JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 121-174.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__121_0>

MÉMOIRE

Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique;

PAR M. J. BERTRAND.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 12 Mai 1851.)

Les théorèmes généraux de la Mécanique peuvent se partager en deux classes. Les uns, comme le principe des forces vives, sont des propriétés générales dans leur énoncé, mais variables dans leur expression analytique avec les forces qui agissent sur le système. Les autres, comme le principe des aires et le principe du mouvement du centre de gravité, exigent seulement que les forces remplissent certaines conditions et fournissent alors des intégrales indépendantes de leur expression précise. Il m'a semblé intéressant d'examiner quelle est, entre ces deux classes d'intégrales, celle que l'on doit regarder comme exceptionnelle. Pour y parvenir, j'ai résolu le problème suivant :

Étant connue une intégrale d'un problème de Mécanique, trouver l'expression des forces qui produisent le mouvement, c'est-à-dire trouver quel est le problème.

La solution suppose seulement que les composantes des forces puissent s'exprimer en fonction des coordonnées des points du système; elle fait connaître une équation différentielle partielle du second ordre à laquelle doivent satisfaire toutes les intégrales des équations du mouvement, quelle que soit l'expression des forces en fonction des coordonnées des différents points.

Mais il arrive que, dans certains cas, la méthode générale est en défaut et conduit, pour les forces, à des expressions indéterminées. Ces cas sont les seuls dans lesquels l'intégrale puisse convenir à plusieurs problèmes différents. La méthode fait connaître les conditions nécessaires pour que ces cas se présentent.

J'étudie particulièrement le cas où le système se réduit à un point unique. En supposant que le mouvement s'exécute dans un plan, je fais voir que les intégrales qui peuvent convenir à plusieurs problèmes différents sont au nombre de deux, qui, l'une et l'autre, comprennent le principe des aires comme cas particulier. En supposant ensuite que le point soit placé sur une surface, je suis conduit à cette proposition remarquable : *Pour que les équations du mouvement d'un point placé sur une surface aient une intégrale indépendante du temps, et commune à plusieurs problèmes, il faut que la surface soit de révolution, ou applicable sur une surface de révolution.* En supposant cette condition remplie, je donne la forme de l'intégrale, et l'expression générale des forces dans les problèmes auxquels elle s'applique. J'examine, enfin, le cas plus général, où un point peut se mouvoir librement dans l'espace. Le nombre des intégrales communes à plusieurs problèmes devient alors infini. Après avoir fait connaître une forme générale qui les comprend toutes, je montre comment on pourra obtenir autant de cas particuliers qu'on le voudra. Il suffit, en effet, de résoudre un problème quelconque relatif au mouvement dans un plan, et de faire subir à ses intégrales une transformation très-simple; on obtient ainsi une intégrale nouvelle qui convient à un nombre infini de problèmes différents relatifs au mouvement dans l'espace.

I.

Considérons un système de points complétement libres et sollicités par des forces dont les composantes dépendent de leurs diverses coordonnées. En désignant par X_i, Y_i, Z_i les composantes des forces accélératrices qui sollicitent le point x_i, y_i, z_i, les équations différentielles du mouvement sont

$$(1) \qquad \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i, \quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i, \quad \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i,$$

l'indice i devant prendre autant de valeurs qu'il y a de points dans le système. Soit

$$(2) \qquad \alpha = \mathrm{F}(x_i, y_i, z_i, \ldots, x'_i, y'_i\ z'_i \ldots, t)$$

une intégrale contenant une constante arbitraire α, et résolue par rapport à cette constante; nous allons montrer que l'on peut, en général, de cette seule intégrale, déduire l'expression de toutes les forces. Différentions, en effet, l'équation (2) par rapport à t; nous obtiendrons, après avoir remplacé $\frac{dx'_i}{dt}, \frac{dy'_i}{dt}, \frac{dz'_i}{dt}$ par X_i, Y_i, Z_i,

$$(3) \quad 0 = \frac{d\alpha}{dt} + \sum \frac{d\alpha}{dx_i} x'_i + \frac{d\alpha}{dy_i} y'_i + \frac{d\alpha}{dz_i} z'_i + \sum \frac{d\alpha}{dx'_i} \mathrm{X}_i + \frac{d\alpha}{dy'_i} \mathrm{Y}_i + \frac{d\alpha}{dz'_i} \mathrm{Z}_i,$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de i, comprises entre l'unité et le nombre n des points considérés; or il est facile de voir que cette équation (3) doit être une identité, car on peut évidemment, à une époque donnée, assigner des valeurs arbitraires aux coordonnées des différents points et aux composantes de leurs vitesses, c'est-à-dire aux seules quantités qui figurent dans cette équation. L'équation (3) étant identique, on peut la différentier par rapport à x'_i, y'_i, z'_i, et former ainsi des équations nouvelles, en nombre égal à celui des coordonnées des points du système. Ces équations, toutes du premier degré par rapport aux composantes des forces, permettent, *en général*, d'en déterminer la valeur, et nous pouvons, par conséquent, énoncer le théorème suivant :

Connaissant une intégrale des équations du mouvement d'un système libre, on peut, en général, en déduire l'expression des composantes des forces accélératrices et trouver, par suite, quel est le problème qui a conduit à cette intégrale.

Le calcul que nous venons d'indiquer rapidement conduirait presque toujours à des contradictions, si l'on se donnait au hasard l'intégrale dont on veut déduire l'expression des forces. Il arriverait en effet, en général, que les composantes X_i, Y_i, Z_i renfermeraient, dans leur expression, le temps et les composantes des vitesses, tandis que le contraire a été supposé. De plus, les valeurs des composantes ayant été déduites des équations obtenues par la différentiation de l'équation (3), ne satisferaient pas, en général, à cette équation (3) elle-même, et seraient par conséquent inadmissibles. On voit, d'après cela, que, sans connaître l'expression des forces, on peut assigner un grand nombre de conditions que doivent remplir les intégrales des équations du mouvement. On peut aussi rattacher l'une à l'autre deux intégrales d'un même problème, en écrivant que toutes deux conduisent à assigner aux forces la même expression. Je me borne à indiquer ici ces remarques, dont le développement présenterait peut-être quelque intérêt.

II.

La méthode exposée pour obtenir l'expression des forces à l'aide d'une seule intégrale donne lieu à une seconde remarque. Les équations du premier degré, auxquelles satisfont les composantes des forces accélératrices, peuvent rentrer les unes dans les autres, et les valeurs de celles-ci devenir, par suite, indéterminées. Dans ce cas, l'intégrale proposée ne suffit pas à la détermination des forces et peut convenir à plusieurs problèmes différents.

L'examen de ces cas remarquables fait l'objet du présent Mémoire. Je m'occuperai spécialement, dans ce premier travail, du cas où le système se réduit à un point unique.

III.

Avant d'aller plus loin, il est essentiel de préciser la nature des intégrales dont nous voulons nous occuper. Si le système considéré se compose de n points, les intégrales complètes doivent contenir $6n$ constantes arbitraires en fonction desquelles et du temps, on peut exprimer les coordonnées des différents points et les composantes des vitesses, ce qui fera en tout $6n$ équations. Si l'on conçoit que ces $6n$ équations soient résolues par rapport aux constantes, on obtiendra des relations contenant chacune une constante arbitraire : ce sont les intégrales que nous considérons. On peut faire, au sujet de la forme de ces intégrales, une observation importante. Le temps, ne figurant dans les équations du mouvement que par sa différentielle, doit entrer, dans les intégrales, ajouté à une constante; en sorte que, dans les équations qui font connaître, en fonction du temps, les coordonnées et les vitesses des points du système, l'une des $6n$ constantes est combinée au temps par voie d'addition. Lors donc qu'on résoudra ces équations par rapport aux constantes, en éliminant pour cela toutes les constantes excepté une, le temps ne pourra subsister dans le résultat que si la constante non éliminée est celle dont il est inséparable, et, dans ce cas, en cherchant la valeur de cette constante α, le calcul devra donner $\alpha + t$, et, par suite, la valeur de α sera de la forme

$$\alpha = \varphi - t,$$

φ ne contenant pas t. D'après cela, nous admettrons dans les intégrales que nous allons étudier, et qui, par hypothèse, sont résolues par rapport à la constante qu'elles renferment, que le second membre est ou indépendant du temps ou de la forme $\varphi + t$; en sorte que, en désignant l'intégrale par

$$\alpha = \psi,$$

$\frac{d\alpha}{dt}$ soit égal à o ou à -1.

IV.

Supposons d'abord que le mouvement se fasse dans un plan et que la position du point mobile dépende, par conséquent, de deux coordonnées x et y. Les équations du mouvement sont alors

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

X et Y désignant des fonctions quelconques de x et de y.

Soit

$$(2) \qquad \alpha = \varphi(x, y, x', y', t)$$

une intégrale du système, on aura identiquement, comme nous l'avons remarqué plus haut,

$$(3)\qquad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dx'}X + \frac{d\alpha}{dy'}Y = 0;$$

en différentiant l'équation (3) par rapport à x', puis par rapport à y', on obtient les deux suivantes :

$$(4)\qquad \frac{d^2\alpha}{dx\,dx'}x' + \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d^2\alpha}{dy\,dx'}y' + \frac{d^2\alpha}{dx'^2}X + \frac{d^2\alpha}{dy'\,dx'}Y = 0,$$

$$(5)\qquad \frac{d^2\alpha}{dx\,dy'}x' + \frac{d^2\alpha}{dy\,dy'}y' + \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}X + \frac{d^2\alpha}{dy'^2}Y = 0.$$

X et Y devant satisfaire aux équations (3), (4), (5), leur valeur sera déterminée, à moins que deux de ces équations ne rentrent dans la troisième. On en conclut que le seul cas où l'intégrale α puisse convenir à plusieurs questions est celui où les coefficients de X et Y, dans les équations (3), (4), (5), sont proportionnels, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$(6)\qquad \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'^2}}{\dfrac{d\alpha}{dx'}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}}{\dfrac{d\alpha}{dy'}},\quad \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}}{\dfrac{d\alpha}{dx'}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dy'^2}}{\dfrac{d\alpha}{dy'}}.$$

Les équations (6) s'intègrent facilement; elles prouvent que $\log\frac{d\alpha}{dx'}$, $\log\frac{d\alpha}{dy'}$ ont les mêmes dérivées par rapport à x' et à y'. La différence de ces deux logarithmes dépend donc des seules variables x et y, et l'on a, par suite,

$$(7)\qquad \frac{d\alpha}{dx'} = \varphi(x, y)\frac{d\alpha}{dy'},$$

équation qui s'intègre facilement et de laquelle on conclut

$$\alpha = F[y' + x'\varphi(x, y), x, y, t].$$

Telle est donc la forme la plus générale que puisse avoir une intégrale commune à plusieurs problèmes. Il est facile de vérifier que, réciproquement, toutes les fois qu'une intégrale aura cette forme, la méthode indiquée pour en déduire les forces sera en défaut. En répétant même plusieurs fois la différentiation par rapport à x' et à y' des résultats obtenus, les équations ainsi formées rentreraient toutes les unes dans les autres.

V.

Nous allons chercher maintenant dans quel cas les équations différentielles du mouvement peuvent avoir une intégrale de la forme

$$(1) \qquad \alpha = \mathrm{F}[y' + x'\varphi(x, y), x, y, t];$$

de cette équation on conclut, comme il a été dit, l'identité

$$(2) \qquad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{du}\left(\mathrm{Y} + \mathrm{X}\varphi + x'^2\frac{d\varphi}{dx} + x'y'\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0,$$

dans laquelle, pour abréger, nous représentons par u la somme $y' + \varphi x'$.

En remplaçant, dans l'équation (2), y' par $u - x'\varphi$, nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}(u - x'\varphi)$$
$$+ \frac{d\alpha}{du}\left[\mathrm{Y} + \mathrm{X}\varphi + x'^2\frac{d\varphi}{dx} + x'(u - x'\varphi)\frac{d\varphi}{dy}\right] = 0.$$

Cette équation étant identique, on peut égaler à zéro le coefficient de x'^2 : on a ainsi

$$0 = \frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\varphi}{dy},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}},$$

et, par suite,

$$u = y' + \varphi . x' = y' + x'\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d\varphi}{dy}y' + \frac{d\varphi}{dx}x'}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\varphi'}{\frac{d\varphi}{dy}};$$

d'où l'on conclut, en remarquant que $\frac{d\varphi}{dy}$ est une fonction de x et de y, que l'intégrale

$$\alpha = \mathrm{F}(y' + x'\varphi, x, y, t)$$

peut s'écrire

$$\alpha = \mathrm{F}(\varphi', x, y, t),$$

φ' désignant la dérivée, par rapport à t, d'une fonction $\varphi(x, y)$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Or cette dernière équation s'intègre sans difficulté, et l'on en conclut

$$y = x\varphi + \mathrm{F}(\varphi),$$

en sorte que l'équation

$$\varphi = \text{constante}$$

représente une série de lignes droites.

Nous pouvons donc, en résumant les résultats obtenus jusqu'ici, énoncer le théorème suivant :

Si une intégrale des équations du mouvement d'un point dans un plan convient à deux problèmes différents, elle est de la forme

$$\alpha = \mathrm{F}(\varphi', x, y, t),$$

φ' étant la dérivée d'une fonction qui, égalée à une constante, représente les équations d'une série de lignes droites.

VI.

