\gamma - b'_1\xi + b_1\eta,\\ b''x - a''y &= (b''_1\delta a'' - a''_1\delta b'')\gamma - c'_1\xi + c_1\eta.\end{aligned}$$

Substituons maintenant dans ces formules les valeurs fournies par les équations (20) et (21), et il viendra

$$\begin{aligned} c''y - b''z &= \mathrm{D}\,\delta\psi\sin\theta_1 - \mathrm{E}\,\delta\theta,\\ a''z - c''x &= \mathrm{F}\,\delta\psi\sin\theta_1 - \mathrm{G}\,\delta\theta,\\ b''x - c''y &= \mathrm{H}\,\delta\psi\sin\theta_1 - \mathrm{I}\,\delta\theta,\end{aligned}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} &\rho - \gamma = \varpi, && \rho' - \gamma = \varpi',\\ &\mathrm{D} = \varpi a'_1\cos\varphi_1 - \varpi' a_1\sin\varphi_1, && \mathrm{E} = \varpi a'_1\sin\varphi_1 + \varpi' a_1\cos\varphi_1,\\ &\mathrm{F} = \varpi b'_1\cos\varphi_1 - \varpi' b_1\sin\varphi_1, && \mathrm{G} = \varpi b'_1\sin\varphi_1 + \varpi' b_1\cos\varphi_1,\\ &\mathrm{H} = \varpi c'_1\cos\varphi_1 - \varpi' c_1\sin\varphi_1, && \mathrm{I} = \varpi c'_1\sin\varphi_1 + \varpi' c_1\cos\varphi_1.\end{aligned}$$

Observons ensuite que si, dans l'équation (13), on porte les valeurs (22) de x, y, z, elle se réduira, en négligeant les termes du second ordre, à

$$z_1 - \gamma = 0:$$

il en résulte, en vertu de l'équation (3),

$$N = Mg.$$

Substituons toutes ces valeurs dans les équations (4), (5) et (6); mettons-y pour p, q, r leurs valeurs approchées [*]

$$p = \sin\psi_1 \sin\theta_1 \frac{d\varphi}{dt} + \cos\psi_1 \frac{d\delta\theta}{dt},$$

$$q = \cos\psi_1 \sin\theta_1 \frac{d\varphi}{dt} - \sin\psi_1 \frac{d\delta\theta}{dt},$$

$$r = \frac{d\delta\psi}{dt} + \cos\theta_1 \frac{d\varphi}{dt};$$

enfin, négligeons-y les produits qr, pr, pq qui sont du second ordre; ces équations deviendront

$$A \sin\psi_1 \sin\theta_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + A \cos\psi_1 \frac{d^2\delta\theta}{dt^2} = Mg\,(D\,\delta\psi \sin\theta_1 - E\,\delta\theta),$$

$$B \cos\psi_1 \sin\theta_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - A \sin\psi_1 \frac{d^2\delta\theta}{dt^2} = Mg\,(F\,\delta\psi \sin\theta_1 - G\,\delta\theta),$$

$$C \frac{d^2\delta\psi}{dt^2} + C\cos\theta_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mg\,(H\,\delta\psi \sin\theta_1 - I\,\delta\theta).$$

Nous sommes donc arrivés à trois équations différentielles linéaires du second ordre entre le temps et les trois inconnues φ, $\delta\psi$, $\delta\theta$.

Commençons par éliminer φ : pour cela, nous observerons qu'on peut toujours supposer que l'axe principal Gz n'est pas perpendiculaire à la droite AG; car il y a toujours au moins un des axes principaux qui n'est pas perpendiculaire à cette droite. Alors, $\cos\theta_1$ n'étant pas zéro, la troisième de nos équations nous donnera

$$(23) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{Mg\,(H\,\delta\psi \sin\theta_1 - I\,\delta\theta)}{C\cos\theta_1} - \frac{1}{\cos\theta_1}\frac{d^2\delta\psi}{dt^2},$$

---

[*] Il faut remarquer que $\frac{d\varphi}{dt}$ sera toujours une très-petite quantité : cela résulte de l'équation (9).

