JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Sur les intégrales transcendantes $\int \frac{e^{-x^2}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}, \int \frac{e^{-x^2}x^2dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}, \int \frac{e^{-x^2}dx}{(\gamma+\delta x^2)\sqrt{\alpha+\beta x^2}}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 117-120.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__117_0>

Gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LES INTÉGRALES TRANSCENDANTES

$$\int \frac{e^{-x^2}\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}},\quad \int \frac{e^{-x^2}x^2\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}},\quad \int \frac{e^{-x^2}\,dx}{(\gamma+\delta x^2)\sqrt{\alpha+\beta x^2}};$$

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. Dans une petite Note insérée dans ce Recueil (janvier 1851), je suis parvenu à un cas particulier d'une formule d'Abel, en me servant d'une application simple des coordonnées elliptiques.

Il est évident que la même méthode conduira au théorème dont il s'agit, dans toute sa généralité. En effet, transformons l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, x^{2p-1}\, y^{2q-1}\, dx\, dy,$$

en posant

$$bx = \mu\nu, \quad by = \sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)};$$

cela donnera

$$\frac{1}{4} e^{-b^2}\, b^{2p-2q-2}\, \Gamma(p)\,\Gamma(q)$$

$$= \int_b^\infty e^{-\mu^2} (\mu^2-b^2)^{q-1} \mu^{2p+1}\, d\mu \cdot \int_0^b e^{-\nu^2} (b^2-\nu^2)^{q-1} \nu^{2p-1}\, d\nu$$

$$- \int_b^\infty e^{-\mu^2} (\mu^2-b^2)^{q-1} \mu^{2p-1}\, d\mu \cdot \int_0^b e^{-\nu^2} (b^2-\nu^2)^{q-1} \nu^{2p+1}\, d\nu,$$

formule qu'on peut facilement rendre identique avec celle d'Abel, savoir

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta) = \int_0^1 e^{-ax}\, dx\, x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \cdot \int_0^\infty e^{-x}\, dx\, x^{\beta-1} (a+x)^{\alpha}$$

$$- a\int_0^1 e^{-ax}\, dx\, x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} \cdot \int_0^\infty e^{-x}\, dx\, x^{\beta-1} (a+x)^{\alpha-1},$$

qu'on trouve au tome Ier de ses Œuvres, page 100.

Je ne m'arrêterai pas ici pour développer la formule qui résulterait du changement analogue des variables dans l'intégrale multiple

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+\ldots+z^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} \ldots z^{2r-1} dx\, dy \ldots dz.$$

Je veux plutôt démontrer quelques relations qui se rapportent non-seulement aux valeurs complètes des transcendantes de l'espèce que cette méthode suggère, mais aussi aux valeurs indéfinies des mêmes intégrales. En effet, considérons la valeur (V) de l'intégrale double

$$\int\int e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy,$$

qu'on étend à tous les éléments de l'espace terminé par le quart de l'ellipse

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1$$

et par ses demi-axes. On aura évidemment, en exprimant V par des coordonnées elliptiques,

$$\mathrm{V} e^{-b^2} = \int_b^\mu \frac{e^{-\mu^2} \mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-\nu^2} d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}} - \int_b^\mu \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-\nu^2} \nu^2 d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}.$$

Mais si l'on fait $x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$, on a

$$\mathrm{V} = \int^r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-r^2} r dr d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 - e^{-r^2}\right) d\omega,$$

d'où l'on déduit, en vertu de l'équation de l'ellipse,

$$\mathrm{V} = \frac{1}{4}\pi - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\frac{\mu^2(\mu^2 - b^2)}{\mu^2 - b^2 \cos^2 \omega}} d\omega.$$

En posant

$$z^2 = \frac{b^2(\mu^2 - b^2)\cos^2\omega}{\mu^2 - b^2 \cos^2 \omega},$$

il viendra donc

$$\mathrm{V} = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\mu \sqrt{\mu^2 - b^2}\, e^{-(\mu^2 - b^2)} \int_0^b \frac{e^{-z^2} dz}{(\mu^2 - b^2 + z^2)\sqrt{b^2 - z^2}}.$$