Pour déterminer plus complétement la forme de l'intégrale que nous étudions, substituons aux coordonnées x et y deux variables q_1 et q_2, dont l'une soit précisément la fonction φ dont la dérivée figure dans notre intégrale, et dont l'autre soit telle, que les courbes dont l'équation est

$$q_2 = \text{constante}$$

soient orthogonales aux droites

$$q_1 = \text{constante}.$$

L'intégrale

$$\alpha = F(\varphi', x, y, t) \tag{1}$$

prendra alors la forme

$$\alpha = F(q'_1, q_1, q_2, t). \tag{2}$$

Pour former les équations du mouvement, par rapport à ces nouvelles variables, nous ferons usage des formules générales données par Lagrange. Soit

$$ds^2 = A\,dq_1^2 + B\,dq_2^2 \tag{3}$$

l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins; l'expression de la demi-force vive sera alors

$$T = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = \tfrac{1}{2}(A\,q_1'^2 + B\,q_2'^2). \tag{4}$$

Or les équations du mouvement sont, d'après les formules générales de la *Mécanique analytique*,

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_1} - \frac{dT}{dq_1} = Q_1, \quad Q_1 = X\frac{dx}{dq_1} + Y\frac{dy}{dq_1}, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_2} - \frac{dT}{dq_2} = Q_2, \quad Q_2 = X\frac{dx}{dq_2} + Y\frac{dy}{dq_2}; \tag{6}$$

en développant l'équation (5), on la met sous la forme

$$A\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dA}{dq_1}q_1'^2 - \frac{1}{2}\frac{dB}{dq_1}q_2'^2 + q'_1 q'_2\frac{dA}{dq_2} - Q_1 = 0. \tag{7}$$

Les lignes représentées par l'équation $q_1 =$ constante étant droites, leurs trajectoires orthogonales ont toutes mêmes développées et sont des courbes parallèles. La distance de celles qui correspondent aux valeurs q_2 et $q_2 + dq_2$ de la variable q_2 est donc indépendante de q_1, et, par suite, le coefficient B ne contient pas cette variable. On peut donc supprimer, dans l'équation (7), le terme en $\frac{dB}{dq_1}$; il reste alors

$$A\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dA}{dq_1}q_1'^2 + \frac{dA}{dq_2}q'_1 q'_2 - Q_1 = 0. \tag{8}$$

En différentiant l'intégrale

$$\alpha = F(q'_1, q_1, q_2, t),$$

on obtient

$$(9) \qquad o = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1} q'_1 + \frac{d\alpha}{dq_2} q'_2 + \frac{d\alpha}{dq'_1} \frac{d^2 q_1}{dt^2},$$

et, par suite, en remplaçant, dans cette équation (9), $\frac{d^2 q_1}{dt^2}$ par sa valeur déduite de l'équation (8), on obtient l'identité

$$(10) \quad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1} q'_1 + \frac{d\alpha}{dq_2} q'_2 - \frac{1}{A} \frac{d\alpha}{dq'_1} \left(\frac{1}{2} \frac{dA}{dq_1} q'^2_1 + \frac{dA}{dq_2} q'_1 q'_2 - Q_1 \right) = o.$$

Cette équation devant être identique, on peut égaler à zéro le coefficient de q'_2; on obtient ainsi

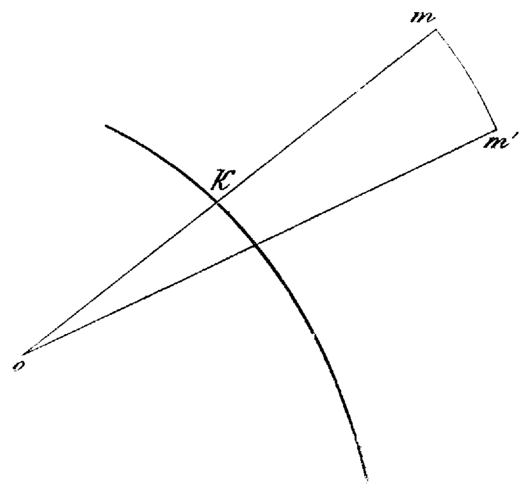
$$\frac{d\alpha}{dq_2} - \frac{1}{A} \frac{d\alpha}{dq'_1} \frac{dA}{dq_2} q'_1 = o,$$

dont l'intégrale générale est

$$\alpha = \varphi(A q'_1, q_1, t).$$

VII.

Il est essentiel, avant d'aller plus loin, de rechercher la forme du coefficient A qui figure dans notre intégrale. A est, on s'en souvient, le coefficient de dq_1^2 dans l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins. $A\,dq_1^2$ est, par conséquent, le carré de la distance de deux points qui correspondent à une même valeur de q_2, c'est-à-dire le carré de l'arc infiniment petit, intercepté par les droites q_1 et $q_1 + dq_1$, sur leur trajectoire orthogonale qui correspond à la



valeur q_2. Or, en désignant cet arc par mm', par $d\omega$ l'angle des deux droites, et par l la distance qui sépare l'élément mm' du point o où concourent les deux normales, on a

$$mm' = l\,d\omega.$$

$d\omega$ est, évidemment, de la forme $\varphi(q_1)\,dq_1$; quant à l, on peut le décomposer en deux parties, en nommant k le point où la droite om perce une trajectoire orthogonale déterminée; on a

$$o\mathrm{M} = ok + km.$$

Or, ok est fonction de la seule variable q_1, et km peut être considéré comme étant la variable q_2 elle-même, car les points pour lesquels km a la même valeur, forment une trajectoire orthogonale des droites

$$q_1 = \text{constante};$$

nous pouvons donc écrire

$$l = om = \psi(q_1) + q_2.$$

D'après ces valeurs de l et de $d\omega$, on voit que la distance mm' est de la forme

$$[\mathrm{F}_1(q_1) + q_2\,\mathrm{F}_2(q_1)]\,dq_1,$$

et, par suite, son carré $\mathrm{A}\,dq_1^2$ est égal à

$$[\mathrm{F}_1(q_1) + q_2\,\mathrm{F}_2(q_1)]^2\,dq_1^2;$$

on a donc, enfin,

$$[\mathrm{F}_1(q_1) + q_2\,\mathrm{F}_2(q_1)]^2 = \mathrm{A}.$$

VIII.

En différentiant, par rapport au temps, l'intégrale

$$(1)\qquad \alpha = \varphi(\mathrm{A}q'_1, q_1, t),$$

on obtient, en posant $\mathrm{A}q'_1 = u$,

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1}q'_1 + \frac{d\alpha}{du}\left(\mathrm{A}\frac{d^2q_1}{dt^2} + q'^2_1\frac{d\mathrm{A}}{dq_1} + q'_1q'_2\frac{d\mathrm{A}}{dq_2}\right) = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{d^2 q_1}{dt^2}$ par sa valeur fournie par l'équation (8) (§ VI),

$$(3) \qquad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1} q'_1 + \frac{d\alpha}{du}\left(\mathrm{Q}_1 - \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{A}}{dq_1} q'^2_1\right) = 0.$$

Si, dans cette équation identique, on substitue à q'_1 sa valeur $\frac{u}{\mathrm{A}}$, et à A, l'expression trouvée plus haut,

$$\mathrm{A} = [\mathrm{F}_1(q_1) + q_2 \mathrm{F}_2(q_1)]^2,$$

il vient

$$(4) \quad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{u}{[\mathrm{F}_1(q_1) + q_2\mathrm{F}_2(q_1)]^2} + \frac{d\alpha}{du}\left\{\mathrm{Q}_1 - \frac{u^2[\mathrm{F}'_1(q_1) + \mathrm{F}'_2(q_1)q_2]}{[\mathrm{F}_1(q_1) + q_2\mathrm{F}_2(q_1)]^3}\right\} = 0.$$

Dans cette équation, $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dq_1}, \frac{d\alpha}{du}$ ne contiennent pas q_2, car α est fonction de u, q_1 et t. De plus, Q_1 est indépendant de u, et fonction seulement de q_1 et q_2 : il ne peut donc y avoir aucune réduction entre les termes Q_1 et $\frac{u^2[\mathrm{F}'_1(q_1) + \mathrm{F}'_2(q_1)q_2]}{[\mathrm{F}_1(q_1) + q_2\mathrm{F}_2(q_1)]^3}$, en sorte que q_2 ne peut disparaître de l'équation (4), et celle-ci ne peut, par conséquent, être identique, que si les deux fractions qui contiennent q_2 se détruisent l'une par l'autre. Cela n'arrivera, évidemment, que si la fraction

$$\frac{\mathrm{F}'_1(q_1) + \mathrm{F}'_2(q_1)q_2}{[\mathrm{F}_1(q_1) + q_2\mathrm{F}_2(q_1)]^3}$$

se réduit à ne plus avoir en dénominateur que le carré de la somme

$$\mathrm{F}_1(q_1) + q_2\mathrm{F}_2(q_1).$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$\frac{\mathrm{F}'_1(q_1)}{\mathrm{F}_1(q_1)} = \frac{\mathrm{F}'_2(q_1)}{\mathrm{F}_2(q_1)},$$

d'où l'on conclut, par l'intégration,

$$\mathrm{F}_1(q_1) = \mathrm{CF}_2(q_1);$$

la valeur de A devient, d'après cela,

$$[\mathrm{F}_1(q_1)]^2(\mathrm{C} + q_2)^2,$$

et, par suite, la distance désignée par mm' (§ VII) est égale à

$$F_1(q_1)(C + q_2)\,dq_1.$$

Cette distance est donc, pour une même valeur de q_1, proportionnelle à $C + q_2$, mais elle est aussi, comme on le voit sur la figure du § VII, proportionnelle à $oK + q_2$, et ces deux résultats ne peuvent s'accorder que si l'on a

$$oK = C.$$

La distance oK étant constante, la courbe lieu des points K a son rayon de courbure constant et est, par conséquent, un cercle. Les droites dont l'équation est

$$q_1 = \text{constante},$$

étant normales à cette courbe, passent toutes par un même point; en sorte que les variables q_1 et q_2 forment un système de coordonnées polaires. Posons donc, en adoptant la notation ordinaire,

$$q_1 = \omega,$$
$$q_2 = r;$$

le carré de la distance de deux points infiniment voisins sera, comme on sait,

$$d\rho^2 = dr^2 + r^2\,d\omega^2,$$

et, par suite, l'intégrale prend la forme

$$\alpha = \varphi\left(r^2\frac{d\omega}{dt},\ \omega,\ t\right).$$

IX.

En différentiant l'intégrale

$$\alpha = \varphi\left(r^2\frac{d\omega}{dt},\ \omega,\ t\right), \tag{1}$$

on obtient, en posant, pour simplifier $r^2\frac{d\omega}{dt} = u$,

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\alpha}{du}\left(2r\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} + r^2\frac{d^2\omega}{dt}\right) = 0; \tag{2}$$

mais l'une des équations du mouvement est, dans le cas actuel,

$$(3) \qquad 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} + r^2\frac{d^2\omega}{dt^2} = Q_1.$$

Par suite, on doit avoir identiquement

$$(4) \qquad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\alpha}{du}Q_1 = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{d\omega}{dt}$ par $\frac{u}{r^2}$,

$$(5) \qquad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{u}{r^2} + \frac{d\alpha}{du}Q_1 = 0.$$

$\frac{d\alpha}{dt}$ est, nous l'avons dit (§ III), égal à 0 ou à -1; faisons successivement ces deux hypothèses.

Si $\frac{d\alpha}{dt}$ est nul, l'équation (5) se réduit à

$$(6) \qquad \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{u}{r^2} + \frac{d\alpha}{du}Q_1 = 0.$$

r, u, ω étant trois variables indépendantes, et $\frac{d\alpha}{d\omega}$, $\frac{d\alpha}{du}$ ne contenant pas r, cette équation exige que l'on ait

$$Q_1 = \frac{\varphi(\omega)}{r^2},$$

et, par suite,

$$(7) \qquad \frac{d\alpha}{d\omega}u + \frac{d\alpha}{du}\varphi(\omega) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(8) \qquad \alpha = F\left[\frac{u^2}{2} + \int\varphi(\omega)\,d\omega\right].$$

Telle est donc la forme de l'intégrale cherchée; elle équivaut à

$$(9) \qquad \text{constante} = \frac{u^2}{2} + \int\varphi(\omega)\,d\omega,$$

et elle convient à tous les problèmes dans lesquels la quantité désignée par Q_1 est égale à $\frac{\varphi(\omega)}{r^2}$.

Cette quantité Q_1 est définie par l'équation

$$Q_1 = X\frac{dx}{d\omega} + Y\frac{dy}{d\omega} = r(Y\cos\omega - X\sin\omega);$$

il suffit donc, pour que les équations d'un problème admettent l'intégrale (9), que l'on ait, en désignant par X et Y les composantes de la force accélératrice,

$$(10)\qquad Y\cos\omega - X\sin\omega = \frac{\varphi(\omega)}{r^3} = \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{r^3}\ :$$

l'intégrale (9), exprimée en coordonnées rectilignes, prend alors la forme

$$(11)\qquad \text{constante} = F\left(\frac{y}{x}\right) + (yx' - xy')^2.$$

Supposons, en second lieu, que $\frac{d\alpha}{dt}$ soit égal à -1, l'équation (5) devient

$$(12)\qquad -1 + \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{u}{r^2} + \frac{d\alpha}{du}Q_1 = 0;$$

$\frac{d\alpha}{du}$ et $\frac{d\alpha}{d\omega}$ ne contenant pas r, Q_1 est évidemment de la forme

$$Q_1 = f(\omega) + \frac{\psi(\omega)}{r^2}.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (12), lui fait prendre la forme

$$-1 + \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{u}{r^2} + \frac{d\alpha}{du}f(\omega) + \frac{d\alpha}{du}\frac{\psi(\omega)}{r^2} = 0,$$

et, comme elle doit être identique, elle entraîne les deux suivantes :

$$-1 + \frac{d\alpha}{du}f(\omega) = 0,$$

$$\frac{d\alpha}{d\omega}u + \frac{d\alpha}{du}\psi(\omega) = 0.$$

La première de ces équations prouve que α doit être de la forme

$$\alpha = \frac{u}{f(\omega)} + F_1(\omega) - t;$$

cette valeur, substituée dans la seconde, donne

$$-u^2 \frac{d}{d\omega}\frac{1}{f(\omega)} + F'_1(\omega)u - \frac{\psi(\omega)}{f(\omega)} = 0,$$

ce qui exige, puisque u et ω sont indépendants,

$$\frac{d\frac{1}{f(\omega)}}{d\omega} = 0, \qquad F'_1(\omega) = 0, \qquad \frac{\psi(\omega)}{f(\omega)} = 0,$$

$\frac{1}{f(\omega)}$ ne pouvant évidemment pas être nul, car alors u disparaîtrait de l'intégrale; la dernière de ces équations se réduit à

$$\psi(\omega) = 0.$$

Les deux autres prouvent que les fonctions f et F_1 sont des constantes, en sorte que

$$\alpha = Cu - t = Cr^2 \frac{d\omega}{dt} - t,$$

C étant une constante.