et, en mettant cette valeur dans les deux autres, puis posant

$$P = CD\cos\theta_1 - AH\sin\psi_1\sin\theta_1,\quad Q = CE\cos\theta_1 - AI\sin\psi_1\sin\theta_1,$$

$$R = BH\cos\psi_1\sin\theta_1 - CF\cos\theta_1,\quad S = BI\cos\psi_1\sin\theta_1 - CG\cos\theta_1,$$

nous trouverons

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &AC\cos\psi_1\cos\theta_1\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} - AC\sin\psi_1\sin\theta_1\frac{d^2\delta\psi}{dt^2} \\ &\qquad = Mg(P\delta\psi\sin\theta_1 - Q\delta\theta), \\ &BC\sin\psi_1\cos\theta_1\frac{d^2\delta\theta}{dt^2} + BC\cos\psi_1\sin\theta_1\frac{d^2\delta\psi}{dt^2} \\ &\qquad = Mg(R\delta\psi\sin\theta_1 - S\delta\theta). \end{aligned}\right.$$

Pour intégrer ces deux équations, ajoutons-les après avoir multiplié la seconde par un facteur constant λ; il deviendra

$$\frac{d^2[(A\sin\psi_1 - \lambda B\cos\psi_1)\delta\psi\sin\theta_1 - (A\cos\psi_1 + \lambda B\sin\psi_1)\delta\theta\cos\theta_1]}{dt^2}$$
$$+\frac{Mg}{C}[(P+\lambda R)\delta\psi\sin\theta_1 - (Q+\lambda S)\delta\theta] = 0.$$

Déterminons les constantes λ et ω de façon qu'on ait

$$(25)\qquad \frac{P+\lambda R}{A\sin\psi_1 - \lambda B\cos\psi_1} = \frac{Q+\lambda S}{(A\cos\psi_1 + \lambda B\sin\psi_1)\cos\theta_1} = \omega:$$

alors l'équation précédente prendra la forme

$$\frac{d^2[(P+\lambda R)\delta\psi\sin\theta_1 - (Q+\lambda S)\delta\theta]}{dt^2}$$
$$+\frac{Mg\omega}{C}[(P+\lambda R)\delta\psi\sin\theta_1 - (Q+\lambda S)\delta\theta] = 0.$$

et nous saurons l'intégrer immédiatement.

Des conditions auxquelles nous avons assujetti λ et ω, on déduit, en éliminant λ,

$$AB\cos\theta_1\,.\,\omega^2 - \left(\begin{aligned} BP\sin\psi_1\cos\theta_1 + BQ\cos\psi_1 \\ - AR\cos\psi_1\cos\theta_1 + AS\sin\psi_1 \end{aligned}\right)\omega + PS - QR = 0.$$

Nommons ω' et ω'' les deux racines de cette équation; appelons λ' et λ'' les valeurs correspondantes de λ qui se déduiront de l'une des deux équations (25) : les intégrales complètes des équations différentielles (24) seront

$$(P + \lambda' R)\,\delta\psi \sin\theta_1 - (R + \lambda' S)\,\delta\theta = h' \sin\left(t\sqrt{\frac{Mg\omega'}{C}} + \varepsilon'\right),$$

$$(P + \lambda'' R)\,\delta\psi \sin\theta_1 - (Q + \lambda'' S)\,\delta\theta = h'' \sin\left(t\sqrt{\frac{Mg\omega''}{C}} + \varepsilon''\right),$$

h', h'', ε', ε'' désignant des constantes arbitraires, et ces formules feront connaître $\delta\psi$ et $\delta\theta$ en fonction du temps.

Pour que ces variables restent toujours très-petites, il faut que les racines ω' et ω'' soient réelles et positives : or, si aux quantités P, Q, R, S on substitue leurs valeurs, l'équation en ω prendra la forme

$$\begin{aligned} AB\omega^2 - &\left[\begin{matrix} BC(\varpi a_1'^2 + \varpi' a_1^2) + AC(\varpi b_1'^2 + \varpi' b_1^2) \\ + AB(\varpi c_1'^2 + \varpi' c_1^2) \end{matrix}\right]\omega \\ &+ C\varpi\varpi'(A a_1''^2 + B b_1''^2 + C c_1''^2) = 0. \end{aligned}$$

On voit d'abord que ϖ et ϖ' doivent être positifs tous deux, c'est-à-dire que la distance GA du centre de gravité à la surface du corps doit être moindre que chacun des rayons de courbure principaux au point A. C'est la condition connue de la stabilité de l'équilibre : pour nous assurer qu'elle est suffisante, il faut prouver que, ϖ et ϖ' étant positifs, l'équation précédente aura ses racines réelles, auquel cas elles seront nécessairement positives. Il s'agit donc de vérifier que la quantité

$$\begin{aligned} K = &\left[BC(\varpi a_1'^2 + \varpi' a_1^2) + AC(\varpi b_1'^2 + \varpi' b^2) + AB(\varpi c_1'^2 + \varpi' c_1^2)\right]^2 \\ &- 4ABC(A a_1''^2 + B b_1''^2 + C c_1''^2)\varpi\varpi' \end{aligned}$$

