JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POINSOT

Théorie nouvelle de la rotation des corps, troisième partie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 289-336.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__289_0>

THÉORIE NOUVELLE

DE

LA ROTATION DES CORPS,

PAR M. POINSOT.

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

DÉVELOPPEMENT DES CALCULS POUR LA DÉTERMINATION DU LIEU DU CORPS AU BOUT D'UN TEMPS DONNÉ.

1. Si, dans les trois équations différentielles (1), (2), (3) du chapitre précédent, on remet, au lieu des lettres A, B, C qui représentent les trois moments principaux d'inertie, les expressions $m\frac{R^4}{a^2}$, $m\frac{R^4}{b^2}$, $m\frac{R^4}{c^2}$ relatives à l'ellipsoïde central du corps; si l'on intègre les deux premieres (1) et (2) et qu'on y mette les deux constantes F et G^2 sous la forme $m\frac{R^4}{k^2}$ et $m^2\frac{R^8}{h^2k^2}$, ce qui est permis, on aura les trois équations

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}=\text{constante}=\frac{1}{k^2},$$

$$\frac{p^2}{a^4}+\frac{q^2}{b^4}+\frac{r^2}{c^4}=\text{constante}=\frac{1}{h^2k^2},$$

$$\frac{\dot{p}^2}{a^4}+\frac{\dot{q}^2}{b^4}+\frac{\dot{r}^2}{c^2}=\frac{k^2(p^2+q^2+r^2)-h^2}{h^2k^4};$$

d'où la lettre m, qui répond à la masse du corps, et la lettre R, à la grandeur de l'ellipsoïde *central*, auront entièrement disparu, comme cela doit être : car il est évident que les *moments d'inertie* du corps A, B, C, la *force vive* $I\theta^2$, le *couple* d'impulsion G sont des quantités homogènes qui peuvent toutes être mises sous cette même forme du produit mR^4 divisé par le carré d'une ligne ou le rectangle de deux autres.

2. Et maintenant, si l'on fait les lignes kp, kq, kr respectivement égales à x, y, z, il viendra, pour les équations du mouvement de rotation, les transformées suivantes :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{h^2}, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{u^2-h^2}{h^2k^2}, \tag{3}$$

où l'on suppose, pour abréger,

$$u^2=x^2+y^2+z^2. \tag{4}$$

Dans ces équations, il est visible que x, y, z sont les coordonnées du pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central dont les rayons principaux sont a, b, c; que la ligne constante h est la hauteur de ce pôle au-dessus du plan du couple d'impulsion; k, la ligne constante dont la fonction $1:k^2$ représente la *force vive* $I\theta^2$ du système : d'où résulte (à cause de $I\theta^2 = G\theta \cos i$), que la grandeur du couple G se trouve ici représentée par $1:hk$.

I.

3. Cela posé, les équations finies (1), (2) et (4) donnent, comme on l'a déjà vu dans la seconde partie de ce Mémoire, et en employant les mêmes abréviations,

$$x^2=\frac{a^4e'^2}{\varepsilon^6}(u^2-\alpha^2),$$

$$y^2=\frac{b^4e''^2}{\varepsilon^6}(u^2-\beta^2),$$

$$z^2=\frac{c^4e^2}{\varepsilon^6}(u^2-\gamma^2).$$

Ensuite, les équations (1) et (2) étant différentiées et combinées avec l'équation différentielle (3), donnent

$$\dot{x}^2 = \frac{a^4 e'^4}{k^2 . b^4 c^4} \cdot y^2 z^2,$$

$$\dot{y}^2 = \frac{b^4 e''^4}{k^2 . a^4 c^4} \cdot z^2 x^2,$$

$$\dot{z}^2 = \frac{c^4 e^4}{k^2 . a^4 b^4} \cdot x^2 y^2.$$

4. Si l'on ajoute ces trois dernières équations, et qu'on y mette, au lieu de x^2, y^2, z^2, leurs valeurs données par les trois précédentes, on trouvera d'abord

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{s}^2$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{-1}{k^2 \varepsilon^6} \left[u^4 . \Sigma a^4 e'^2 - u^2 . \Sigma a^4 e'^2 (\beta^2 + \gamma^2) + \Sigma a^4 e'^2 \beta^2 \gamma^2 \right];$$

et, réduisant le second membre, exactement de la même manière qu'on l'a fait (seconde partie, n° **63**), il viendra