La valeur de Q_1 devient, en y remplaçant $\frac{1}{f(\omega)}$ par C, et $\psi(\omega)$ par o,

$$Q_1 = \frac{1}{C},$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$r(Y \cos\omega - X \sin\omega) = \text{constante};$$

et toutes les fois que les forces rempliront cette condition, les équations différentielles du problème auront pour intégrale

$$\alpha = Cr^2 \frac{d\omega}{dt} - t.$$

Nous avons donc trouvé les seules intégrales qui conviennent à plusieurs problèmes différents relatifs au mouvement d'un point libre dans un plan.

X.

La méthode générale à l'aide de laquelle nous trouvons les forces accélératrices, lorsqu'une seule intégrale nous est donnée, s'applique, sans modification, au cas d'un système dont les points ne sont pas libres. Si nous nommons $q_1, q_2,\ldots, q_p$ les p variables indépendantes, en fonction desquelles les liaisons permettent d'exprimer toutes les coordonnées, les équations du mouvement sont de la forme

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_1} - \frac{dT}{dq_1} = Q_1, \quad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_2} - \frac{dT}{dq_2} = Q_2,\ldots, \quad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_p} - \frac{dT}{dq_p} = Q_p,$$

T désignant la demi-force vive qui est une fonction homogène du second degré de $q'_1, q'_2,\ldots, q'_p$, et $Q_1, Q_2,\ldots, Q_p$ étant des fonctions de $q_1, q_2,\ldots, q_p$, qui dépendent des forces accélératrices. Soit

$$(2) \qquad \alpha = \varphi(t,\ q_1,\ q_2,\ldots,\ q_p,\quad q'_1,\ q'_2,\ldots,\ q'_p)$$

une intégrale du système (1); on obtiendra, en la différentiant,

$$(3) \qquad 0 = \frac{d\alpha}{dt} + \sum \frac{d\alpha}{dq_i} q'_i + \sum \frac{d\alpha}{dq'_i}\frac{d^2 q_i}{dt^2},$$

le signe $\sum$ s'étendant aux valeurs entières de i, moindres que p. En remettant dans cette équation (3), pour $\frac{d^2q_1}{dt^2}, \frac{d^2q_2}{dt^2},\ldots,$ leurs valeurs déduites des équations (1), on obtiendra une relation dans laquelle Q_1, $Q_2,\ldots, Q_p$ entreront au premier degré. Cette relation ne contenant plus que les quantités $t, q_1, q_2,\ldots, q_p, q'_1, q'_2,\ldots, q'_p$, auxquelles on peut attribuer des valeurs arbitraires et indépendantes les unes des autres, devra être une identité : on pourra, par conséquent, la différentier par rapport à $q'_1, q'_2,\ldots, q'_p$, et l'on formera ainsi p équations nouvelles qui, contenant aussi $Q_1, Q_2,\ldots, Q_p$ au premier degré, permettront, en général, de déterminer la valeur de ces inconnues. Ces cas, dans lesquels cette méthode est en défaut, sont évidemment les seuls dans lesquels une même intégrale puisse convenir à plusieurs problèmes différents. Il est intéressant de les étudier. Nous nous bornerons ici au cas d'un point unique, que d'abord nous supposerons assujetti à rester sur une surface donnée.

XI.

Soient q_1 et q_2 les paramètres de deux systèmes de courbes orthogonales tracées sur la surface que le point ne doit pas quitter; le carré de la distance de deux points infiniment voisins aura une expression de la forme

$$ds^2 = \mathrm{A}\,dq_1^2 + \mathrm{B}\,dq_2^2;$$

l'expression de la demi-force vive est, par suite,

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}q_1'^{\,2} + \mathrm{B}q_2'^{\,2}\right),$$

d'où l'on conclut que les deux équations du mouvement sont

$$\mathrm{A}\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{A}}{dq_1}q_1'^{\,2} + \frac{d\mathrm{A}}{dq_2}q_1' q_2' - \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{B}}{dq_1}q_2'^{\,2} = \mathrm{Q}_1,$$

$$\mathrm{B}\frac{d'q^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{B}}{dq_2}q_1'^{\,2} + \frac{d\mathrm{B}}{dq_1}q_1' q_1' - \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{A}}{dq_2}q_1'^{\,2} = \mathrm{Q}_2.$$

En procédant absolument comme on l'a fait au § IV, on verra qu'une intégrale

$$\alpha = \varphi(t,\ q_2,\ q^2,\ q_1',\ q_2')$$

suffit à la détermination de Q_1 et Q_2, à moins qu'elle ne soit de la forme

$$\alpha = \varphi\left[t,\ q_1,\ q_2,\ q_1' + \varphi(q_1,\ q_2)\,q_2'\right].$$

Il nous reste donc à chercher dans quels cas une intégrale peut présenter cette forme.

XII.

La somme $q_1' + \psi(q_1, q_2)q_2'$, multipliée par un facteur convenable, peut toujours devenir une dérivée exacte m'. Prenons pour variables indépendantes la valeur de m, et le paramètre n des trajectoires orthogonales aux courbes représentées par $m =$ constante; l'intégrale considérée prendra, comme on le voit bien facilement, la forme

(1) $$\alpha = \varphi(t,\ m,\ n,\ m').$$

Si nous supposons que l'on ait, dans ce nouveau système de coordonnées,

(2) $$ds^2 = a\,dm^2 + b\,dn^2,$$

les équations du mouvement ne différeront de celles du paragraphe précédent que par le changement de A, B, q_1, q_2, en a, b, m, n. On aura, en différentiant l'intégrale (1), et remplaçant $\frac{d^2m}{dt^2}$ par sa valeur,

$$(3)\quad o = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dm} m' + \frac{d\alpha}{dn} n' + \frac{1}{a} \frac{d\alpha}{dm'} \left(\begin{array}{r} \frac{1}{2}\frac{da}{dm} m'^2 - \frac{1}{2}\frac{da}{dn} m' n' \\ - \frac{1}{2}\frac{db}{dm} n'^2 - Q_1 \end{array} \right) = o.$$

Cette équation devant être identique, le coefficient de n'^2 et celui de n' peuvent être égalés séparément à zéro. On a donc

$$(4)\qquad \frac{db}{dm} = o,$$

$$(5)\qquad \frac{d\alpha}{dn} - \frac{1}{a} \frac{d\alpha}{dm'} m' \frac{da}{dn} = o.$$

L'équation (5) peut s'intégrer; on en conclut facilement

$$(6)\qquad \alpha = \varphi(am', m, t).$$

Quant à l'équation (4), elle prouve que le produit $b\,dn^2$, c'est-à-dire le carré de la distance des courbes qui correspondent aux valeurs n et $n + dn$ du paramètre n, est indépendant de m. Ces deux courbes sont donc partout également distantes : or on prouve facilement que si une série de courbes tracées sur une surface sont telles, que la distance de deux courbes infiniment voisines soit constante, leurs trajectoires orthogonales sont des lignes géodésiques. Par conséquent, dans le cas actuel, les lignes représentées par $m =$ constante sont des lignes géodésiques. En supprimant dans l'équation (3) les termes en n' et en n'^2, et en remarquant en outre que l'on a, en posant $am' = u$, et considérant α comme fonction de m, n et U,

$$(7)\qquad \frac{d\alpha}{dm} = \frac{d\alpha}{dm} + \frac{d\alpha}{du} m' \frac{da}{dm},$$

$$(8)\qquad \frac{d\alpha}{dm'} = \frac{d\alpha}{du} \cdot a;$$

cette équation (3) devient

$$(9)\qquad \frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{dm} + \frac{d\alpha}{du}\frac{da}{dm}\frac{u}{a}\right)\frac{u}{a} + \frac{d\alpha}{du}\left(\frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{u^2}{a^2} - Q_1\right) = o,$$

ou, en réduisant et divisant par $\frac{d\alpha}{du}$,

$$(10)\qquad \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{d\alpha}{du}}+\frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}\frac{u}{a}+\frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{u^2}{a^2}+Q_1=0.$$

Si nous supposons d'abord $\frac{d\alpha}{dt}=0$, cette équation se réduit à

$$(11)\qquad \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}\frac{u}{a}+\frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{u^2}{a^2}+Q_1=0;$$

$\frac{d\alpha}{dm}$, a et Q_1 étant indépendants de u, on conclut de cette équation que $\frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}$ doit être de la forme $u\psi_1(m)+\frac{\psi_2(m)}{u}$,

$$(12)\qquad \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}=u\psi_1(m)+\frac{\psi_2(m)}{u}.$$

Pour intégrer cette équation, il faut d'abord considérer le système d'équations simultanées

$$(13)\qquad dm=\frac{-du}{u\psi_1(m)+\frac{\psi_2(m)}{u}}=\frac{d\alpha}{0}.$$

L'une des intégrales est

$$\alpha=\text{constante};$$

pour trouver l'autre, mettons l'équation (13) sous la forme

$$(14)\qquad \frac{1}{2}\frac{d(u^2)}{dm}+u^2\psi_1(m)+\psi_2(m)=0.$$

Comme elle est linéaire par rapport à u^2, son intégrale est de la forme

$$(15)\qquad u^2=CF_1(m)+F_2(m),\quad C=\frac{u^2-F_2(m)}{F_1(m)};$$

par suite, l'intégrale générale de l'équation (12) est

$$(16)\qquad \alpha = \varphi\left[\frac{u^2 - F_2(m)}{F_1(m)}\right].$$

Or cette intégrale équivaut évidemment à

$$(17)\qquad \alpha = \frac{u^2 - F_2(m)}{F_1(m)} = u^2 f_1(m) + f_2(m) = a^2 m'^2 f_1(m) + f_2(m);$$

car il revient au même d'écrire qu'une expression est constante ou qu'une fonction de cette expression est constante.

En substituant, dans l'équation (11), la valeur de α fournie par l'équation (17), on trouve facilement

$$(18)\qquad \frac{f'_1(m)}{f_1(m)} + \frac{\frac{da}{dm}}{a} = 0,$$

$$(19)\qquad Q_1 + \frac{f_2(m)}{2f(m)} = 0;$$

l'équation (18) s'intègre et prouve que a est de la forme

$$(20)\qquad a = \frac{F(n)}{f_1(m)}.$$

m désigne, on s'en souvient, le paramètre d'une série de lignes géodésiques, et n celui de leurs trajectoires orthogonales. Or M. Liouville a prouvé, dans ses Notes à la *Géométrie analytique* de Monge, que le coefficient a ne peut prendre cette forme que dans le cas où la surface que l'on considère est applicable sur une surface de révolution (page 596). Nous pouvons donc énoncer ce théorème remarquable :

Les surfaces applicables sur les surfaces de révolution sont les seules sur lesquelles deux points mobiles sollicités par des forces différentes puissent avoir une intégrale commune indépendante du temps, pour les équations différentielles de leur mouvement.

La forme la plus générale de cette intégrale, et les conditions que doivent remplir les forces, sont exprimées par les équations (17) et (19).