Écrivons maintenant ν pour z dans cette dernière intégrale définie, et nous obtiendrons la formule suivante, en identifiant les deux valeurs de V,

$$
(\mathrm{I})\left\{
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\pi e^{-b^2} - \tfrac{1}{2}\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\,e^{-\mu^2}\int_0^b \frac{e^{-\nu^2}d\nu}{(\mu^2-b^2+\nu^2)\sqrt{b^2-\nu^2}}\\
&= \int_b^\mu \frac{e^{-\mu^2}\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\cdot\int_0^b \frac{e^{-\nu^2}\mu^2 d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}} - \int_b^\mu \frac{e^{-\mu^2}d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\cdot\int_0^b \frac{e^{-\nu^2}\nu^2 d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

2. Considérons encore la même intégrale double, étendue à tous les éléments de l'espace infini terminé par le quart de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2-\nu^2} = 1$$

et par son axe réel, prolongé indéfiniment. On aura, dans ce cas,

$$V = \int_r^\infty \int_0^{\omega_0} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\omega_0} e^{-r^2}\,d\omega,$$

ω_0 étant l'angle fait par l'asymptote avec l'axe réel ; et, par conséquent,

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{arc}\left(\cos=\frac{\nu}{b}\right)} e^{-\frac{\nu^2(b^2-\nu^2)}{b^2\cos^2\omega-\nu^2}}\,d\omega.$$

Faisons

$$z^2 = \frac{b^2(b^2-\nu^2)\cos^2\omega}{b^2\cos^2\omega-\nu^2},$$

ce qui nous donnera

$$V = \frac{1}{2}\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\,e^{b^2-\nu^2}\int_b^\infty \frac{e^{-z^2}dz}{(z^2-b^2+\nu^2)\sqrt{z^2-b^2}}.$$

En écrivant μ pour z dans cette expression, et identifiant le résultat avec la valeur de V, exprimée en coordonnées elliptiques, on en déduira la formule que voici :

$$
(\mathrm{II})\left\{
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\,e^{-\nu^2}\int_b^\infty \frac{e^{-\mu^2}d\mu}{(\mu^2-b^2+\nu^2)\sqrt{\mu^2-b^2}}\\
&= \int_b^\infty \frac{e^{-\mu^2}\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\cdot\int_\nu^b \frac{e^{-\nu^2}d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}} - \int_b^\infty \frac{e^{-\mu^2}d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\cdot\int_\nu^b \frac{e^{-\nu^2}\nu^2 d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

On doit observer qu'il n'est pas permis de faire $\nu = 0$, dans cette formule, parce qu'alors la quantité auxiliaire z cesse d'être fonction de ω et devient égale à b. Dans ce cas, reportons-nous à la valeur de V, exprimée en ω, et nous trouverons

$$\text{(III)}\quad \tfrac{1}{4}\pi e^{-b^2} = \int_b^\infty \frac{e^{-\mu^2}\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\cdot\int_0^b \frac{e^{-\nu^2} d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}} - \int_b^\infty \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\cdot\int_0^b \frac{e^{-\nu^2}\nu^2 d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}},$$

comme nous l'avons obtenu déjà. On tombera aussi sur cette équation en posant dans l'équation (I) $\mu = \infty$.

5. En résumé donc, on voit comment la valeur complète de l'intégrale

$$\int \frac{e^{-x^2} dx}{(\gamma+\delta x^2)\sqrt{\alpha+\beta x^2}}$$

s'exprime en vertu des équations (I) et (II), à l'aide des valeurs indéfinies et complètes des transcendantes ayant pour type

$$\int \frac{e^{-x^2} dx}{\sqrt{a+bx^2}},\quad \int \frac{e^{-x^2} x^2 dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

La formule (III) peut être regardée comme analogue à la relation bien connue entre les fonctions elliptiques complètes des deux premières espèces, à modules complémentaires; et, pareillement, les théorèmes qui sont exprimés par les équations (I) et (II) répondent à la réduction, effectuée par Legendre, des fonctions complètes de troisième espèce à celles de première et de seconde espèce. L'équation (III) est due à Abel, comme je l'ai remarqué. Quant aux formules (I) et (II), je crois qu'elles n'avaient pas encore été déjà données.

Dublin, le 10 février 1852.