est positive : or, si l'on fait

$$\begin{aligned} BC a_1^2 + AC b_1^2 + AB c_1^2 &= l, \\ BC a_1'^2 + AC b_1'^2 + AB c_1'^2 &= l', \\ ABC(A a_1''^2 + B b_1''^2 + C c_1''^2) &= m, \end{aligned}$$

l, l', m seront des quantités positives, et l'on aura

$$K = (l'\varpi + l\varpi')^2 - 4m\varpi\varpi' = (l'\varpi - l\varpi')^2 + 4(ll' - m)\varpi\varpi';$$

d'ailleurs, les valeurs précédentes de l, l', m nous donnent

$$\begin{aligned} ll' - m = {} & B^2C^2 a_1^2 a_1'^2 + A^2C^2 b_1^2 b_1'^2 + A^2B^2 c_1^2 c_1'^2 \\ & + A^2BC(b_1^2 c_1'^2 + c_1^2 b_1'^2 - a_1''^2) + AB^2C(a_1^2 c_1'^2 + c_1^2 a_1'^2 - b_1''^2) \\ & + ABC^2(a_1^2 b_1'^2 + b_1^2 a_1'^2 - c_1''^2), \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des relations (18),

$$ll' - m = (BC a_1 a_1' + AC b_1 b_1' + AB c_1 c_1')^2 :$$

il en résulte

$$K = (l'\varpi - l\varpi')^2 + 4(BC a_1 a_1' + AC b_1 b_1' + AB c_1 c_1')^2 \varpi\varpi',$$

par où l'on voit que la quantité K sera positive, lorsque ϖ et ϖ' le seront.

Les variables $\delta\psi$ et $\delta\theta$ étant connues en fonction du temps, si on les porte dans l'équation (23) et qu'on l'intègre, on aura pour l'angle φ une expression de la forme

$$\alpha t + \beta + k' \sin\left(t\sqrt{\frac{Mg\omega'}{C}} + \varepsilon'\right) + k'' \sin\left(t\sqrt{\frac{Mg\omega''}{C}} + \varepsilon''\right);$$

où k' et k'' sont très-petits à cause des facteurs très-petits h' et h'' et où α l'est également, attendu que la valeur initiale de $\frac{d\varphi}{dt}$ doit être très-petite. On voit que la valeur de φ se compose de trois parties dont deux sont périodiques, tandis que la troisième croît indéfiniment avec le temps, mais très-lentement.

Il ne serait donc pas exact de dire que le corps dont nous nous occupons s'écarte toujours très-peu de sa position initiale; car, indépendamment de la translation horizontale du centre de gravité, laquelle se fait uniformément et en ligne droite en vertu des équations

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0,$$

le corps tournera autour de la verticale passant par ce centre d'un angle qui ordinairement croîtra sans limite, bien que toutes les vitesses initiales soient très-petites.

J'indiquerai encore une propriété assez curieuse du mouvement que nous venons de déterminer : soient x, y, z les coordonnées par rapport aux axes principaux d'un point quelconque de la masse du corps, et X, Y, Z les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes OX, OY, OZ : les premières seront des constantes, tandis que les dernières varieront avec le temps, et l'on aura

$$Z = z_1 + a''x + b''y + c''z = z_1 + x \sin(\psi_1 + \delta\psi)\sin(\theta_1 + \delta\theta) + y\cos(\psi_1 + \delta\psi)\sin(\theta_1 + \delta\theta) + z\cos(\theta_1 + \delta\theta),$$

ou bien, en négligeant les quantités du second ordre,

$$\begin{aligned} Z = \gamma &+ x(\sin\psi_1 \sin\theta_1 + \delta\psi\cos\psi_1\sin\theta_1 + \delta\theta\sin\psi_1\cos\theta_1) \\ &+ y(\cos\psi_1\sin\theta_1 - \delta\psi\sin\psi_1\sin\theta_1 + \delta\theta\cos\psi_1\cos\theta_1) \\ &+ z(\cos\theta_1 - \delta\theta\sin\theta_1). \end{aligned}$$