Il nous reste enfin à considérer le cas où l'intégrale cherchée contenant le temps, on doit supposer $\frac{d\alpha}{dt} = -1$. L'équation (10) devient alors

$$(21) \qquad \frac{-1}{\frac{d\alpha}{du}} + \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{u^2}{a^2} + Q_1 = 0;$$

$\frac{da}{dm}$, a et Q_1 ne contenant pas u, cette équation prouve que la somme

$$(22) \qquad \frac{-1}{\frac{d\alpha}{du}} + \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}\frac{u}{a}$$

est de la forme $H + Ku^2$, H et K étant indépendants de u. Mais, en considérant a et m comme deux variables indépendantes, que l'on peut évidemment substituer à m et n, $\frac{d\alpha}{du}$ et $\frac{d\alpha}{dm}$ sont indépendants de a, et il n'y a, par conséquent, aucune réduction possible entre les deux termes de l'expression (22). Chacun d'eux doit donc être, séparément, de la forme $H + Ku^2$; on a donc

$$(23) \qquad \frac{1}{\frac{d\alpha}{du}} = \varphi_1(m) + u^2\varphi_2(m),$$

$$(24) \qquad \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}\frac{u}{a} = \psi_1(m) + u^2\psi_2(m).$$

L'équation (24) ne diffère pas de l'équation (12), à laquelle nous avons été conduit plus haut; on en conclura donc, absolument comme on l'a déjà fait, que α est de la forme

$$(25) \qquad \alpha = \psi[u^2 f_1(m) + f_2(m)] - t;$$

en substituant cette valeur de α dans l'équation (23), il vient

$$(26) \qquad \frac{1}{F'[u^2 f_1(m) + f_2(m)]\, 2u f_1(m)} = u^2\varphi_2(m) + \varphi_1(m).$$

Le premier membre de cette équation devient infini pour $u = 0$, quelle que soit la valeur correspondante de m; et, comme il n'en est pas de même du second, cette équation est impossible, à moins que l'on n'ait

$$F'[f_2(m)] = \infty;$$

ce qui ne peut avoir lieu que si $f_2(m)$ se réduit à une constante. Dans ce cas, $\psi[u^2 f_1(m) + f_2(m)]$ équivaut à une fonction de $u^2 f_1(m)$, et l'intégrale (25) peut s'écrire :

$$\alpha = \psi[u^2 f_1(m)] - t.$$

Mais une fonction du produit $u^2 f_1(m)$ est aussi une fonction de $u\sqrt{f_1(m)}$ ou de $u\varpi(m)$ [en posant $\varpi(m) = \sqrt{f_1(m)}$]; nous pouvons donc poser

$$\alpha = F_1[u\varpi(m)] - t.$$

L'équation (23) devient alors

$$\frac{1}{\varpi(m) F'_1[u\varpi(m)]} = \varphi_1(m) + u^2\varphi_2(m);$$

d'où l'on conclut, en posant $u\varpi(m) = z$,

$$\frac{1}{F'_1(z)} = \varphi_1(m)\varpi(m) + \frac{z^2}{[\varpi(m)]^2}\varphi_2(m),$$

équation impossible si l'on n'a pas

$$\varphi_1(m)\varpi(m) = 0,$$
$$\frac{\varphi_1(m)}{[\varpi_2(m)]^2} = \text{constante}.$$

$\varpi(m)$ ne pouvant pas être nul, $\varphi_1(m)$ doit être égal à zéro, et, par suite,

$$\frac{1}{F'_1(z)} = Cz^2,$$
$$F'_1(z) = \frac{1}{Cz^2},$$
$$F_1(z) = -\frac{1}{Cz} + C_1.$$

Si C était égal à zéro, on trouverait pour $F_1(z)$ une valeur de la forme $C_1 z$; les seules formes possibles de l'intégrale α sont donc

$$(27)\qquad \alpha = -\frac{1}{u\varpi_1(m)} + t = -\frac{1}{a\varpi_1(m)\frac{dm}{dt}} - t,$$

$$(28)\qquad \alpha = u\varpi_1(m) - t = a\varpi_1(m)\frac{dm}{dt} - t.$$

Si nous substituons, dans l'équation (10), la valeur de α fournie par l'équation (28), il viendra

$$(29)\qquad \frac{-1}{\varpi_1(m)} + \frac{u\varpi'_1(m)}{\varpi_1(m)}\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{du}{dm}\frac{u^2}{a^2} + Q_1 = 0,$$

équation qui se décompose en deux autres :

$$(30)\qquad \frac{-1}{\varpi_1(m)} + Q_1 = 0.$$

$$(31)\qquad \frac{\varpi'_1(m)}{\varpi_1(m)}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{1}{a^2} = 0.$$

Or l'équation (31) peut s'intégrer; on en déduit

$$a^2 = \varpi(m)\,F(n),$$

et, par suite, d'après la remarque de M. Liouville, dont nous avons déjà fait usage plus haut, *la surface est applicable sur une surface de révolution.*

Considérons enfin l'équation (27). En substituant cette valeur de α dans l'équation (10), il vient

$$\frac{-u^2}{\varpi_1(m)} + \frac{u^2\varpi'_1(m)}{\varpi_1(m)^3 a} + \frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{u^2}{a^2} - Q_1 = 0.$$

u, a et m pouvant être considérées comme trois variables indépendantes, on déduit de cette équation

$$Q_1 = 0$$

et

$$(32)\qquad \frac{-1}{\varpi_1(m)} + \frac{\varpi'_1(m)}{\varpi_1(m)^3}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{1}{a^2} = 0.$$

Cette équation (32) étant linéaire en $\frac{1}{a}$, on en déduira

$$\frac{1}{a} = \psi_1(m) + F(n)\,\psi_2(m)$$

ou

$$a = \frac{1}{\psi_1(m) + F(n)\,\psi_2(m)}.$$

Telle est donc la forme que doit avoir le coefficient de dm^2 dans l'expression du carré de la distance de deux points, pour qu'il puisse exister une intégrale commune à deux problèmes différents. L'équation

$$Q_1 = 0$$

prouve d'ailleurs que, dans ce cas, la composante de la force accélératrice, perpendiculaire à la ligne géodésique

$$m = \text{constante},$$

doit être égale à zéro, ou, en d'autres termes, la composante de la force accélératrice dans le plan tangent de la surface doit être tangente à la ligne géodésique dont l'équation est

$$m = \text{constante}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Pour qu'il existe une intégrale de la forme (27), *commune à deux problèmes relatifs au mouvement d'un point sur une surface, il faut et il suffit que les forces accélératrices soient tangentes à une série de lignes géodésiques tracées sur la surface, et que, en prenant pour coordonnées le paramètre m de ces lignes géodésiques et le paramètre n de leurs trajectoires orthogonales, le carré de la distance de deux points infiniment voisins soit de la forme*

$$ds^2 = a\,dm^2 + b\,dn^2,$$

a étant lui-même de la forme

$$a = \frac{1}{\psi_1(m) + F(n)\,\psi_2(m)}.$$

Quelles sont les surfaces sur lesquelles cette condition peut être remplie? C'est là un problème de géométrie qui n'a pas un rapport direct avec le sujet de ce Mémoire.

XIII.

Considérons maintenant le cas général où le point peut se mouvoir librement dans l'espace.

Les équations différentielles du mouvement sont alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \tag{1}$$

Soit

$$\alpha = \varphi(x, y, z, x', y', z', t) \tag{2}$$

une intégrale du système (1); on doit avoir, identiquement,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dz}z' \\ &\qquad + \frac{d\alpha}{dx'}X + \frac{d\alpha}{dy'}Y + \frac{d\alpha}{dz'}Z = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Pour que l'intégrale (2) convienne à plusieurs problèmes différents, il faut que les équations du premier degré en X, Y, Z, obtenues en différentiant une ou plusieurs fois l'équation (3), par rapport à x', y', z', rentrent les unes dans les autres et se réduisent, au plus, à deux distinctes. En différentiant une fois l'équation (3), par rapport à chacune des variables x', y', z', et se rappelant que $\frac{d\alpha}{dt}$ est égal à 0 ou à -1, il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d^2\alpha}{dx\,dx'}x' + \frac{d^2\alpha}{dy\,dx'}y' + \frac{d^2\alpha}{dz\,dx'}z' \\ &\qquad + \frac{d^2\alpha}{dx'^2}X + \frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}Y + \frac{d^2\alpha}{dx'\,dz'}Z = 0, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d^2\alpha}{dx\,dy'}x' + \frac{d^2\alpha}{dy\,dy'}y' + \frac{d^2\alpha}{dz\,dy'}z' \\ &\qquad + \frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}X + \frac{d^2\alpha}{dy'^2}Y + \frac{d^2\alpha}{dy'\,dz'}Z = 0, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d^2\alpha}{dx\,dz'}x' + \frac{d^2\alpha}{dy\,dz'}y' + \frac{d^2\alpha}{dz\,dz'}z' \\ &\qquad + \frac{d^2\alpha}{dx'\,dz'}X + \frac{d^2\alpha}{dz'\,dy'}Y + \frac{d^2\alpha}{dz'^2}Z = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Les équations (3), (4), (5), (6) doivent rentrer les unes dans les autres, lorsque l'intégrale α convient à plusieurs questions. Nous examinerons successivement le cas où elles se réduisent à une seule ou à deux distinctes.

XIV.

Supposons d'abord que les équations (3), (4), (5), (6) se réduisent à une seule. Il faut alors que les coefficients des inconnues soient proportionnels. On aura alors, puisque les équations (3) et (4) rentrent l'une dans l'autre,

$$(7) \qquad \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'^2}}{\dfrac{d\alpha}{dx'}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}}{\dfrac{d\alpha}{dy'}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dz'}}{\dfrac{d\alpha}{dz'}},$$

ce que l'on peut écrire

$$(8) \qquad \frac{d.\log\dfrac{d\alpha}{dx'}}{dx'} = \frac{d.\log\dfrac{d\alpha}{dy'}}{dx'} = \frac{d.\log\dfrac{d\alpha}{dz'}}{dx'}:$$

d'où l'on conclut que $\log\frac{d\alpha}{dx'}$, $\log\frac{d\alpha}{dy'}$, $\log\frac{d\alpha}{dz'}$ ont des différences indépendantes de x'. On verra de même que ces différences sont indépendantes de y' et de z'; par suite, les rapports

$$\frac{\dfrac{d\alpha}{dy'}}{\dfrac{d\alpha}{dx'}}, \quad \frac{\dfrac{d\alpha}{dz'}}{\dfrac{d\alpha}{dx'}},$$

ne dépendent que de x, y, z. Nous pouvons donc poser

$$(9) \qquad \frac{\dfrac{d\alpha}{dx'}}{\mathrm{M}} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dy'}}{\mathrm{N}} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dz'}}{\mathrm{P}},$$

M, N, P ne contenant pas x', y', z'. On en conclut, par une intégration facile, que α est de la forme

$$(10) \qquad \alpha = \mathrm{F}(\mathrm{M}x' + \mathrm{N}y' + \mathrm{P}z',\ x,\ y,\ z,\ t).$$

XV.

Supposons, actuellement, que les équations (3), (4), (5), (6), ainsi que celles que l'on en peut déduire par la différentiation, se réduisent à deux distinctes. Nous subdiviserons ce cas en deux autres :

1°. Les équations (4), (5), (6) se réduisent à une seule, qui est distincte de l'équation (3).

On a alors, en écrivant que les coefficients des inconnues sont proportionnels dans les équations (4) et (5),

$$(11)\qquad \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'^2}}{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}}{\dfrac{d^2\alpha}{dy'^2}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dz'}}{\dfrac{d^2\alpha}{dy'\,dz'}},$$

c'est-à-dire

$$(12)\qquad \frac{\dfrac{d}{dx'}\dfrac{d\alpha}{dx'}}{\dfrac{d}{dx'}\dfrac{d\alpha}{dy'}} = \frac{\dfrac{d}{dy'}\dfrac{d\alpha}{dx'}}{\dfrac{d}{dy'}\dfrac{d\alpha}{dy'}} = \frac{\dfrac{d}{dz'}\dfrac{d\alpha}{dx'}}{\dfrac{d}{dz'}\dfrac{d\alpha}{dz'}}.$$

Les dérivées partielles de $\frac{d\alpha}{dx'}$, $\frac{d\alpha}{dy'}$ étant proportionnelles, les différentielles de ces deux fonctions s'annulent en même temps, et l'on peut, par conséquent, les considérer comme fonctions l'une de l'autre, ou, ce qui revient au même, comme fonctions d'une même quantité u. On verra de même que les équations (5) et (6) rentrant l'une dans l'autre, $\frac{d\alpha}{dz'}$ doit être aussi fonction de u. Écrivons donc

$$\frac{d\alpha}{dx'} = \varphi_1(u, x, y, z, t),$$

$$\frac{d\alpha}{dy'} = \varphi_2(u, x, y, z, t),$$

$$\frac{d\alpha}{dz'} = \varphi_3(u, x, y, z, t);$$

les coefficients de X, Y, Z dans l'équation (4) peuvent s'écrire, d'après cela,

$$\frac{d^2\alpha}{dx'^2} = \frac{d\varphi_1}{du}\frac{du}{dx'},\qquad \frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'} = \frac{d\varphi_2}{du}\frac{du}{dx'},\qquad \frac{d^2\alpha}{dx'\,dz'} = \frac{d\varphi_3}{du}\frac{du}{dx'}.$$

Si donc nous différentions cette équations (4) par rapport à x', après l'avoir divisée par $\frac{du}{dx'}$, nous obtiendrons une nouvelle équation entre X, Y, Z, dans laquelle les coefficients de ces inconnues seront

$$\frac{d^2\varphi_1}{du^2}\frac{du}{dx'}, \qquad \frac{d^2\varphi_2}{du^2}\frac{du}{dx'}, \qquad \frac{d^2\varphi_3}{du^2}\frac{du}{dx'};$$

et, comme X, Y, Z doivent rester indéterminés, quoique satisfaisant aux équations (3) et (4) et à cette équation nouvelle, il faut que le déterminant du système

$$\begin{matrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_3, \\ \frac{d\varphi_1}{du}, & \frac{d\varphi_2}{du}, & \frac{d\varphi_3}{du}, \\ \frac{d^2\varphi_1}{du^2}, & \frac{d^2\varphi_2}{du^2}, & \frac{d^2\varphi_3}{du^2}, \end{matrix}$$

soit égal à zéro, et que, par suite, φ_1, φ_2, φ_3 satisfassent à une même équation de la forme

$$A\frac{d\varphi_1}{du^2} + B\frac{d\varphi_1}{du} + C\varphi_1 = 0.$$

Or, cette équation étant linéaire, on sait qu'il existe, entre trois quelconques de ses solutions, une relation de la forme

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 = 0,$$

C_1, C_2, C_3 étant indépendants de u. On doit donc avoir, en substituant à φ_1, φ_2, φ_3 leurs valeurs,

$$C_1\frac{d\alpha}{dx'_1} + C_2\frac{d\alpha}{dy'} + C_3\frac{d\alpha}{dz'} = 0,$$

et l'on en conclut, par une intégrale facile,

$$\alpha = F\left(\frac{x'}{C_1} - \frac{y'}{C_2}, \quad \frac{x'}{C_2} - \frac{z'}{C_3}, \quad x, y, z, t\right).$$

2°. Supposons maintenant que les équations (3), (4), (5), (6) se réduisent à deux distinctes, parce que les équations (4), (5), (6) se réduisent à deux qui entraînent l'équation (3), ainsi que toutes celles que l'on peut en déduire, en la différentiant par rapport à x', y', z'.

