JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FAÀ DE BRUNO

Démonstration d'un théorème relatif à la réduction des fonctions homogènes à deux lettres à leur forme canonique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 193-201.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__193_0>

DÉMONSTRATION

D'un théorème relatif à la réduction des fonctions homogènes à deux lettres à leur forme canonique;

Par M. FAÀ DE BRUNO.

Étant donnée une fonction homogène à plusieurs lettres de degré quelconque, on peut généralement se proposer de la mettre sous une forme plus simple et plus concise, telle que la somme de puissances de même degré de fonctions linéraires des mêmes lettres. En nous bornant au cas des fonctions de deux lettres, dont le type général est

$$a_0 x^m + ma_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots$$
$$+ ma_{m-1} xy^{m-1} + a_m y^m,$$

on reconnaît aisément que, par suite des conditions auxquelles il faut satisfaire, ces fonctions admettent l'une des deux formes

$$(\alpha_0 x + \beta_0 y)^m + (\alpha_1 x + \beta_1 y)^m + \ldots + \left(\alpha_{\frac{m-1}{2}} x + \beta_{\frac{m-1}{2}} y\right)^m,$$
$$(\alpha_0 x + \beta_0 y)^m + (\alpha_1 x + \beta_1 y)^m + \ldots$$
$$+ \mathrm{A}(\alpha_0 x + \alpha_1 y)^2 (\alpha_1 x + \beta_1 y)^2 \ldots \left(\alpha_{\frac{m}{2}} x + \beta_{\frac{m}{2}} y\right)^2,$$

selon que m sera impair ou pair. Ce sujet a été abordé dernièrement par M. Sylvester, géomètre anglais très-profond, qui a bien voulu me communiquer le résultat obtenu par lui sur les fonctions du cinquième degré, mais sans m'en donner la démonstration. Ayant essayé de le retrouver moi-même, j'ai été conduit tout naturellement à la démonstration du théorème pour un degré quelconque impair, que j'ose présenter ici à la bienveillance des lecteurs.

En appelant, suivant la dénomination de M. Hermite et de M. Sylvester, *forme canonique* l'une des deux formes que je viens d'écrire, l'énoncé du théorème est celui-ci :

Une fonction homogène à deux lettres de degré quelconque impair $2n+1$ peut être réduite à sa forme canonique par la résolution d'une équation de degré $n+1$.

Soit

$$(1)\quad a_0 x^{2n+1} + \frac{2n+1}{1} a_1 x^{2n} y + \frac{(2n+1).2n}{1.2} a_2 x^{2n-1} y^2 + \ldots + \frac{2n+1}{1} a_{2n} x y^{2n} + a_{2n+1} y^{2n+1}$$

une telle fonction, et

$$(2)\quad p_0 (x+\alpha_0 y)^{2n+1} + p_1 (x+\alpha_1 y)^{2n+1} + p_2 (x+\alpha_2 y)^{2n+1} + \ldots + p_n (x+\alpha_n y)^{2n+1}$$

sa forme canonique, où $p_0, p_1, \ldots, p_n$; $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les inconnues à déterminer. Nous aurons évidemment les $2n+2$ équations suivantes :

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n = a_0, \\ p_0 \alpha_0 + p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \ldots + p_{n-1} \alpha_{n-1} + p_n \alpha_n = a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_0 \alpha_0^{2n} + p_1 \alpha_1^{2n} + p_2 \alpha_2^{2n} + \ldots + p_{n-1} \alpha_{n-1}^{2n} + p_n \alpha_n^{2n} = a_{2n}, \\ p_0 \alpha_0^{2n+1} + p_1 \alpha_1^{2n+1} + p_2 \alpha_2^{2n+1} + \ldots + p_{n-1} \alpha_{n-1}^{2n+1} + p_n \alpha_n^{2n+1} = a_{2n+1}. \end{array} \right.$$

