JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur un théorème de M. Chasles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 6-8.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__6_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR UN THÉORÈME DE M. CHASLES;

PAR J. LIOUVILLE.

Le théorème dont il s'agit consiste en ce que deux surfaces du second degré homofocales données (α), (β) peuvent être considérées comme les lieux des centres de courbure d'une certaine surface (Θ), qui toutefois deviendrait imaginaire si l'on prenait pour (α), (β) deux ellipsoïdes ou deux hyperboloïdes à deux nappes. Je veux ici compléter ce théorème en ajoutant l'équation de la surface (Θ), ou plutôt des surfaces en nombre infini (parallèles entre elles) dont les centres de courbure ont (α) et (β) pour lieux géométriques.

Considérons les diverses surfaces du second degré homofocales à (α), (β); et désignons-les, suivant l'usage, par (ρ), (μ), (ν). Les surfaces données (α), (β) font partie des surfaces (ρ), (μ), (ν), dont l'équation en coordonnées rectangulaires est, comme on sait, de la forme

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

b et c étant des constantes. On suppose $\rho^2>c^2>b^2$, μ^2 entre b^2 et c^2, $\nu^2<b^2$; pour fixer les idées, j'admets en outre que $\alpha^2>\beta^2$. Maintenant soit $\Theta(\rho,\mu,\nu)$ l'intégrale de la formule différentielle suivante :

$$d\rho\,\frac{\sqrt{(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)}}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}+d\mu\,\frac{\sqrt{(\alpha^2-\mu^2)(\mu^2-\beta^2)}}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}+d\nu\,\frac{\sqrt{(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)}}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

L'équation générale des surfaces qui ont (α) et (β) pour lieux des centres de courbure sera

$$\Theta(\rho,\mu,\nu)=\text{constante}.$$

L'équation

$$d\Theta = 0$$

détermine, pour ainsi dire, la direction des surfaces (Θ), ou plutôt de leurs plans tangents, en chaque point de l'espace. A cause de l'ambiguïté des signes des radicaux, il y a donc, en général, pour chaque point, quatre plans tangents de ces surfaces, respectivement perpendiculaires, bien entendu, aux quatre tangentes communes à (α), (β), que l'on peut mener par ce point.

En donnant au second membre de l'équation

$$\Theta(\rho, \mu, \nu) = \text{constante}$$

deux valeurs particulières C, C', on aura deux surfaces dont toutes les normales seront communes, et la différence constante $C - C'$ exprimera partout la distance de ces deux surfaces.

Si A et B sont deux constantes, les équations

$$\frac{d\Theta}{d\alpha} = \mathrm{A}, \quad \frac{d\Theta}{d\beta} = \mathrm{B}$$

sont celles d'une droite quelconque normale à la surface (Θ), et aussi d'une droite quelconque tangente à la fois aux deux surfaces (α), (β). Chacune de ces équations, prise isolément, représente d'ailleurs une surface développable formée par les normales à la surface (Θ) le long d'une de ses lignes de courbure. De là résultent deux systèmes de surfaces développables, qui appartiennent respectivement aux deux espèces de lignes de courbure de (Θ). Je n'ai pas besoin d'ajouter que les surfaces de systèmes différents sont à angle droit entre elles comme avec la surface (Θ). La surface représentée par l'équation

$$\frac{d\Theta}{d\beta} = \mathrm{B}$$

touche et enveloppe la surface (β); elle est, au contraire, normale à la surface (α), sur laquelle elle engendre par son intersection une ligne géodésique, conformément à un théorème bien connu. De même, la surface représentée par

$$\frac{d\Theta}{d\alpha} = \mathrm{A}$$

touche la surface (α), et coupe la surface (β) à angle droit, suivant une ligne géodésique de (β).

Quelle que soit la fonction F, l'équation

$$F\left(\frac{d\Theta}{d\alpha}, \frac{d\Theta}{d\beta}\right) = 0$$

représente une surface formée de droites normales aux surfaces (Θ); mais les deux cas cités plus haut sont naturellement les seuls où la surface soit développable.

Tous ces résultats dérivent sans peine des formules que j'ai données au tome XII du présent Journal, en m'occupant du mouvement d'un point matériel. Mais on peut aussi les démontrer directement d'une manière très-simple, et par là donner plus d'élégance encore à la théorie des lignes géodésiques des surfaces du second degré. C'est ce que je ferai voir dans un autre article.