Pour que les équations (4), (5), (6) se réduisent à deux, il faut qu'il existe une même relation linéaire entre les coefficients des inconnues dans ces équations, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(16)\qquad M\frac{d^2\alpha}{dx'^2}+N\frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}+P\frac{d^2\alpha}{dz'\,dx'}=0,$$

$$(17)\qquad M\frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}+N\frac{d^2\alpha}{dy'^2}+P\frac{d^2\alpha}{dy'\,dz'}=0,$$

$$(18)\qquad M\frac{d^2\alpha}{dz'\,dx'}+N\frac{d^2\alpha}{dz'\,dy'}+P\frac{d^2\alpha}{dz'^2}=0,$$

M, N, P étant des fonctions quelconques de x, y, z, x', y', z'. Il faut, d'ailleurs, pour que l'équation (3) rentre dans les trois autres, que l'on ait aussi

$$(19)\qquad M\frac{d\alpha}{dx'}+N\frac{d\alpha}{dy'}+P\frac{d\alpha}{dz'}=0.$$

En différentiant l'équation (19) par rapport à x', y', z', et en ayant égard aux équations (16), (17), (18), il vient

$$(20)\qquad \frac{dM}{dx'}\frac{d\alpha}{dx'}+\frac{dN}{dx'}\frac{d\alpha}{dy'}+\frac{dP}{dx'}\frac{d\alpha}{dz'}=0,$$

$$(21)\qquad \frac{dM}{dy'}\frac{d\alpha}{dx'}+\frac{dN}{dy'}\frac{d\alpha}{dy'}+\frac{dP}{dy'}\frac{d\alpha}{dz'}=0,$$

$$(22)\qquad \frac{dM}{dz'}\frac{d\alpha}{dx'}+\frac{dN}{dz'}\frac{d\alpha}{dy'}+\frac{dP}{dz'}\frac{d\alpha}{dz'}=0.$$

Si maintenant on différentie l'équation (4) par rapport à x', on formera une nouvelle équation du premier degré en X, Y, Z, et, pour que cette nouvelle équation, combinée avec les précédentes, laisse ces inconnues indéterminées, il faut qu'il existe, entre les coefficients, la même relation qu'entre ceux des équations précédentes, et que l'on ait

$$(23)\qquad M\frac{d^3\alpha}{dx'^3}+N\frac{d^3\alpha}{dx'^2\,dy'}+P\frac{d^3\alpha}{dx'^2\,dz'}=0.$$

Si l'on compare cette équation (23) avec celle que l'on déduit de l'équation (16), en la différentiant par rapport à x', il vient

$$(24)\qquad \frac{dM}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dx'^2}+\frac{dN}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}+\frac{dP}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dx'\,dz'}=0;$$

on trouverait, de la même manière,

$$(25)\qquad \frac{d\mathrm{M}}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}+\frac{d\mathrm{N}}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dy'^2}+\frac{d\mathrm{P}}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dy'\,dz'}=0,$$

$$(26)\qquad \frac{d\mathrm{M}}{dx}\frac{d^2\alpha}{dx'\,dz'}+\frac{d\mathrm{N}}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dy'\,dz'}+\frac{d\mathrm{P}}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dz'^2}=0.$$

Or les équations (24), (25), (26), rapprochées des équations (16), (17), (18), prouvent que l'on a

$$\frac{\frac{d\mathrm{M}}{dx'}}{\mathrm{M}}=\frac{\frac{d\mathrm{N}}{dx'}}{\mathrm{N}}=\frac{\frac{d\mathrm{P}}{dx'}}{\mathrm{P}}.$$

On prouverait de même que l'on a

$$(28)\qquad \frac{\frac{d\mathrm{M}}{dy'}}{\mathrm{M}}=\frac{\frac{d\mathrm{N}}{dy'}}{\mathrm{N}}=\frac{\frac{d\mathrm{P}}{dy'}}{\mathrm{P}},$$

$$(29)\qquad \frac{\frac{d\mathrm{M}}{dz'}}{\mathrm{M}}=\frac{\frac{d\mathrm{N}}{dz'}}{\mathrm{N}}=\frac{\frac{d\mathrm{P}}{dz'}}{\mathrm{P}},$$

et l'on en conclut que $\log\mathrm{M}$, $\log\mathrm{N}$, $\log\mathrm{P}$ ont les mêmes dérivées par rapport à x', y', z', et que, par suite, les rapports $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}$, $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}}$ sont indépendants de ces variables; et comme, dans l'équation (19), M, N, P peuvent être remplacées par des quantités proportionnelles, on peut écrire

$$(30)\qquad \mathrm{A}\frac{d\alpha}{dx'}+\mathrm{B}\frac{d\alpha}{dy'}+\mathrm{C}\frac{d\alpha}{dz'}=0,$$

A, B, C étant indépendants de x', y', z'. Or cette équation (30) peut s'intégrer, et donne

$$\alpha=\mathrm{F}\left(\frac{x'}{\mathrm{A}}-\frac{y'}{\mathrm{B}},\quad \frac{x'}{\mathrm{A}}-\frac{z'}{\mathrm{C}},\quad x, y, z, t\right).$$

XVI.

D'après les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, nous voyons que l'intégrale cherchée est nécessairement de la forme

$$(1)\qquad \alpha=\mathrm{F}(\mathrm{M}x'+\mathrm{N}y'+\mathrm{P}z',\quad x, y, z, t),$$

ou

$$(2)\qquad \alpha = \mathrm{F}\left(\frac{x'}{\mathrm{M}} - \frac{y'}{\mathrm{N}},\ \frac{x'}{\mathrm{M}} - \frac{z'}{\mathrm{P}},\ x, y, z, t\right),$$

M, N, P désignant des fonctions de x, y, z seulement.

Nous nous occuperons d'abord de la seconde forme, qui comprend évidemment la première.

En différentiant l'équation (2), et posant, pour plus de simplicité,

$$\frac{x'}{\mathrm{M}} - \frac{y'}{\mathrm{N}} = u,\quad \frac{x'}{\mathrm{M}} - \frac{z'}{\mathrm{P}} = v,$$

il vient, après substitution de X, Y, Z, à $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$,

$$(3)\ \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dz}z' \\ &+\frac{d\alpha}{du}\left(x'^2\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dx} + x'y'\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dy} + x'z'\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dz} - y'x'\frac{d\frac{1}{\mathrm{N}}}{dx} - y'^2\frac{d\frac{1}{\mathrm{N}}}{dy} - y'z'\frac{d\frac{1}{\mathrm{N}}}{dz}\right) \\ &+\frac{d\alpha}{dv}\left(x'^2\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dx} + x'y'\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dy} + x'z'\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dz} - x'z'\frac{d\frac{1}{\mathrm{P}}}{dz} - z'y'\frac{d\frac{1}{\mathrm{P}}}{dy} - z'^2\frac{d\frac{1}{\mathrm{P}}}{dz}\right) \\ &+\frac{d\alpha}{du}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{M}} - \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{N}}\right) + \frac{d\alpha}{dv}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{M}} - \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}\right). \end{aligned}\right.$$

Si, dans cette équation identique, on remplace y' par $\mathrm{N}\left(\frac{x'}{\mathrm{M}} - u\right)$ et z' par $\mathrm{P}\left(\frac{x'}{\mathrm{M}} - v\right)$, le coefficient de x'^2 devra être nul dans le résultat; nous aurons donc

$$(4)\ \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{du}\left(\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dx} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dy} + \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dz} - \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\frac{d\frac{1}{\mathrm{N}}}{dx} - \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{M}^2}\frac{d\frac{1}{\mathrm{N}}}{dy} - \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{M}^2}\frac{d\frac{1}{\mathrm{N}}}{dz}\right) \\ &+\frac{d\alpha}{dv}\left(\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dx} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dy} + \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}\frac{d\frac{1}{\mathrm{M}}}{dz} - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}\frac{d\frac{1}{\mathrm{P}}}{dx} - \frac{\mathrm{P}^2}{\mathrm{M}^2}\frac{d\frac{1}{\mathrm{P}}}{dz} + \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{M}^2}\frac{d\frac{1}{\mathrm{P}}}{dy}\right). \end{aligned}\right.$$

Il peut se présenter deux cas, que nous examinerons successivement.

1°. Les coefficients de $\frac{d\alpha}{du}, \frac{d\alpha}{dv}$, dans l'équation (4), ne sont pas l'un et l'autre égaux à zéro.

Dans ce cas, cette équation (4) prouve que le rapport $\dfrac{\frac{d\alpha}{du}}{\frac{d\alpha}{dv}}$ est indépendant de u et de v. En désignant par k ce rapport, on voit sans peine que α doit être, pour cela, une fonction de la somme $v + ku$. Mais $v + ku$ est une fonction linéaire de x', y', z' que nous pouvons désigner par $ax' + by' + cz'$; dans ce cas, α est donc de la forme

$$\alpha = \mathrm{F}\,(ax' + by' + cz',\ x,\ y,\ z,\ t),$$

c'est-à-dire que l'intégrale cherchée rentre dans la forme (1).

2°. Les coefficients de $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\alpha}{dv}$ sont nuls.

En égalant ces coefficients à zéro et développant les calculs, on trouve

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = \mathrm{M}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{N}}{dx} - \mathrm{N}\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{N}}{dz} - \mathrm{N}\frac{d\mathrm{M}}{dz}\right)& \\ + \mathrm{N}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{N}}{dy} - \mathrm{N}\frac{d\mathrm{M}}{dy}\right)&, \end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = \mathrm{M}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) + \mathrm{N}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{P}}{dy} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{M}}{dy}\right)& \\ + \mathrm{P}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{P}}{dz} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{M}}{dz}\right)&. \end{aligned}\right.$$

Or les équations (5) et (6) équivalent à

$$(7)\qquad \mathrm{M}\frac{d\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}}{dx} + \mathrm{P}\frac{d\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}}{dz} + \mathrm{N}\frac{d\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}}{dy} = 0,$$

$$(8)\qquad \mathrm{M}\frac{d\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{N}}}{dx} + \mathrm{P}\frac{d\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}}{dz} + \mathrm{N}\frac{d\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}}{dy} = 0,$$

et celles-ci prouvent qu'en égalant $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$ et $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}$ à des constantes, on obtient les équations d'une série de lignes droites. Si, en effet, on pose

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \mathrm{C},\quad \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{N}} = \mathrm{C}',$$

on en déduit, par la différentiation,

$$(9)\qquad \frac{d\frac{N}{M}}{dx} + \frac{d\frac{N}{M}}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d\frac{N}{M}}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$(10)\qquad \frac{d\frac{P}{M}}{dx} + \frac{d\frac{P}{M}}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d\frac{P}{M}}{dy}\frac{dy}{dx} = 0;$$

et ces deux équations (9) et (10), comparées aux deux précédentes (7) et (8), prouvent que l'on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{P}{M}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{N}{M}.$$

$\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$ sont donc constants, et, par suite, la ligne considérée est droite.

Nous devons néanmoins signaler un cas d'exception au raisonnement précédent. Si l'on avait

$$\frac{N}{M} = F\left(\frac{P}{M}\right),$$

les lignes dont nous parlons deviendraient indéterminées. Dans ce cas, les deux équations (7) et (8) rentrent l'une dans l'autre; elles deviennent, en supposant $M = 1$ (ce qui est permis, puisque les quantités M, N, P ne figurent que par leurs rapports),

$$\frac{dN}{dx} + N\frac{dN}{dz} + F(N)\frac{dN}{dy} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$y = xF(N) + \varphi(z - Nx, N),$$

équation qui prouve que

$$N = \text{constante}$$

représente une surface réglée. Ainsi donc, en résumant les résultats que nous venons d'obtenir, nous voyons que α doit avoir l'une des formes :

1°. $\alpha = F(ax' + by' + cz', x, y, z, t)$,

2°. $\alpha = F(y' - Nx', z' - Px', x, y, z, t)$, N et P étant deux fonctions de x, y, z qui, égalées à deux constantes, représentent les équations d'une ligne droite;

$$3^{\circ}. \qquad \alpha = \mathrm{F}[y' - \mathrm{N}x',\ z' - \varphi(\mathrm{N})x',\ x,\ y,\ z,\ t],$$

N étant une fonction de x, y, z qui, égalée à une constante, représente une surface réglée.

XVII.

Les trois formes possibles d'une intégrale commune à plusieurs problèmes sont renfermées dans la suivante,

$$(1) \qquad \alpha = \mathrm{F}(y' - \mathrm{N}x',\ z' - \mathrm{P}x',\ x,\ y,\ z,\ t),$$

dans laquelle N et P désignent des fonctions de x, y, z.