Pour effectuer l'élimination, j'ajoute chacune de ces équations à la précédente multipliée par un facteur indéterminé λ. J'ai ainsi, en posant

$$p' = p(\lambda + \alpha),$$

un système de $2n+1$ équations seulement, savoir :

$$\begin{array}{l} p'_0 + p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_{n-1} + p'_n = a_0 \lambda + a_1, \\ p'_0 \alpha_0 + p'_1 \alpha_1 + p'_2 \alpha_2 + \ldots + p'_{n-1} \alpha_{n-1} + p'_n \alpha_n = a_1 \lambda + a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p'_0 \alpha_0^{2n-1} + p'_1 \alpha_1^{2n-1} + p'_2 \alpha_2^{2n-1} + \ldots + p'_{n-1} \alpha_{n-1}^{2n-1} + p'_n \alpha_n^{2n-1} = a_{2n-1} \lambda + a_{2n}, \\ p'_0 \alpha_0^{2n} + p'_1 \alpha_1^{2n} + p'_2 \alpha_2^{2n} + \ldots + p'_{n-1} \alpha_{n-1}^{2n} + p'_n \alpha_n^{2n} = a_{2n} \lambda + a_{2n+1}. \end{array}$$

Opérant de la même manière sur ce système, et continuant encore jusqu'à ce que l'on arrive à poser

$$p^{(n)} = p(\lambda + \alpha)^{n+1},$$

on aura en dernier lieu :

$$(4)\quad \begin{cases} p_0^{(n)} + p_1^{(n)} + \ldots + p_n^{(n)} = a_0\lambda^{n+1} + \dfrac{(n+1)}{1} a_1\lambda^n + \dfrac{(n+1)n}{1.2} a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n, \\ p_0^{(n)}\alpha_0 + p_1^{(n)}\alpha_1 + \ldots + p_n^{(n)}\alpha_n = a_1\lambda^{n+1} + \dfrac{(n+1)}{1} a_2\lambda^n + \dfrac{(n+1)n}{1.2} a_3\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_0^{(n)}\alpha_0^n + p_1^{(n)}\alpha_1^n + \ldots + p_n^{(n)}\alpha_n^{(n)} = a_n\lambda^{n+1} + \dfrac{(n+1)}{1} a_{n+1}\lambda^n + \dfrac{(n+1)n}{1.2} a_{n+2}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{2n+1}. \end{cases}$$

Ces $n+1$ équations (4) formeront, avec les $n+1$ premières du système (3), un ensemble de $2n+2$ équations qui va nous conduire à notre but. Soit, en effet, R le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1, & 1,\ldots, & 1, \\ \alpha_0, & \alpha_1,\ldots, & \alpha_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_0^n, & \alpha_1^n,\ldots, & \alpha_n^n; \end{vmatrix}$$

les $n+1$ premières équations (3) et les équations (4) donneront

$$(5)\quad \begin{cases} Rp_0 = A_0, \quad Rp_1 = A_1,\ldots, \quad Rp_n = A_n, \\ Rp_0^{(n)} = L_0, \quad Rp_1^{(n)} = L_1,\ldots, \quad Rp_n^{(n)} = L_n, \end{cases}$$

ou, en substituant à $p^{(n)}$ sa valeur,

$$(6)\quad A_0(\lambda+\alpha_0)^{n+1} = L_0 \quad A_1(\lambda+\alpha_1)^{n+1} = L_1,\ldots, \quad A_n(\lambda+\alpha_n)^{n+1} = L_n,$$

équations dans lesquelles

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 a_0 + B_1 a_1 + B_2 a_2 + \ldots + B_n a_n, \\ A_1 &= B'_0 a_0 + B'_1 a_1 + B'_2 a_2 + \ldots + B'_n a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n &= B_0^{(n)} a_0 + B_1^{(n)} a_1 + B_2^{(n)} a_2 + \ldots + B_n^{(n)} a_n, \end{aligned}$$

$B_p^{(i)}$ étant, en général, un déterminant partiel de R.

Remplaçons dans les équations (6) $L_0, L_1,\ldots, L_n$ par leurs valeurs, très-aisées à déterminer; il viendra un système de $n+1$ équations, dont le type sera

$$
\begin{aligned}
A_i(\lambda+\alpha_i)^{n+1} = A_i\lambda^{n+1} &+ (n+1)\lambda^n(B_0^{(i)} a_1 + B_1^{(i)} a_2 + B_2^{(i)} a_3 + \ldots + B_n^{(i)} a_{n+1}) \\
&+ \frac{(n+1)}{1}\lambda^{n-1}(B_0^{(i)} a_2 + B_1^{(i)} a_3 + B_2^{(i)} a_4 + \ldots + B_n^{(i)} a_{n+2}) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (n+1)\lambda(B_0^{(i)} a_n + B_1^{(i)} a_{n+1} + B_2^{(i)} a_{n+2} + \ldots + B_n^{(i)} a_{2n}) \\
&+ B_0^{(i)} a_{n+1} + B_1^{(i)} a_{n+2} + B_2^{(i)} a_{n+3} + \ldots + B_n^{(i)} a_{2n+1}.
\end{aligned}
$$