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{-1}{k^2} \left[\begin{array}{l} u^4 - u^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + (\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2) \\ \quad - (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) + 2 \frac{a^2 b^2 c^2}{h^2} \end{array} \right],$$

ou en employant, pour abréger, les mêmes lettres qu'au n° **61**; faisant de plus,

$$Q - B + 2C : h^2 = H,$$

et tirant la racine carrée de part et d'autre, on aura

$$(S) \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{-1}}{k} \sqrt{u^4 - P u^2 + H}.$$

Telle est, en fonction du rayon vecteur u, l'expression très-simple de la vitesse $\frac{ds}{dt}$ avec laquelle le pôle instantané décrit son orbe s à la surface de l'ellipsoïde central, et décrit en même temps la courbe σ sur le plan du couple d'impulsion, qui demeure fixe dans l'espace absolu.

5. Pour avoir cette vitesse $\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$ en fonction du temps t, il faut donc maintenant chercher l'expression de u en t; or c'est ce qu'on

peut obtenir par un calcul très-facile. Car, comme on a (à cause de $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$)

$$u\dot{u} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z},$$

si l'on met, au lieu de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, leurs valeurs données plus haut, on trouvera

$$u\dot{u} = \frac{ee'e''}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\Sigma a^4 e'^2}{k\,\varepsilon^6} \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)(u^2 - \gamma^2)},$$

d'où l'on tire, à cause de $\Sigma a^4 e'^2 = \varepsilon^6$, et de $ee'e'' = \varepsilon^3 \sqrt{-1}$, et en se servant des dénominations du n° **61**,

$$\text{(U)} \qquad \dot{u} \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{-1}}{k} \cdot \frac{\sqrt{u^6 - Pu^4 + Qu^2 - R}}{u}.$$

Telle est, en fonction de u, l'expression de la vitesse avec laquelle le pôle instantané se rapproche ou s'éloigne alternativement du centre de l'ellipsoïde central, et oscille ainsi suivant le rayon vecteur u, dans la partie qui s'étend du *maximum* au *minimum* de ce rayon; partie qui est $\beta - \alpha$ quand h est $< b$, et $\beta - \gamma$ quand h est $> b$.

6. Si, entre cette équation (U) et la précédente (S), on élimine le temps t, ce qui se fait ici très-simplement en divisant, membre à membre, l'une par l'autre, on aura, en s et u, l'équation différentielle

$$\frac{ds}{du} = \frac{u\sqrt{u^4 - Pu^2 + H}}{\sqrt{u^6 - Pu^4 + Qu^2 - R}};$$

ce qui est exactement la même équation qu'on avait trouvée directement pour la polhodie (seconde partie, n° **63**). On pouvait donc se borner ici à calculer l'une des deux expressions $\frac{ds}{dt}, \frac{du}{dt}$; car, en la comparant à celle de $\frac{ds}{du}$ qui nous était déjà connue, on aurait trouvé l'autre : mais il est toujours bon de confirmer les résultats du calcul.

7. Quant à l'imaginaire $\sqrt{-1}$ que l'on voit dans les deux premières expressions, elle n'y est qu'en apparence; car les deux polynômes

$$u^4 - Pu^2 + H \quad \text{et} \quad u^6 - Pu^4 + Qu^2 - R$$

sont ici essentiellement *négatifs,* à cause du rayon vecteur u toujours plus petit que la ligne β, et toujours plus grand que chacune des deux autres α et γ.

II.

8. Maintenant, l'équation différentielle (U), qui ne renferme que les deux variables u et t, étant mise sous la forme

$$dt = \frac{k}{2} \cdot \frac{2\,u\,du}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(\beta^2-u^2)(u^2-\gamma^2)}},$$

se ramène immédiatement aux quadratures.

On aura donc en intégrant, et déterminant la constante arbitraire de manière que le temps t commence quand le rayon vecteur u est à son *maximum* β,

$$t = f(u^2) - f(\beta^2),$$

f désignant ici une certaine fonction de u^2; et de là, par la fonction inverse que je désignerai par f_1, on tirera

$$u^2 = f_1[t + f(\beta^2)],$$

où il est évident que f_1 sera une fonction périodique du temps t.