Appelons Z_1 la valeur de Z dans la position d'équilibre du corps, de sorte qu'on ait

$$Z_1 = \gamma + x\sin\psi_1\sin\theta_1 + y\cos\psi_1\sin\theta_1 + z\cos\theta_1 ;$$

la valeur précédente de Z pourra s'écrire

$$\begin{aligned} Z = Z_1 &+ (x\cos\psi_1 - y\sin\psi_1)\,\delta\psi\sin\theta_1 \\ &+ (x\sin\psi_1\cos\theta_1 + y\cos\psi_1\cos\theta_1 - z\sin\theta_1)\,\delta\theta. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les points du corps dont les coordonnées rapportées aux axes principaux satisfont à l'équation du premier degré

$$\frac{x\cos\psi_1 - y\sin\psi_1}{P + \lambda' R} + \frac{x\sin\psi_1\cos\theta_1 + y\cos\psi_1\cos\theta_1 - z\sin\theta_1}{Q - \lambda' S} = 0 :$$

tous ces points seront dans un même plan Π' passant par la droite GA, et pour tous les points de ce plan on aura

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + \frac{x\cos\psi_1 - y\sin\psi_1}{P + \lambda' R}\left[(P + \lambda' R)\,\delta\psi\sin\theta_1 - (Q + \lambda' S)\,\delta\theta\right] \\ &= Z_1 + \frac{x\cos\psi_1 - y\sin\psi_1}{P + \lambda' R}\cdot h'\sin\left(t\sqrt{\frac{Mg\omega'}{C}} + \varepsilon'\right). \end{aligned}$$

On voit donc que le plan Π' étant emporté avec le corps, la projection de chacun de ses points sur une verticale oscillera, comme le fait l'extrémité d'un pendule simple, de part et d'autre de la position qu'elle occupe lorsque le corps est en équilibre : toutes ces projections passeront en même temps par leurs positions moyennes, de façon que la durée commune de leurs oscillations soit égale à $\pi\sqrt{\frac{C}{Mg\omega'}}$, et les amplitudes de ces mêmes oscillations seront proportionnelles aux distances des points du plan Π' à la droite GA.

Il existe un deuxième plan Π'' passant aussi par GA et jouissant de la même propriété : il a pour équation

$$\frac{x\cos\psi_1 - y\sin\psi_1}{P+\lambda''R} + \frac{x\sin\psi_1\cos\theta_1 + y\cos\psi_1\cos\theta_1 - z\sin\theta_1}{Q+\lambda''S} = 0,$$

et la durée des oscillations exécutées par les projections de ses points sur une verticale est égale à $\pi\sqrt{\frac{C}{Mg\omega''}}$.

La position dans le corps des plans Π' et Π'' et les durées des oscillations dont on vient de parler ne dépendent pas des circonstances initiales, mais seulement de la forme et de la constitution du corps. On peut se demander, par exemple, dans quel cas ces deux plans seront perpendiculaires entre eux.

Leurs équations étant mises sous la forme

$$\begin{aligned}
&x[Q\cos\psi_1 + P\sin\psi_1\cos\theta_1 + \lambda'(S\cos\psi_1 + R\sin\psi_1\cos\theta_1)]\\
&-y[Q\sin\psi_1 - P\cos\psi_1\cos\theta_1 + \lambda'(S\sin\psi_1 - R\cos\psi_1\cos\theta_1)]\\
&-z(P\sin\theta_1 + \lambda'R\sin\theta_1) = 0,\\
&x[Q\cos\psi_1 + P\sin\psi_1\cos\theta_1 + \lambda''(S\cos\psi_1 + R\sin\psi_1\cos\theta_1)]\\
&-y[Q\sin\psi_1 - P\cos\psi_1\cos\theta_1 + \lambda''(S\sin\psi_1 - R\cos\psi_1\cos\theta_1)]\\
&-z(P\sin\theta_1 + \lambda''R\sin\theta_1) = 0,
\end{aligned}$$

on voit que les deux plans seront rectangulaires si la quantité

$$\begin{aligned}
A = {} & [Q\cos\psi_1 + P\sin\psi_1\cos\theta_1 + \lambda'(S\cos\psi_1 + R\sin\psi_1\cos\theta_1)]\\
& \times[Q\cos\psi_1 + P\sin\psi_1\cos\theta_1 + \lambda''(S\cos\psi_1 + R\sin\psi_1\cos\theta_1)]\\
& +[Q\sin\psi_1 - P\cos\psi_1\cos\theta_1 + \lambda'(S\sin\psi_1 - R\cos\psi_1\cos\theta_1)]\\
& \times[Q\sin\psi_1 - P\cos\psi_1\cos\theta_1 + \lambda''(S\sin\psi_1 - R\cos\psi_1\cos\theta_1)]\\
& +(P\sin\theta_1 + \lambda'R\sin\theta_1)(P\sin\theta_1 + \lambda''R\sin\theta_1)\\
= {} & P^2 + Q^2 + (PR+QS)(\lambda'+\lambda'') + (R^2+S^2)\lambda'\lambda''
\end{aligned}$$