En différentiant l'équation (1) et posant

$$y' - \mathrm{N}x' = u, \quad z' - \mathrm{P}x' = v,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dz}z' + \frac{d\alpha}{du}\left(-x'^2\frac{d\mathrm{N}}{dx} - x'y'\frac{d\mathrm{N}}{dy} - x'z'\frac{d\mathrm{N}}{dz}\right)&\\ + \frac{d\alpha}{dv}\left(-x'^2\frac{d\mathrm{P}}{dx} - x'y'\frac{d\mathrm{P}}{dy} - x'z'\frac{d\mathrm{P}}{dz}\right)&\\ + \frac{d\alpha}{du}(\mathrm{Y} - \mathrm{NX}) + \frac{d\alpha}{dv}(\mathrm{Z} - \mathrm{PX}) = 0.&\end{aligned}$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons y' et z' par leurs valeurs $u + \mathrm{N}x'$, $v + \mathrm{P}x'$, nous pourrons, dans le résultat, considérer x, y, z, x', u, v comme six variables indépendantes, et égaler à zéro les coefficients des diverses puissances de x'. En considérant, en particulier, les termes indépendants de x', nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dy}u + \frac{d\alpha}{dz}v + \frac{d\alpha}{du}(\mathrm{Y} - \mathrm{NX}) + \frac{d\alpha}{dv}(\mathrm{Z} - \mathrm{PX}).$$

Or cette équation prouve qu'en considérant dans la fonction α, x comme un paramètre constant, et les lettres u et v comme les vitesses $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, l'équation

$$\alpha = \mathrm{F}(u, v, x, y, z, t)$$

serait une intégrale générale des équations du mouvement d'un point sollicité, dans le plan des yz, par des forces ayant pour composantes parallèles aux x et aux z, $Y - NX$ et $Z - PX$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute intégrale commune à deux problèmes relatifs au mouvement d'un point libre dans l'espace peut se déduire d'une intégrale relative au mouvement d'un point dans un plan.

Si l'on désigne par

$$\alpha = F(t, x, y, z, y', z')$$

cette seconde intégrale dans laquelle x peut entrer comme paramètre, pour en déduire l'intégrale cherchée, il faut remplacer y' et z' par $y' - Nx'$ et $z' - Px'$, N et P étant des fonctions de x, y, z, qui devront être ultérieurement déterminées.

XVIII.

Le théorème précédent permet de trouver toutes les intégrales communes à plusieurs problèmes et comprises dans la première forme

$$(1) \qquad \alpha = F(ax' + by' + cz', x, y, z, t).$$

Il est clair, en effet, qu'en la considérant comme cas particulier de celle qui a été examinée au paragraphe précédent, il faut considérer que dans cette dernière α ne dépend que d'une fonction linéaire des quantités désignées par u et v, et l'intégrale relative au mouvement dans un plan qui peut lui donner naissance doit, par suite, être de la forme

$$(2) \qquad \alpha = \psi(Ay' + Bz', y, z, x, t).$$

Or il a été démontré (paragraphes IV à IX) que les seules intégrales de cette forme que puissent avoir les problèmes à deux dimensions sont

$$(3) \qquad \alpha = (zy' - yz') - ct,$$

$$(4) \qquad \alpha = (yz' - zy')^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}\right),$$

que nous pouvons représenter, en y introduisant le paramètre x, par les formules plus générales

$$\alpha_1 = \mathrm{F}\,[zy' - yz' - t\,\varphi\,(x), x],$$

$$\alpha_1 = \mathrm{F}\left[(zy' - yz')^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}, x\right), x\right].$$

Si dans ces deux formules nous remplaçons y' et z' par $y' - \mathrm{N}x'$, $z' - \mathrm{P}x'$, nous aurons, pour les seules formes possibles de l'intégrale cherchée,

$$\alpha = \mathrm{F}\,[z\,(y' - \mathrm{N}x') - y\,(z' - \mathrm{P}x') - t\,\varphi\,(x), x], \tag{5}$$

$$\alpha = \mathrm{F}\left\{[z(y' - \mathrm{N}x') - y\,(z' - \mathrm{P}x')]^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}, x\right), x\right\}. \tag{6}$$

XIX.

Examinons d'abord la forme (5); en la différentiant, et posant

$$z\,(y' - \mathrm{N}x') - y\,(z' - \mathrm{P}x') - t\,\varphi\,(x) = u,$$

il vient, après avoir remplacé $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ par X, Y, Z,

$$\frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{du}\left\{\begin{array}{l} -\varphi(x) - zx'^2\frac{d\mathrm{N}}{dx} + yx'^2\frac{d\mathrm{P}}{dx} - t\,\varphi'(x)\,x' \\ -zx'y'\frac{d\mathrm{N}}{dy} + yx'y'\frac{d\mathrm{P}}{dy} - zx'z'\frac{d\mathrm{N}}{dz} + yx'z'\frac{d\mathrm{P}}{dz} \\ +z'(y' - \mathrm{N}x') - y'(z' - \mathrm{P}x') + z(y - \mathrm{NX}) \\ -y\,(z - \mathrm{PX}) \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons t par sa valeur

$$t = \frac{z\,(y' - \mathrm{N}x') - y\,(z' - \mathrm{P}x') - u}{\varphi\,(x)},$$

nous pourrons, après cette substitution, considérer x, y, z, x', y', z' et u comme sept variables indépendantes, et, par suite, décomposer cette équation (7) en plusieurs autres. Écrivons, en particulier, que le coefficient de x' est égal à zéro; nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du}\left[\frac{u\,\varphi'(x)}{\varphi\,(x)}\right] = 0: \tag{8}$$

on en déduit, par une intégration facile,

$$\alpha = \varphi\left[\frac{u}{\varphi(x)}\right]. \tag{9}$$

Mais cette intégrale (9) équivaut évidemment à

$$\alpha_1 = \frac{u}{\varphi(x)},$$

α_1 étant une nouvelle constante arbitraire; nous voyons donc, en posant $\frac{1}{\varphi(x)} = \psi(x)$, que l'intégrale cherchée est de la forme

$$\alpha = [z(y' - \mathrm{N}x') - y(z' - \mathrm{P}x')]\,\psi(x) - t. \tag{10}$$

Si nous différentions cette intégrale, en remplaçant dans le résultat $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ par X, Y, Z, nous devrons obtenir une identité

$$-1 + \psi(x)\left\{\begin{aligned} & z\mathrm{Y} - y\mathrm{Z} - (z\mathrm{N} - \mathrm{P}y)\mathrm{X} - z'\mathrm{N}x' + y'\mathrm{P}x' \\ & - z\left(x'^2\frac{d\mathrm{N}}{dx} + x'y'\frac{d\mathrm{N}}{dy} + x'z'\frac{d\mathrm{N}}{dz}\right) \\ & + y\left(x'^2\frac{d\mathrm{P}}{dx} + x'y'\frac{d\mathrm{P}}{dy} + x'z'\frac{d\mathrm{P}}{dz}\right) \\ & + \psi'(x).x'[z(y' - \mathrm{N}x') - y(z' - \mathrm{P}x')] \end{aligned}\right\} = 0. \tag{11}$$

Si, dans cette identité, nous égalons à zéro le coefficient de x'^2, celui de $x'y'$ et celui de $x'z'$, nous obtiendrons les trois relations suivantes :

$$-z\frac{d\mathrm{N}}{dx} + y\frac{d\mathrm{P}}{dx} = 0,$$

$$\mathrm{P} - z\frac{d\mathrm{N}}{dy} + y\frac{d\mathrm{P}}{dy} = 0,$$

$$-\mathrm{N} - z\frac{d\mathrm{N}}{dz} + y\frac{d\mathrm{P}}{dz} = 0.$$

En ajoutant ces équations, après avoir multiplié la première par dx, la deuxième par dy et la troisième par dz, il vient

$$d.\mathrm{P}y - d.\mathrm{N}z = 0, \tag{12}$$

le signe d se rapportant à la variation simultanée de x, y et z; on en conclut

$$\mathrm{P}y - \mathrm{N}z = \mathrm{C}, \tag{13}$$

C étant une constante. Cette relation, introduite dans l'intégrale (10), lui fait prendre la forme

$$(14)\qquad \alpha = (zy' - yz' + Cx')\,\psi(x) - t;$$

en différentiant enfin cette équation (14) et remplaçant $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ par X, Y, Z, il vient

$$(zY - yZ + CX)\,\psi(x) + \psi'(x)(zy' - yz' + Cx')\,x' - 1 = 0,$$

équation qui ne peut être identique que si l'on a

$$\psi'(x) = 0,$$

et, par suite,

$$\psi(x) = C_1,$$

C_1 désignant une constante. L'intégrale cherchée est donc enfin

$$(15)\qquad (zy' - yz' + Cx')\,C_1 - t = \alpha;$$

elle convient à tous les problèmes dans lesquels les forces satisfont à la condition

$$(16)\qquad (zY - yZ + CX)\,C_1 - 1 = 0.$$

XX.

Examinons enfin les intégrales renfermées dans la forme (6) :

$$(6)\qquad \alpha = F\left\{[z(y' - Nx') - y(z' - Px')]^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}, x\right), x\right\}.$$

Si nous différentions cette équation en posant

$$(17)\qquad [z(y' - Nx') - y(z' - Px')]^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}, x\right) = u,$$

$$\frac{y}{z} = r,$$

il viendra

$$(18)\qquad \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{du}\left\{\begin{array}{l} 2[z(y' - Nx') - y(z' - Px')]\left\{\begin{array}{l} z'(y' - Nx') + z(Y - NX) \\ -Z\left(x'^2\frac{dN}{dx} + x'y'\frac{dN}{dy} + x'z'\frac{dN}{dz}\right) \\ -y'(z' - Px') - y(Z - PX) \\ +y\left(x'^2\frac{dP}{dx} + x'y'\frac{dP}{dy} + x'z'\frac{dP}{dz}\right) \end{array}\right\} \\ +\frac{d\varphi}{dr}\,\frac{yz' - zy'}{z^2} - \frac{d\varphi}{dx}x' \end{array}\right\} = 0.$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons y' par sa valeur déduite de la relation (17), nous pourrons considérer, dans le résultat, x, y, z, x', z', u, comme six variables indépendantes, et, par suite, décomposer l'équation (18) en plusieurs autres. Nous écrirons, d'abord, que le coefficient de x' est égal à zéro. On obtient ainsi

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du}\left\{ 2\sqrt{u+\varphi\left(\frac{y}{z},\, x\right)}\left\{ \begin{array}{r} -\sqrt{u+\varphi\left(\frac{y}{z},\, x\right)}\,\frac{dN}{dy} + \frac{P}{z}\sqrt{u+\varphi\left(\frac{y}{z},\, x\right)} \\ +\frac{y}{z}\,\frac{dP}{dy}\sqrt{u+\varphi\left(\frac{y}{z},\, x\right)} \end{array} \right\} - \frac{yP - zN}{z^2}\,\frac{d\varphi}{dr} - \frac{d\varphi}{dx} \right\} = 0.$$

En effectuant les multiplications indiquées, on voit que cette équation est de la forme

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du}(A + Bu) = 0, \tag{19}$$

A et B étant indépendants de u. α ne contenant que les variables x et u, cette équation exige que y et z disparaissent aussi de A et B, et que ces lettres soient fonctions de la seule variable x. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du}\left[\varphi_1(x) + u\varphi_2(x)\right] = 0. \tag{20}$$

Pour intégrer cette équation, il faut considérer le système

$$dx = \frac{du}{\varphi_1(x) + u\varphi_2(x)} = \frac{d\alpha}{0}, \tag{21}$$

l'une des intégrales est

$$\alpha = \text{constante}.$$

Pour en obtenir une seconde, mettons l'équation (21) sous la forme

$$\varphi_1(x) + u\varphi_2(x) = \frac{du}{dx}. \tag{22}$$

Cette équation étant linéaire, son intégrale est de la forme

$$u = C\psi_1(x) + \psi_2(x),$$

ou, en résolvant par rapport à la constante,

$$C = \frac{u - \psi_2(x)}{\psi_1(x)},$$

d'où l'on conclut que l'intégrale de l'équation (20) est

$$\alpha = F\left[\frac{u - \psi_2(x)}{\psi_1(x)}\right], \tag{23}$$

ce qui équivaut évidemment à

$$\alpha_1 = \frac{u - \psi_2(x)}{\psi_1(x)}, \tag{24}$$

α_1 désignant une nouvelle constante. Par conséquent, en remettant pour u sa valeur, on voit que l'intégrale cherchée doit être de la forme

$$\frac{[(yz' - zy') + x'(Pz - Ny)]^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}, x\right) - \psi_2(x)}{\psi_1(x)} = \alpha, \tag{25}$$

ou, en posant

$$\frac{1}{\psi_1(x)} = F(x), \quad \frac{\varphi\left(\frac{y}{z}, x\right) - \psi_2(x)}{\psi_1(x)} = f\left(\frac{y}{z}, x\right),$$

$$\alpha = [(yz' - zy') + x'(Pz - Ny)]^2 F(x) - f\left(\frac{y}{z}, x\right). \tag{26}$$

En différentiant cette intégrale et remplaçant, dans le résultat, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ par X, Y, Z, nous obtiendrons l'identité

$$2F(x)[yz' - zy' + x'(Pz - Ny)]\left\{\begin{array}{l} yZ - zY + X(Pz - Ny) + x'(Pz' - Ny') \\ \quad + z\left(x'^2\frac{dP}{dx} + x'y'\frac{dP}{dy} + x'z'\frac{dP}{dz}\right) \\ \quad - y\left(x'^2\frac{dN}{dx} + x'y'\frac{dN}{dy} + x'z'\frac{dN}{dz}\right) \end{array}\right\} = 0.$$
$$+ F'(x)x'[yz' - zy' + x'(Pz - Ny)]^2$$
$$- \frac{df}{dx}x' - \frac{df}{dr}\frac{zy' - yz'}{z^2}$$

En égalant à zéro le coefficient de x'^2, on obtient

$$2F(x)(Pz - Ny)\left(z\frac{dP}{dx} - y\frac{dN}{dx}\right) + F'(x)(Pz - Ny)^2 = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\frac{d}{dx}(\mathrm{P}z-\mathrm{N}y)}{\mathrm{P}z-\mathrm{N}y}=-\frac{\mathrm{F}'(x)}{2\mathrm{F}(x)},$$

et, en intégrant et remarquant que la constante peut être une fonction de z et de y,

$$(\mathrm{P}z-\mathrm{N}y)^2.\,\mathrm{F}(x)=\varphi(z,y).$$

A l'aide de cette relation et en posant

$$\sqrt{\mathrm{F}(x)}=\mathrm{F}_1(x),\quad \sqrt{\varphi(y,z)}=\varphi_1(y,z),$$

l'intégrale (26) prend la forme

$$(27)\qquad [(yz'-zy')\,\mathrm{F}_1(x)+\varphi_1(y,z)\,x']^2-f\left(\frac{y}{z},x\right)=\alpha.$$