Ainsi, quoique le temps t croisse à l'infini, la valeur de cette fonction ne peut s'étendre que depuis le *maximum* de u^2, qui est toujours β^2, jusqu'à son *minimum* qui est, ou γ^2, ou α^2 selon qu'on a $h >$ ou $< b$.

En désignant donc par τ le temps que le pôle I met à passer d'un sommet de son orbe s au sommet suivant, temps exprimé, dans le premier cas, par

$$\tau = f(\gamma^2) - f(\beta^2),$$

et dans le second, par

$$\tau = f(\alpha^2) - f(\beta^2),$$

si l'on demande la valeur du rayon u au bout d'un temps quelconque, on pourra commencer par ôter de ce temps donné tous les multiples de 4τ qui y seraient contenus, et conserver seulement le reste, qui ne pourrait être que de la forme

$$t,\quad \text{ou}\quad t+\tau,\quad \text{ou}\quad t+2\tau,\quad \text{ou}\quad t+3\tau,$$

selon que le pôle I serait dans le premier, le deuxième, le troisième ou le quatrième quart de son orbe s.

9. Connaissant la valeur de u^2 en t, si on la suppose substituée à la place de u^2 dans l'équation

$$ds = \frac{dt}{k}\sqrt{\mathrm{P}u^2 - u^4 + \mathrm{H}},$$

on aura par une nouvelle intégration, et en déterminant la constante arbitraire de manière que l'arc s commence avec le temps t,

$$s = \sigma = \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(0).$$

Équation où il faut observer qu'on doit mettre le temps donné t pris dans toute son étendue, et non pas diminué des multiples de 4τ qu'il pourrait contenir, comme il était permis de le faire dans l'expression précédente de u^2.

Ayant ainsi le rayon u et l'arc σ en fonction de t, on en pourra conclure la position du corps au bout d'un temps quelconque t, comme on l'a fait voir à la fin du chapitre précédent

10. Mais ces intégrations ou quadratures ne peuvent se faire ni algébriquement, ni par des arcs de cercle ou des logarithmes; elles demandent essentiellement l'emploi des transcendantes elliptiques; de sorte que le lieu du corps au bout d'un temps quelconque donné ne peut, en général, se calculer que par la voie des séries, ou au moyen de certaines Tables qu'on aurait construites pour ces fonctions supérieures.

Dans certains cas particuliers, relatifs soit à la direction du couple d'impulsion, soit à l'espèce du corps, la difficulté s'abaisse, et tout se réduit aux règles ordinaires, comme nous le ferons voir un peu plus loin.

III.

Changement des variables s et u dans les formules qui précèdent.

11. Si, dans les expressions précédentes de $\frac{ds}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, on change s en σ, et u^2 en $v^2 + h^2$, ce qui donne $u\dot{u} = v\dot{v}$, on aura les formules nouvelles

$$\dot{\sigma}^2 = \frac{-1}{k^2}\left[(v^2 + h^2)^2 - P(v^2 + h^2) + H\right]$$

$$\dot{v}^2 = \frac{-1}{k^2 v^2}\left[(v^2 + h^2)^3 - P(v^2 + h^2)^2 + Q(v^2 + h^2) - R\right],$$

où v est le rayon vecteur allant du centre de la courbe σ au pôle instantané qui la décrit.

12. Or, en nommant φ l'angle que ce rayon v fait avec une droite quelconque fixe située dans le plan de cette courbe σ, on a évidemment

$$v^2\dot{\varphi}^2 = \dot{\sigma}^2 - \dot{v}^2.$$

Mettant au lieu de $\dot{\sigma}^2$ et $\dot{v}^2$ leurs valeurs ci-dessus, et multipliant tout par $k^2 v^2$, il vient

$$\begin{aligned} k^2 v^4 \dot{\varphi}^2 = & - \left[(v^2 + h^2)^2 - P(v^2 + h^2) + H\right] \\ & + \left[(v^2 + h^2)^3 - P(v^2 + h^2)^2 + Q(v^2 + h^2) - R\right], \end{aligned}$$

ou bien, en développant les binômes, et ordonnant le second membre par rapport à v,

$$k^2 v^4 \dot{\varphi}^2 = \begin{bmatrix} h^2 v^4 + (2h^4 - Ph^2 + Q - H)v^2 \\ + (h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R) \end{bmatrix}.$$