se réduit à zéro. Mais λ' et λ'' sont les deux racines de l'équation du second degré

$$\begin{aligned}&(\mathrm{BR}\sin\psi_1\cos\theta_1+\mathrm{BS}\cos\psi_1)\lambda^2\\ &+(\mathrm{BP}\sin\psi_1\cos\theta_1+\mathrm{BQ}\cos\psi_1+\mathrm{AR}\cos\psi_1\cos\theta_1-\mathrm{AS}\sin\psi_1)\lambda\\ &+\mathrm{AP}\cos\psi_1\cos\theta_1-\mathrm{AQ}\sin\psi_1=0:\end{aligned}$$

on a donc

$$\lambda'+\lambda''=-\frac{\mathrm{BP}\sin\psi_1\cos\theta_1+\mathrm{BQ}\cos\psi_1+\mathrm{AR}\cos\psi_1\cos\theta_1-\mathrm{AS}\sin\psi_1}{\mathrm{BR}\sin\psi_1\cos\theta_1+\mathrm{BS}\cos\psi_1},$$

$$\lambda'\lambda''=\frac{\mathrm{AP}\cos\psi_1\cos\theta_1-\mathrm{AQ}\sin\psi_1}{\mathrm{BR}\sin\psi_1\cos\theta_1+\mathrm{BS}\cos\psi_1}.$$

Substituons ces valeurs dans l'expression de Λ et multiplions-la par

$$\mathrm{BR}\sin\psi_1\cos\theta_1+\mathrm{BS}\cos\psi_1;$$

elle deviendra

$$\begin{aligned}&\mathrm{B}(\mathrm{R}\sin\psi_1\cos\theta_1+\mathrm{S}\cos\psi_1)(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)\\ &-\left[\begin{array}{l}\quad\mathrm{B}(\mathrm{P}\sin\psi_1\cos\theta_1+\mathrm{Q}\cos\psi_1)\\ +\mathrm{A}(\mathrm{R}\cos\psi_1\cos\theta_1-\mathrm{S}\sin\psi_1)\end{array}\right](\mathrm{PR}+\mathrm{QS})\\ &+\mathrm{A}(\mathrm{P}\cos\psi_1\cos\theta_1-\mathrm{Q}\sin\psi_1)(\mathrm{R}^2+\mathrm{S}^2)=\Lambda',\end{aligned}$$

et pour que les deux plans soient rectangulaires, il faudra qu'on ait

$$\Lambda'=0.$$

Or, en remplaçant P, Q, R, S par leurs valeurs, on trouvera

$$\Lambda'=\mathrm{C}\varpi\varpi'(\varpi-\varpi')\cos^2\theta_1(\mathrm{A}a_1''^2+\mathrm{B}b_1''^2+\mathrm{C}c_1''^2)(\mathrm{BC}a_1a_1'+\mathrm{AC}b_1b_1'+\mathrm{AB}c_1c_1'):$$

les facteurs ϖ, ϖ', $\cos\theta_1$ ne sont pas nuls par hypothèse; les facteurs

$$\mathrm{C}\quad\text{et}\quad \mathrm{A}a_1''^2+\mathrm{B}b_1''^2+\mathrm{C}c_1''^2$$

ne peuvent l'être. Pour que Λ' se réduise à zéro, il faut donc que l'un des deux autres facteurs

$$\varpi-\varpi'=\rho-\rho'$$

et

$$\mathrm{BC}a_1a_1'+\mathrm{AC}b_1b_1'+\mathrm{AB}c_1c_1'$$

soit égal à zéro. Ainsi, les plans Π et Π' seront perpendiculaires entre eux dans deux cas :

1°. Lorsque les rayons de courbure principaux au point A seront égaux ;

2°. Lorsque les moments principaux d'inertie vérifieront l'équation

$$\mathrm{BC}\,a_1 a'_1 + \mathrm{AC}\,b_1 b'_1 + \mathrm{AB}\,c_1 c'_1 = 0,$$

laquelle, en ayant égard à la relation

$$a_1 a'_1 + b_1 b'_1 + c_1 c'_1 = 0,$$

peut encore se mettre sous la forme

$$\mathrm{B}(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,a_1 a'_1 + \mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{C})\,b_1 b'_1 = 0 :$$

cette condition se trouvera remplie en particulier, lorsque les trois moments principaux A, B, C seront égaux.