Ces équations devant avoir lieu par identité, on aura, en comparant les coefficients des mêmes puissances de λ,

$$
\begin{aligned}
&A_i\alpha_i = B_0^{(i)} a_1 + B_1^{(i)} a_2 + B_2^{(i)} a_3 + \ldots + B_n^{(i)} a_{n+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&A_i\alpha_i^l = B_0^{(i)} a_l + B_1^{(i)} a_{l+1} + B_{l+2}^{(i)} a_{l+2} + \ldots + B_n^{(i)} a_{n+l}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&A_i\alpha_i^{n+1} = B_0^{(i)} a_{n+1} + B_1^{(i)} a_{n+2} + B_2^{(i)} a_{n+3} + \ldots + B_n^{(i)} a_{2n+1}.
\end{aligned}
$$

En réunissant le tout dans un seul membre, eu égard à la valeur de A_i, nous aurons enfin

$$
(9)\left\{
\begin{aligned}
&B_0^{(i)}(a_0\alpha_i - a_1) + B_1^{(i)}(a_1\alpha_i - a_2) + B_2^{(i)}(a_2\alpha_i - a_3) + \ldots + B_n^{(i)}(a_n\alpha_i - a_{n+1}) = 0, \\
&B_0^{(i)}(a_0\alpha_i - a_2) + B_1^{(i)}(a_1\alpha_i^2 - a_3) + B_2^{(i)}(a_2\alpha_i^2 - a^4) + \ldots + B_n^{(i)}(a_n\alpha_i^2 - a_{n+2}) = 0, \\
&B_0^{(i)}(a_0\alpha_i^3 - a_3) + B_1^{(i)}(a_1\alpha_i^3 - a_4) + B_2^{(i)}(a_2\alpha_i^3 - a_5) + \ldots + B_n^{(i)}(a_n\alpha_i^2 - a_{n+3}) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&B_0^{(i)}(a_0\alpha_i^{n+1} - a_{n+1}) + B_1^{(i)}(a_1\alpha_i^{n+1} - a_{n+2}) + B_2^{(i)}(a_2\alpha_i^{n+1} - a_{n+3}) + \ldots \\
&\qquad\qquad + B_n^{(i)}(a_n\alpha_i^{n+1} - a_{2n+1}) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

En vertu donc d'un principe connu, les quantités inconnues α_0, α_1,...

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ seront les racines de l'équation fournie par le déterminant

$$(10)\qquad 0 = \begin{vmatrix} a_0 x - a_1, & a_1 x - a_2, \ldots, & a_n x - a_{n+1} \\ a_0 x^2 - a_2, & a_1 x^2 - a_3, \ldots, & a_n x^2 - a_{n+2} \\ a_0 x^3 - a_3, & a_1 x^3 - a_4, \ldots, & a_n x^3 - a_{n+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 x^{n+1} - a_{n+1}, & a_1 x^{n+1} - a_{n+2}, \ldots, & a_n x^{n+1} - a_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Cette équation a l'apparence d'être du $\frac{(n+1)(n+2)^{ième}}{1.2}$ degré; mais il est aisé de démontrer qu'elle n'est réellement que du $(n+1)^{ième}$. Il suffira, pour cela, de mettre ce déterminant sous une autre forme plus explicite, qui aura l'avantage de présenter la démonstration elle-même par sa seule inspection et de faciliter le développement des opérations, dans le cas où l'on veuille les effectuer. Posons $x = \frac{1}{y}$: le déterminant acquerra le facteur $1 : y^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, que nous négligerons pour un instant, et alors nous aurons à considérer le déterminant suivant :