Maintenant, si dans le terme $(2h^4 - Ph^2 + Q - H)v^2$, on met, au lieu de Ph^2 sa valeur $2Ah^2 - B$, et au lieu de $Q - H$ sa valeur $\frac{Bh^2 - 2C}{h^2}$, on trouvera l'équation

$$k^2 v^4 \dot{\varphi}^2 = h^2 v^4 + 2\,\frac{h^6 - Ah^4 + Bh^2 - C}{h^3}\cdot hv^2 + (h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R),$$

et en posant, pour abréger, comme on l'a déjà fait (seconde partie, n° **61**),

$$h^6 - Ah^4 + Bh^2 - C, \quad \text{ou} \quad (h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2) = D,$$
$$h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R, \quad \text{ou} \quad (h^2 - \alpha^2)(h^2 - \beta^2)(h^2 - \gamma^2) = \Delta,$$

et observant qu'on a, entre D et Δ, la relation

$$\Delta = \frac{D^2}{h^6},$$

on aura l'équation

$$k^2 v^2 \dot{\varphi}^2 = h^2 v^4 + 2\frac{D}{h^3} \cdot hv^2 + \frac{D^2}{h^6},$$

où il est évident que le second membre est le carré parfait du binôme $hv^2 + \frac{D}{h^3}$.

13. Ainsi l'on a, en extrayant la racine carrée de part et d'autre,

$$kv^2 \dot{\varphi} = hv^2 + \frac{D}{h^3}:$$

d'où, en dégageant $\dot{\varphi}$ et remettant pour D sa valeur

$$(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2),$$

on tire

$$\dot{\varphi} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{kh^3 v^2},$$

expression très-simple de la vitesse angulaire avec laquelle le pôle instantané de rotation tourne autour du centre de l'herpolhodie σ; cette vitesse, comme on le voit, est composée d'une partie constante, et d'une partie variable qui est réciproque au carré du rayon vecteur v, et, par conséquent, périodique comme ce rayon.

14. Si l'on divise cette expression de $\frac{d\varphi}{dt}$ par celle de $\frac{dv}{dt}$, donnée plus haut (n° **12**), on aura l'expression de $\frac{d\varphi}{dv}$ en fonction de v, c'est-à-dire l'équation différentielle de la courbe plane σ, entre son rayon vecteur v et l'angle φ que ce rayon décrit autour du centre de cette courbe σ; cette équation sera donc

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{hv^2 + \sqrt{\Delta}}{v\sqrt{(v^2+h^2)^3 - P(v^2+h^2)^2 + Q(v^2+h^2) - R}},$$

ce qui s'accorde parfaitement avec l'équation polaire de l'herpolhodie telle qu'on l'a trouvée directement (seconde partie, n° **66**).

On peut remarquer que cette équation ne renferme que les quatre constantes a, b, c et h, dont les trois premières sont relatives à l'espèce du corps, et la quatrième h, à la position du couple d'impulsion. Et il est clair que la constante k n'y doit pas entrer, puisque la courbe décrite par le pôle instantané ne peut dépendre de la grandeur $1:hk$ du couple qui a frappé le corps, ni par conséquent de la constante k qui répond aux *forces vives*: la courbe est décrite plus ou moins vite, mais elle est toujours la même pour les mêmes données a, b, c et h.

15. On peut employer, si l'on veut, ces nouvelles variables v et φ, au lieu des précédentes, pour avoir la position du corps au bout d'un temps quelconque t. Car, en intégrant la première équation qui donne l'expression de $\frac{dv}{dt}$ en fonction de v, et faisant commencer le temps t avec le rayon vecteur

$$v = \sqrt{\beta^2 - h^2},$$

on aura, comme plus haut (n° **8**),

$$t = f(v^2 + h^2) - f(\beta^2),$$

ou

$$v^2 = f_1(t + f\beta^2) - h^2.$$

De cette valeur v^2 on conclut celles des trois coordonnées x, y, z du pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central, puisque chacune d'elles x, y, z est donnée en u^2 (n° **5**), et, par conséquent, en $v^2 + h^2$: on a donc déjà la position de ce pôle sur l'ellipsoïde central.