En différentiant cette équation (27), on obtient

$$(28)\left\{\begin{array}{l} 2[(yz'-zy')\mathrm{F}_1(x)+x'\varphi_1(y,z)]\left[\begin{array}{l}(y\mathrm{Z}-z\mathrm{Y})\mathrm{F}_1(x)+(yz'-zy')\mathrm{F}'_1(x)\,x'\\ +\frac{d\varphi_1}{dy}\,y'x'+\frac{d\varphi_1}{dz}\,z'x'+\varphi_1(y,z)\,\mathrm{X}\end{array}\right]\\ \qquad -\frac{df}{dr}\frac{y'z-zy'}{z^2}-\frac{df}{dx}\,x'=0,\end{array}\right.$$

et, en égalant à zéro le coefficient de x'^2z' et celui de x'^2y', il vient

$$(29)\qquad \varphi_1(y,z)\left[y\mathrm{F}'_1(x)+\frac{d\varphi_1}{dz}\right]=0,$$

$$(30)\qquad \varphi_1(y,z)\left[-z\mathrm{F}'_1(x)+\frac{d\varphi_1}{dy}\right]=0.$$

Or les équations

$$\frac{d\varphi_1}{dz}=-y\mathrm{F}'_1(x),$$

$$\frac{d\varphi_1}{dy}=z\mathrm{F}'_1(x)$$

sont incompatibles; car $\mathrm{F}'_1(x)(z\,dy-y\,dz)$ n'est pas une différentielle exacte. On ne peut donc satisfaire aux équations (29) et (30) que par l'une des hypothèses suivantes,

$$\varphi_1(y,z)=0,\quad \left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}'_1(x)=0,\\ \varphi_1(y,z)=\text{constante},\end{array}\right.$$

et ces hypothèses, introduites dans l'intégrale (27), lui font prendre les deux formes

$$(31)\qquad [(yz' - zy')\,F_1(x)]^2 - f\left(\frac{y}{z}, x\right) = \alpha,$$

$$(32)\qquad [(yz' - zy')\,C + C_1 x']^2 - f\left(\frac{y}{z}, x\right) = \alpha;$$

et en écrivant que, par la différentiation, ces équations conduisent à des identités, on trouve facilement que, dans la première, $F_1(x)$ doit être constant et $f\left(\frac{y}{z}, x\right)$ indépendant de x, et que, dans la seconde, $f\left(\frac{y}{z}, x\right)$ doit être une constante. Les intégrales cherchées sont donc enfin

$$(yz' - zy')^2 - f\left(\frac{y}{z}\right) = \alpha,$$
$$[(yz' - zy')\,C + C_1 x']^2 = \alpha;$$

elles rentrent l'une et l'autre dans celles que nous avions obtenues précédemment.

XXI.

Revenons actuellement à la forme

$$(1)\qquad \alpha = F(y' - Nx',\ z' - Px',\ x, y, z, t).$$

Nous savons (§ XIV) que N et P satisfont aux deux équations

$$\frac{dN}{dx} + N\frac{dN}{dy} + P\frac{dN}{dz} = 0,$$
$$\frac{dP}{dx} + N\frac{dP}{dy} + P\frac{dP}{dz} = 0,$$

et nous en avons conclu que des équations

$$N = \text{constante},\quad P = \text{constante},$$

on déduirait

$$\frac{dy}{dx} = N,\quad \frac{dz}{dx} = P,$$

et, par suite,

$$y' - Nx' = 0,\quad z' - Px' = 0;$$

les deux différences $y' - Nx'$ et $z' - Px'$ s'annulent donc l'une et l'autre avec dN et dP; on en conclut facilement qu'en désignant par N' et P' les dérivées de N et de P, ces deux différences sont de la forme

$$y' - Nx' = AN' + BP',$$
$$z' - Px' = A_1 N' + B_1 P',$$

A, B, A_1, B_1 étant des fonctions de x, y, z. D'après cela, l'intégrale (1) est de la forme

$$\alpha = F(N', P', x, y, z, t). \tag{2}$$

Si donc on prend pour coordonnées N et P, et une troisième fonction Q de x, y et z, on pourra considérer x, y, z comme des fonctions de N, P, Q, et écrire

$$\alpha = F(N', P', N, P, Q, t),$$

N et P désignant les paramètres d'un système de droites et Q une fonction quelconque.

XXII.

Je traiterai en particulier le cas où les droites représentées par les équations

$$N = \text{constante}, \quad P = \text{constante},$$

sont normales à une série de surfaces. Nous pouvons supposer, dans ce cas, que Q soit précisément le paramètre de ces surfaces. De plus, on peut évidemment substituer à N et P deux fonctions quelconques de ces variables, et il est aisé de voir que ces fonctions peuvent être choisies de telle sorte que chacune d'elles, égalée à une constante, représente les surfaces développables formées par les normales menées aux différents points d'une ligne de courbure. En désignant par q_1 et q_2 ces deux fonctions de N et P et par q_3 le paramètre des surfaces orthogonales à nos droites, les variables q_1, q_2, q_3 formeront un système de coordonnées curvilignes orthogonales. L'intégrale α conservera d'ailleurs la forme

$$\alpha = F(q'_1, q'_2, q_1, q_2, q_3, t). \tag{3}$$

Soit

$$ds^2 = A\,dq_1^2 + B\,dq_2^2 + C\,dq_3^2$$

l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins, en sorte que la demi-force vive T ait pour expression

$$T = \frac{1}{2}(A q_1'^2 + B q_2'^2 + C q_3'^2).$$

D'après les formules générales de Lagrange, deux des équations du mouvement seront

$$\frac{d}{dt} A q_1' - \frac{1}{2} q_2'^2 \frac{dB}{dq_1} - \frac{1}{2} q_3'^2 \frac{dC}{dq_1} - \frac{1}{2} q_1'^2 \frac{dA}{dq_1} = Q_1, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt} B q_2' - \frac{1}{2} q_1'^2 \frac{dB}{dq_2} - \frac{1}{2} q_3'^2 \frac{dC}{dq_2} - \frac{1}{2} q_2'^2 \frac{dB}{dq_2} = Q_2, \tag{5}$$

Q_1 et Q_2 étant des fonctions de q_1, q_2, q_3 qui dépendent des forces accélératrices.

Ces équations se simplifient si l'on remarque que les surfaces dont l'équation est

$$q_3 = \text{constante}$$

étant parallèles, le coefficient C est indépendant de q_1 et de q_2, et il reste, en effectuant les différentiations indiquées,

$$A \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{2} q_1'^2 \frac{dA}{dq_1} - \frac{1}{2} q_2'^2 \frac{dB}{dq_1} + q_1' q_2' \frac{dA}{dq_2} + q_1' q_3' \frac{dA}{dq_3} = Q_1, \tag{6}$$

$$B \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{1}{2} q_2'^2 \frac{dB}{dq_2} - \frac{1}{2} q_1'^2 \frac{dA}{dq_2} + q_1' q_2' \frac{dB}{dq_1} - q_3' q_2' \frac{dB}{dq_3} = Q_2. \tag{7}$$

En différentiant l'intégrale (3) et remplaçant $\frac{d^2 q_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 q_2}{dt^2}$ par leurs valeurs déduites des équations (6) et (7), il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1} q_1' + \frac{d\alpha}{dq_2} q_2' + \frac{d\alpha}{dq_3} q_3' \\
&- \frac{1}{A} \frac{d\alpha}{dq_1'} \left(\frac{1}{2} q_1'^2 \frac{dA}{dq_1} - \frac{1}{2} q_2'^2 \frac{dB}{dq_1} + q_1' q_2' \frac{dA}{dq_2} + q_1' q_3' \frac{dA}{dq_3} - Q_1 \right) \\
&- \frac{1}{B} \frac{d\alpha}{dq_2'} \left(\frac{1}{2} q_2'^2 \frac{dB}{dq_2} - \frac{1}{2} q_1'^2 \frac{dA}{dq_1} + q_1' q_2' \frac{dB}{dq_1} + q_3' q_3' \frac{dB}{dq_3} - Q_2 \right):
\end{aligned}$$

en égalant à zéro le coefficient de q'_3 dans cette dernière équation, on obtient

$$\frac{d\alpha}{dq_3} - \frac{1}{A}\frac{dA}{dq_3}q'_1\frac{d\alpha}{dq'_1} - \frac{1}{B}\frac{dB}{dq_3}q'_2\frac{d\alpha}{dq'_2} = 0,$$

équation différentielle partielle du premier ordre, dont on déduit, par l'intégration,

$$\alpha = F(Aq'_1,\ Bq'_2,\ q_1,\ q_2,\ t).$$

XXIII.

Il est essentiel, avant d'aller plus loin, de chercher la forme des coefficients A et B qui figurent dans notre intégrale. A et B sont, on s'en souvient, les coefficients de dq_1^2 et dq_2^2 dans l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins. $A\,dq_1^2$ est, par conséquent, le carré de la distance de deux points qui correspondent à des valeurs égales de q_2 et de q_3. Ce produit est, par conséquent, le carré de l'arc que deux normales infiniment voisines, menées par deux points d'une même ligne de courbure, interceptent sur l'une des surfaces qu'elles coupent à angle droit. Or, en supposant que le paramètre q_3 soit précisément la distance des diverses surfaces à l'une d'elles choisie arbitrairement, il est facile de voir que l'arc dont nous parlons croît proportionnellement à q_3, et qu'il est de la forme

$$[\varphi(q_1, q_2) + q_3]\,d\omega,$$

$d\omega$ étant l'angle des deux normales considérées. Cet angle est d'ailleurs de la forme

$$d\omega = \psi(q_1, q_2)\,dq_1,$$

en sorte que la valeur de $A\,dq_1^2$ peut être représentée par

$$(M + Nq_3)^2\,dq_1^2,$$

M et N étant des fonctions de q_1 et de q_2. On a donc enfin

$$A = (M + Nq_3)^2.$$

On verra de même que l'on a

$$B = (M_1 + N_1 q_3)^2,$$

M_1 et N_1 étant, comme M et N, indépendants de q_3.

XXIV.

En différentiant l'intégrale

$$(1) \qquad \alpha = \mathrm{F}(\mathrm{A}q'_1, \mathrm{B}q'_2, q_1, q_2, t),$$

et posant, pour abréger, $\mathrm{A}q'_1 = u$, $\mathrm{B}q'_2 = v$, on obtient, après avoir remplacé $\frac{dq'_1}{dt}$ et $\frac{dq'_2}{dt}$ par leurs valeurs,

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1} q'_1 + \frac{d\alpha}{dq_2} q'_2 \\ &\quad + \frac{d\alpha}{du}\left(q'^2_1 \frac{d\mathrm{A}}{dq_1} + q'_1 q'_2 \frac{d\mathrm{A}}{dq_2} + q'_3 q'_1 \frac{d\mathrm{A}}{dq_3}\right) \\ &\quad + \frac{d\alpha}{dv}\left(q'^2_2 \frac{d\mathrm{B}}{dq_2} + q'_1 q'_2 \frac{d\mathrm{B}}{dq_1} + q'_3 q'_2 \frac{d\mathrm{B}}{dq_3}\right) \\ &\quad - \frac{d\alpha}{du}\left(\frac{1}{2} q'^2_1 \frac{d\mathrm{A}}{dq_1} - \frac{1}{2} q'^2_2 \frac{d\mathrm{B}}{dq_1} + q'_1 q'_2 \frac{d\mathrm{A}}{dq_2} + q'_1 q'_3 \frac{d\mathrm{A}}{dq_3} - \mathrm{Q}_1\right) \\ &\quad - \frac{d\alpha}{dv}\left(\frac{1}{2} q'^2_2 \frac{d\mathrm{B}}{dq_2} - \frac{1}{2} q'^2_1 \frac{d\mathrm{A}}{dq_2} + q'_1 q'_2 \frac{d\mathrm{B}}{dq_1} + q'_3 q'_2 \frac{d\mathrm{B}}{dq_3} - \mathrm{Q}_2\right), \end{aligned} \right.$$

et l'on voit que les termes en q'_3 disparaissent d'eux-mêmes, ainsi qu'on devait s'y attendre. Si l'on fait, en outre, d'autres réductions faciles et que l'on remplace q'_1 et q'_2 par $\frac{u}{\mathrm{A}}, \frac{v}{\mathrm{B}}$ et A et B par leurs valeurs données plus haut, l'équation précédente devient

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1} \frac{u}{(\mathrm{M} + \mathrm{N}q_3)^2} + \frac{d\alpha}{dq_2} \frac{v}{(\mathrm{M}_1 + \mathrm{N}_1 q_3)^2} \\ &\quad + \frac{d\alpha}{du}\left[u^2 \frac{\frac{d\mathrm{M}}{dq_1} + q_3 \frac{d\mathrm{N}}{dq_1}}{(\mathrm{M} + \mathrm{N}q_3)^3} + v^2 \frac{\frac{d\mathrm{M}_1}{dq_1} + q_3 \frac{d\mathrm{N}_1}{dq_1}}{(\mathrm{M}_1 + \mathrm{N}_1 q_3)^3} + \mathrm{Q}_1\right] \\ &\quad + \frac{d\alpha}{dv}\left[u^2 \frac{\frac{d\mathrm{M}}{dq_2} + q_3 \frac{d\mathrm{N}}{dq_2}}{(\mathrm{M} + \mathrm{N}q_3)^3} + v^2 \frac{\frac{d\mathrm{M}_1}{dq_2} + q_3 \frac{d\mathrm{N}_1}{dq_2}}{(\mathrm{M}_1 + \mathrm{N}_1 q_3)^3} + \mathrm{Q}_2\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Si nous déduisons de cette équation l'expression de la somme $\frac{d\alpha}{du}\mathrm{Q}_1 + \frac{d\alpha}{dv}\mathrm{Q}_2$, nous verrons que cette somme, considérée comme fonction de q_3, est nécessairement de la forme