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} a_0 - a_1 y, & a_1 - a_2 y, \ldots, & a_n - a_{n+1} y \\ a_0 - a_2 y^2, & a_1 - a_3 y^2, \ldots, & a_n - a_{n+2} y \\ a_0 - a_3 y^3, & a_1 - a_4 y^3, \ldots, & a_4 - a_{n+3} y \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 - a_{n+1} y^{n+1}, & a_1 - a_{n+2} y^{n+1}, \ldots, & a_n - a_{2n+1} y^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Comme il y $n+1$ colonnes verticales, chacune composée de deux, le déterminant pourra se décomposer en 2^{n+1} déterminants partiels dont plusieurs s'annuleront par la seule présence de deux lignes verticales égales $(a_0, a_1, \ldots)$. Pour trouver le nombre de ceux-ci, soit $s^{(i)}$ le nombre de ceux qui se détruisent dans un système de $n+1-i$ colonnes verticales; on aura les équations suivantes :

$$(12)\qquad \begin{cases} s = 2s' + n, \\ s' = 2s'' + n + 1, \\ s'' = 2s''' + n + 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

qui donneront, toutes réductions faites,

$$s = 2^{n+1} - (n+2).$$

Le nombre donc des déterminants partiels restants sera $n+2$. Un de ces déterminants sera celui composé des colonnes contenant toutes y, et qui sera égal à

$$(13)\quad (-1)^{n+1} y^{\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}} \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3,\ldots, & a_n, & a_{n+1} \\ a_2, & a_3, & a_4,\ldots, & a_{n+1}, & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n, & a_{n+1}, & a_{n+2},\ldots, & a_{2n-1}, & a_{2n} \\ a_{n+1}, & a_{n+2}, & a_{n+3},\ldots, & a_{2n}, & a_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Les autres $n+1$ déterminants seront formés chacun d'une des $n+1$ lignes verticales (a_i) combinée avec les n lignes contenant y et appartenant aux autres colonnes doubles en dehors de celle où se trouve la ligne a_i. Un quelconque de ces déterminants sera

$$(-1)^{n+i} a_i \begin{vmatrix} 1, & a_1 y, & a_2 y,\ldots, & a_i y, & a_{i+1} y,\ldots, & a_{n+1} y \\ 1, & a_2 y^2, & a_3 y^2,\ldots, & a_{i+1} y^2, & a_{i+2} y^2,\ldots, & a_{n+2} y^2 \\ 1, & a_3 y^3, & a_4 y^3,\ldots, & a_{i+2} y^3, & a_{i+3} y^3,\ldots, & a_{n+3} y^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & a_n y^n, & a_{n+1} y^n,\ldots, & a_{n+i-1} y^n, & a_{n+i} y^n,\ldots, & a_{2n} y^n \\ 1, & a_{n+1} y^{n+1}, & a_{n+2} y^{n+1},\ldots, & a_{n+i} y^{n+1}, & a_{n+i+1} y^{n+1},\ldots, & a_{2n+1} y^{n+1} \end{vmatrix},$$

ou bien, en multipliant et en divisant convenablement par $y^{\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}}$,

$$(-1)^{n+i} a_i y^{\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}} \begin{vmatrix} \frac{1}{y}, & a_1, & a_2,\ldots, & a_i, & a_{i+1},\ldots, & a_{n+1} \\ \frac{1}{y^2}, & a_2, & a_3,\ldots, & a_{i+1}, & a_{i+2}, & a_{n+2} \\ \frac{1}{y^3}, & a_3, & a_4,\ldots, & a_{i+2}, & a_{i+3},\ldots, & a_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{y^n}, & a_n, & a_{n+1},\ldots, & a_{n+i-1}, & a_{n+i},\ldots, & a_{2n} \\ \frac{1}{y^{n+1}}, & a_{n+1}, & a_{n+2},\ldots, & a_{n+i}, & a_{n+i+1},\ldots, & a_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

En nous rappelant maintenant que nous avions le facteur $1 : y^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ attaché au déterminant entier, et en substituant à y sa valeur, nous verrons que l'équation (10) pourra se mettre sous la forme

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = &- \begin{vmatrix} a_1, & a_2,\ldots, & a_{n+1} \\ a_2, & a_3,\ldots, & a_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & a_{n+1},\ldots, & a_{2n} \\ a_{n+1}, & a_{n+2},\ldots, & a_{2n+1} \end{vmatrix} \\ &+ \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i \begin{vmatrix} x, & a_1, & a_2,\ldots, & a_i, & a_{i+1},\ldots, & a_{n+1} \\ x^2, & a_2, & a_3,\ldots, & a_{i+1}, & a_{i+2},\ldots, & a_{n+2} \\ x^3, & a_3, & a_4,\ldots, & a_{i+2}, & a_{i+3},\ldots, & a_{n+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^n, & a_n, & a_{n+1},\ldots, & a_{n+i-1}, & a_{n+i},\ldots, & a_{2n} \\ x^{n+1}, & a_{n+1}, & a_{n+2},\ldots, & a_{n+i}, & a_{n+i+1},\ldots, & a_{2n+1} \end{vmatrix}, \end{aligned}\right.$$

qui prouve évidemment ce que nous avions annoncé sur son degré.