Mettant ensuite cette valeur de v^2 en t dans la seconde équation qui donne $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonction de v, et intégrant, en faisant commencer l'angle φ avec le temps t, on aura

$$\varphi = \mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(0);$$

ce qui donnera la position du pôle instantané sur le plan fixe du couple d'impulsion : et de là on pourra conclure la position du corps dans l'espace absolu au bout du temps t.

Mais, quelques coordonnées qu'on emploie, l'intégration ramènera toujours, ce qui est ici fort naturel, à la théorie des fonctions *elliptiques :* théorie aujourd'hui très-connue, et à laquelle je renvoie le lecteur, pour ne pas m'écarter du principal objet de ce Mémoire. Je me bornerai donc à quelques exemples où les quadratures se font par les règles ordinaires.

Application des formules à quelques cas particuliers qui n'exigent pas l'emploi des transcendantes elliptiques.

I.

Cas particuliers relatifs à la position du couple d'impulsion.

16. Il est presque inutile de s'arrêter au cas particulier de $h = a$; car il n'y a, sur la surface de l'ellipsoïde central, qu'un seul point où le plan tangent puisse être à une distance $h = a$ du centre de cet ellipsoïde. On a donc alors $u = a$, et le corps tourne constamment, avec une vitesse angulaire $\theta = a : k$, autour de son axe majeur a, lequel se confond avec l'axe du couple d'impulsion et demeure immobile et dans le corps et dans l'espace absolu.

Il n'y a ici qu'une seule remarque à faire : c'est que le pôle instantané I étant immobile, il semble que la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ de ce pôle autour de l'axe du couple devrait être nulle, aussi bien que sa vitesse absolue $\frac{d\sigma}{dt}$, et non pas égale à la quantité finie $\frac{a}{k}$ que donne l'expression générale de $\frac{d\varphi}{dt}$ quand on y fait $h = a$. Mais il faut observer que la vitesse angulaire d'un point autour d'un centre fixe est une quantité qui ne dépend pas de la distance de ce point au centre que l'on considère. Ainsi, quoique le rayon vecteur v du pôle I soit ici égal à zéro, et que ce pôle soit réellement immobile, on n'en peut pas conclure que sa vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ soit aussi égale à zéro; et voilà pourquoi on la trouve égale à la quantité finie $a : k$. Et l'on peut bien voir d'ailleurs que cette valeur est la véritable; car, dans notre analyse, où la grandeur du couple d'impulsion est exprimée par $\frac{1}{hk}$, et le moment d'inertie du corps par $\frac{1}{a^2}$, il est clair que le quotient $\frac{a}{k}$ exprime la rotation θ, c'est-à-dire la vitesse angulaire d'un point quelconque de ce corps, et, par conséquent, celle du point particulier qui fait le pôle lui-même.

On peut dire exactement les mêmes choses dans le cas particulier de $h = c$, c'est-à-dire quand le plan du couple sera donné tangent au pôle *mineur* de l'ellipsoïde : il n'y a qu'à changer a en c.

Mais il n'en est pas de même dans le cas singulier de h égal à l'axe *moyen* b; car, outre le pôle moyen B, il y a sur l'ellipsoïde une infinité de points I où le plan tangent du couple peut être à la même distance $h = b$ du centre de cet ellipsoïde; et cette suite de points forme les deux ellipses singulières dont j'ai précédemment parlé (seconde partie, n° **68**), et sur l'une desquelles le pôle instantané I peut se mouvoir dans toute la suite du temps. C'est ce qu'il est bon de développer.

Solution dans le cas singulier de $h = b$.

17. Si l'on suppose $h = b$, on trouve d'abord ces réductions,

$$\alpha^2 = \gamma^2 = b^2;$$

et l'équation différentielle du n° **8** devient

$$\frac{2\,dt}{k} = \frac{2u\,du}{(u^2 - b^2)\sqrt{\beta^2 - u^2}},$$

laquelle s'integre par logarithmes, et donne, en y faisant, pour abréger,

$$n^2 = \beta^2 - b^2,$$

l'équation

$$\frac{2nt}{k} = l.\frac{n + \sqrt{\beta^2 - u^2}}{n - \sqrt{\beta^2 - u^2}}.$$

intégrale où l'on a déterminé la constante arbitraire par la supposition que le temps t commence quand le rayon vecteur $u = \beta$.