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\alpha}{du} Q_1 + \frac{d\alpha}{dv} Q_2 = H + \frac{H_1}{(M+Nq_3)^2} + \frac{H_2}{(M+Nq_3)^3} \\ &\qquad + \frac{G_1}{(M_1+N_1q_3)^2} + \frac{G_2}{(M_1+N_1q_3)^3}, \end{aligned} \right.$$

H, H_1, H_2, G_1, G_2 étant des fonctions indépendantes de q_3. Si, dans cette équation (4), on remplace u et v par les nouvelles valeurs u_1 et v_1, on formera une équation nouvelle dans laquelle Q_1 et Q_2 conserveront les mêmes valeurs, puisqu'ils sont indépendants de u et de v; et, de cette équation, jointe à la précédente, on pourra déduire les valeurs de Q_1 et Q_2 qui, évidemment, seront de la forme

$$(5)\quad Q_1 = K_1 + \frac{K_2}{(M+Nq_3)^2} + \frac{K_3}{(M+Nq_3)^3} + \frac{L_1}{(M_1+N_1q_3)^2} + \frac{L_2}{(M_1+N_1q_3)^3},$$

$$(6)\quad Q_2 = E_1 + \frac{E_2}{(M+Nq_3)^2} + \frac{E_3}{(M+Nq_3)^3} + \frac{F_1}{(M_1+N_1q_3)^2} + \frac{F_2}{(M_1+N_1q_3)^3};$$

K_1, K_2, K_3, L_1, L_2, E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, étant indépendants de q_3, et indépendants aussi de u et de v, puisque ces lettres ne figurent ni dans Q_1 ni dans Q_2.

Le raisonnement précédent ne serait en défaut que si $\frac{d\alpha}{du} : \frac{d\alpha}{dv}$ était indépendant de u et de v. Mais alors, en désignant ce rapport par K, α serait une fonction de $u + Kv$, et nous rentrerions dans un cas déjà traité.

Nous devons maintenant distinguer deux cas :

1°. Le rapport $\frac{M}{N}$ est égal à $\frac{M_1}{N_1}$;

2°. Le rapport $\frac{M}{N}$ est différent de $\frac{M_1}{N_1}$.

Dans le premier de ces cas, les fractions qui ont pour dénominateur une puissance de $M + Nq_3$ peuvent se réduire avec celles qui ont pour dénominateur une puissance de $M_1 + N_1 q_3$.

Dans le second, une pareille réduction est évidemment impossible, et les deux groupes de termes doivent se détruire séparément.

En se reportant à la signification des quantités M, N, M_1, N_1, on voit sans peine que $\frac{M}{N}$ et $\frac{M_1}{N_1}$ sont les deux rayons de courbure de la surface représentée par l'équation

$$q_3 = 0;$$

dans le premier des cas considérés, ces deux rayons étant égaux, *la surface est une sphère, et il en est de même de toutes les surfaces parallèles.*

Examinons actuellement le cas où $\frac{M}{N}$ et $\frac{M_1}{N_1}$ n'auraient pas la même valeur; il faut alors, évidemment, que les termes dont le dénominateur est une puissance de $M + Nq_3$, se détruisent entre eux dans l'équation (3) et qu'il en soit de même de ceux dont le dénominateur est $M_1 + N_1 q_3$. Pour exprimer qu'il en ainsi, nous distinguerons plusieurs cas :

1°. Les fractions

$$\frac{\frac{dM}{dq_1} + q_3 \frac{dN}{dq_1}}{(M + Nq_3)^3}, \quad \frac{\frac{dM}{dq_2} + q_3 \frac{dN}{dq_2}}{(M + Nq_3)^3}, \quad \frac{\frac{dM_1}{dq_1} + q_3 \frac{dN_1}{dq_1}}{(M_1 + N_1 q_3)^3}, \quad \frac{\frac{dM_1}{dq_2} + q_3 \frac{dN_1}{dq_2}}{(M_1 + N_1 q_3)^3},$$

ont toutes un facteur fonction de q_3, commun à leurs deux termes, et, toute réduction faite, ne contiennent, en dénominateur, que $(M + Nq_3)^2$, $(M_1 + N_1 q_3)^2$;

2°. Cette réduction se présente pour les fractions dont le dénominateur contient $(M + Nq_3)$ et ne se présente pas pour les deux autres;

3°. Cette réduction ne se présente ni pour les deux fractions qui contiennent $M + Nq_3$ en dénominateur, ni pour les deux autres qui contiennent $M_1 + N_1 q_3$.

Dans le premier des trois cas précédents, on doit avoir évidemment

$$\frac{\frac{dM}{dq_1}}{M} = \frac{\frac{dN}{dq_1}}{N}, \quad \frac{\frac{dM}{dq_2}}{M} = \frac{\frac{dN}{dq_2}}{N},$$

$$\frac{\frac{dM_1}{dq_1}}{M_1} = \frac{\frac{dN_1}{dq_1}}{N_1}, \quad \frac{\frac{dM_1}{dq_2}}{M_1} = \frac{\frac{dN_1}{dq_2}}{N_1},$$

et de ces équations on conclut sans peine que $\frac{M}{N}$ et $\frac{M_1}{N_1}$ sont l'un et l'autre constants; la surface représentée par l'équation

$$q_3 = 0$$

a donc ses *deux rayons de courbure constants, par conséquent elle est une sphère.*

Dans le second des cas énumérés plus haut, on doit avoir

$$\frac{\frac{dM}{dq_1}}{M} = \frac{\frac{dN}{dq_1}}{N}, \quad \frac{\frac{dM}{dq_2}}{M} = \frac{\frac{dN}{dq_2}}{N},$$

et l'on peut conclure de ces deux équations que le rapport $\frac{M}{N}$ est constant, et que, par conséquent, la surface représentée par l'équation

$$q_3 = 0$$

a l'un de ses *rayons de courbure constants et qu'elle est une surface canal.*

Enfin, dans le troisième cas, nous pouvons égaler séparément à zéro, l'ensemble des termes qui contiennent $(M + Nq_3)^3$ en dénominateur, ainsi que ceux qui contiennent $(M_1 + N_1 q_3)^3$; nous aurons ainsi, en ayant égard aux valeurs de Q_1 et Q_2,

$$(7)\quad 0 = \frac{d\alpha}{du}\left[u^2\left(\frac{dM}{dq_1} + q_3\frac{dN}{dq_1}\right) + K_3\right] + \frac{d\alpha}{dv}\left[u^2\left(\frac{dM}{dq_2} + q_3\frac{dN}{dq_2}\right) + E_3\right],$$

$$(8)\quad 0 = \frac{d\alpha}{du}\left[v^2\left(\frac{dM_1}{dq_1} + q_3\frac{dN_1}{dq_2}\right) + L_2\right] + \frac{d\alpha}{dv}\left[v^2\left(\frac{dM_1}{dq_2} + q_3\frac{dN_1}{dq_2}\right) + F_2\right].$$

Or la première de ces équations prouve que $\frac{d\alpha}{du} : \frac{d\alpha}{dv}$ est indépendant de v, et la seconde, que ce rapport est indépendant de u; on peut donc en conclure qu'il ne dépend ni de u ni de v : en désignant sa valeur par K, il en résulte, comme on l'a déjà remarqué, que α est une fonction de $u + Kv$, et nous rentrons dans un cas déjà étudié.

Les seuls cas nouveaux que nous ayons à examiner, sont donc ceux *où les surfaces représentées par l'équation*

$$q_3 = \text{constante}$$

sont des sphères concentriques ou des surfaces canaux.

XXV.

Occupons-nous particulièrement du cas où les surfaces représentées par l'équation

$$q_3 = 0$$

sont des sphères concentriques. Le système des coordonnées désignées par q_1, q_2, q_3 se réduit alors, si l'on veut, au système ordinaire de coordonnées polaires que nous représenterons, comme on le fait habituellement, par θ, ψ, ρ. Le carré de la distance de deux points est représenté, comme on sait, par

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi^2 + d\rho^2,$$

en sorte que les quantités désignées par A et B sont, respectivement,

$$A = \rho^2,$$
$$B = \rho^2 \sin^2\theta,$$

et la forme de l'intégrale cherchée est, par conséquent,

$$(1) \qquad \alpha = \varphi\left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad \rho^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt}, \quad \theta, \psi, t\right).$$

Si nous substituons actuellement des coordonnées rectilignes x, y, z, aux coordonnées polaires ρ, θ, ψ, nous trouverons facilement

$$\rho^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = xy' - yx',$$
$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \cos\psi\,(xz' - zx') + \sin\psi\,(zy' - yz');$$

ce qui met l'équation (1) sous la forme

$$\alpha = \varphi[x'y - y'x, \quad \cos\psi\,(xz' - zx') + \sin\psi\,(zy' - yz'), \quad \theta, \psi, t],$$

et, en remarquant que l'un des trois binômes, $xy' - yx'$, $xz' - zx'$, $yz' - zy'$, est fonction des deux autres et des angles θ et ψ, et que θ et ψ dépendent eux-mêmes de $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{x}$, on peut écrire

$$\alpha = F\left(xz' - zx', \quad xy' - yx', \quad \frac{z}{x}, \quad \frac{y}{x}, \quad t\right);$$

telle est la forme la plus simple sous laquelle on puisse mettre l'intégrale cherchée.

XXVI.

La dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$ est, comme on l'a rappelé plusieurs fois, égale à o ou à — 1. L'étude du cas où elle est nulle conduit à un résultat remarquable. L'intégrale obtenue dans le paragraphe précédent prend alors la forme

$$(1) \qquad \alpha = \mathrm{F}\left(xz' - zx', \quad xy' - yx', \quad \frac{z}{x}, \quad \frac{y}{x}\right).$$

Différentions cette équation en posant, pour abréger,

$$xz' - zx' = u, \quad xy' - yx' = v, \quad \frac{z}{x} = p, \quad \frac{y}{x} = q,$$

nous obtiendrons, après avoir remplacé $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, par X, Y, Z,

$$(2) \qquad \frac{d\alpha}{du}(x\mathrm{Z} - z\mathrm{X}) + \frac{d\alpha}{dv}(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) + \frac{d\alpha}{dp}\left(\frac{u}{x^2} + \frac{d\alpha}{dq}\frac{v}{x^2}\right) = 0,$$

ou, en multipliant tous les termes par x^2,

$$(3) \qquad \frac{d\alpha}{du}(x\mathrm{Z} - z\mathrm{X})x^2 + \frac{d\alpha}{dv}(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})x^2 + \frac{d\alpha}{dp}u + \frac{d\alpha}{dq}v = 0.$$

Or cette équation (3) exprime qu'en considérant p et q comme les coordonnées rectilignes d'un point dans un plan, et u, v comme les composantes de la vitesse de ce point, parallèlement aux axes,

$$(4) \qquad \alpha = \mathrm{F}(u, v, p, q)$$

est une intégrale des équations du mouvement d'un point sollicité par une force accélératrice dont les composantes seraient

$$x^2(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) \quad \text{et} \quad x^2(x\mathrm{Z} - z\mathrm{X}),$$

ces composantes étant considérées comme fonctions de p et q et d'une troisième variable que l'on considérera comme un paramètre constant.

Si donc, réciproquement, on résout un problème quelconque relatif au mouvement dans un plan, en supposant un point sollicité par une force dont les composantes X_p et Y_q soient des fonctions quelconques des coordonnées p et q, si l'on prend une intégrale des équations du mouvement

$$\alpha = F(p, q, u, v);$$

u et v désignant les composantes des vitesses, l'équation

$$\alpha = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, y'x - x'y, \quad z'x - x'z\right)$$

sera une intégrale commune à tous les problèmes à trois dimensions, dans lesquels les composantes X, Y, Z de la force accélératrice sont liées par les équations

$$x^2(Yx - Xy) = X_p,$$
$$y^2(Zx - Xz) = Y_q.$$

Ce théorème permet évidemment de former autant d'intégrales qu'on le voudra qui soient communes à un nombre infini de problèmes.

XXVII.

La dépendance qui se trouve établie par le théorème précédent entre les intégrales communes à plusieurs problèmes relatifs au mouvement dans l'espace, et les intégrales quelconques des équations du mouvement dans un plan, existe également entre les intégrales communes à plusieurs problèmes à deux dimensions et les intégrales quelconques des équations du mouvement rectiligne. Sans donner ici une démonstration nouvelle, rendue bien facile par ce qui précède, nous allons montrer que l'on peut, de cette manière, obtenir une des solutions trouvées au § IX.

L'équation différentielle du mouvement rectiligne d'un point est, en effet,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \tag{1}$$

X désignant une fonction de x.

L'intégrale est de la forme

$$\alpha = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2}$$

$\varphi(x)$ représentant ici $2\int X\,dx$.

Si dans cette intégrale nous remplaçons x par $\frac{y}{x}$ et $\frac{dx}{dt}$ par $yx' - xy'$, nous obtiendrons

$$(yx' - xy')^2 - \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha,$$

ce qui est précisément l'intégrale obtenue au § IX.