Lorsqu'on aura trouvé, au moyen de la résolution de cette équation, les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$, les $(n+1)$ premières équations (5) feront connaître celles de $p_1, p_2,\ldots, p_n$. Le théorème que nous voulions établir se trouve donc démontré.

Soit, comme exemple, la fonction

$$(16)\qquad ax^5 + 5bx^4y + 10cx^3y^2 + 10dx^2y^3 + 5exy^3 + fy^4,$$

dont la forme canonique est

$$(17)\qquad p(x+\alpha y)^5 + q(x+\beta y)^5 + r(x+\gamma y)^5;$$

α, β, γ seront les racines de l'équation cubique

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} a\alpha - b, & b\alpha - c, & c\alpha - d \\ a\alpha^2 - c, & b\alpha^2 - d, & c\alpha^2 - e \\ a\alpha^3 - d, & b\alpha^3 - e, & c\alpha^3 - f \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée suivant la formule (15), devient

$$(19)\quad 0 = \begin{array}{l} b(e^2-df)+ \\ + c(cf-de) + \\ + d(d^2-ce)+ \end{array}\begin{array}{|l|} b(e^2-df) \\ b(de-cf) \\ c(ce-d^2) \end{array}\alpha + \begin{array}{|l|} a(de-cf) \\ + b(bf-ce^2) \\ + c(cd-be) \end{array}\alpha^2 + \begin{array}{|l|} a(ce-d^2) \\ + b(cd-be) \\ + c(bd-e^2) \end{array}\alpha^3,$$

et p, q, r seront déterminés par les équations

$$(20)\quad \begin{cases} p+q+r=a, \\ p\alpha+q\beta+r\gamma=b, \\ p\alpha^2+q\beta^2+r\gamma^2=c. \end{cases}$$

M. Sylvester présente l'équation cubique sous la forme

$$\begin{vmatrix} a\alpha+b, & b\alpha+c, & c\alpha+d \\ b\alpha+c, & c\alpha+d, & d\alpha+e \\ c\alpha+d, & d\alpha+e, & e\alpha+f \end{vmatrix} = 0;$$

mais il est aisé de voir qu'elle coïncide avec l'équation (18) en y changeant simplement α en $-\alpha$. Cela est vrai généralement, car le déterminant (10) est identique avec celui-ci :

$$(22)\quad \begin{vmatrix} a_0 x - a_1, & a_1 x - a_2, \ldots, & a_n x - a_{n+1} \\ a_1 x - a_2, & a_2 x - a_3, \ldots, & a_{n+1} x - a_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n x - a_{n+1}, & a_{n+1} x - a_{n+2}, \ldots, & a_{2n} x - a_{2n+1} \end{vmatrix},$$

comme il résulte des équations (9) en les multipliant successivement par α_i, α_i,..., α_i^n et en les retranchant successivement deux à deux. Cette dernière méthode très-simple aurait pu nous dispenser tout d'un coup de suivre l'autre, un peu longue, par laquelle nous sommes arrivés à la formule (15); mais j'ai cru pouvoir la donner, car elle est la première qui s'est présentée à mon esprit. Or rien ne s'oppose ici à ce qu'on change le signe de x dans l'équation (22) et en-suite celui du déterminant entier; ainsi l'équation à résoudre pourra encore s'écrire

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 x + a_1, & a_1 x + a_2, & a_2 x + a_3, \ldots, & a_n x + a_{n+1} \\ a_1 x + a_2, & a_2 x + a_3, & a_3 x + a_4, \ldots, & a_{n+1} x + a_{n+2} \\ a_2 x + a_3, & a_3 x + a_n, & a_4 x + a_5, \ldots, & a_{n+2} x + a_{n+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n x + a_{n+1}, & a_{n+1} x + a_{n+2}, & a_{n+2} x + a_{n+3}, \ldots, & a_{2n} x + a_{2n+1} \end{vmatrix},$$

résultat conforme à celui qui se trouve consigné dans un Mémoire de M. Sylvester (*Supplement to a paper, etc.*, 1851), où il donne bien une démonstration du théorème en question, mais certes inabordable pour ceux qui ne se sont pas occupés spécialement des adjointes et des hyperdéterminants.