On a donc, en passant des logarithmes aux exponentielles, l'équation

$$e^{\frac{2nt}{k}} = \frac{n + \sqrt{\beta^2 - u^2}}{n - \sqrt{\beta^2 - u^2}};$$

d'où l'on tire, en résolvant par rapport à u^2,

$$u^2 = b^2 + \frac{4n^2}{\left(e^{\frac{nt}{k}} + e^{\frac{-nt}{k}}\right)^2},$$

pour l'expression du rayon vecteur u en fonction du temps t.

Or chacune des coordonnées x, y, z du pôle instantané I étant elle-même exprimée en u^2, on en aura la valeur en t, et, par conséquent, on saura quelle est, sur la surface de l'ellipsoïde central, la position du pôle I au bout d'un temps quelconque t.

Pour avoir maintenant sa position sur le plan fixe du couple d'impulsion, au bout du même temps, on prendra, pour les deux coordonnées de ce point, le rayon vecteur v émané du centre de l'herpolhodie σ, avec l'angle φ que ce rayon fait avec une droite fixe dans le plan de cette courbe.

Or, à cause de $h = b$, on a

$$v^2 = u^2 - b^2,$$

et l'équation précédente donne sur-le-champ

$$v = \frac{2n}{e^{\frac{nt}{k}} + e^{\frac{-nt}{k}}}.$$

Ensuite, comme l'expression différentielle de $\frac{d\varphi}{dt}$ (n° **13**) se réduit ici (à cause de $h = b$) à l'expression très-simple $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k}$, on aura tout de suite,

$$\varphi = \frac{b}{k}\,t,$$

en faisant commencer l'angle φ avec le temps t.

Connaissant donc, en fonction de t, les deux coordonnées polaires v et φ du pôle I sur le plan fixe du couple d'impulsion, et ayant déjà les trois coordonnées x, y, z du même pôle sur la surface de l'ellipsoïde central, on en conclura, comme on l'a dit plus haut, la position que le corps doit occuper dans l'espace au bout du temps t, et la question sera ainsi complétement résolue.

18. De l'équation ci-dessus,

$$\varphi = \frac{b}{k} \cdot t,$$

si l'on tire t en φ, et qu'on le mette dans l'expression précédente de v, on a

$$v = \frac{2n}{e^{\frac{n\varphi}{b}} + e^{\frac{-n\varphi}{b}}}$$

pour l'équation polaire de la double spirale σ décrite par le pôle instantané dans l'espace absolu; ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on avait déjà trouvé dans la seconde partie de ce Mémoire. FIG. 25.

II.

Cas particuliers relatifs à l'espèce du corps.

L'ellipsoïde central du corps peut être un *sphéroïde* elliptique allongé, ou aplati vers les pôles, ce qui convient à tous les corps de révolution, et à une infinité d'autres où le corps a deux de ses trois moments principaux d'inertie égaux entre eux : et enfin, l'ellipsoïde central peut être une sphère parfaite, ce qui convient, non-seulement aux corps sphériques ou réguliers, mais encore à une infinité d'autres.

19. Soit d'abord le cas d'un sphéroïde allongé, c'est-à-dire le cas de

$$b = c;$$

on trouve alors

$$u^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \frac{(a^2 + b^2)h^2 - a^2 b^2}{h^2} = constante,$$

et, par conséquent,

$$v^2 = \beta^2 - h^2 = \frac{(a^2 - h^2)(h^2 - b^2)}{h^2} = constante:$$

d'où l'on voit d'abord que la vitesse angulaire θ du corps autour du rayon instantané u, et la vitesse angulaire $\theta \sin i$ autour du rayon v, sont toutes deux constantes, et respectivement égales à

$$\theta = \frac{\beta}{k}, \quad \theta \sin i = \frac{\sqrt{\beta^2 - h^2}}{k}.$$

On trouve ensuite, 1° que la polhodie s est un cercle décrit autour de l'axe du sphéroïde, d'un rayon ρ exprimé par

$$\rho = \frac{b^2 . \sqrt{a^2 - h^2}}{h . \sqrt{a^2 - b^2}},$$

et que la circonférence en est parcourue par le pôle instantané I avec une vitesse uniforme $\frac{ds}{dt}$ dont la valeur est

$$\frac{ds}{dt} = \frac{b^2}{hk} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - h^2} . \sqrt{h^2 - b^2}}{h}:$$

d'où résulte, en divisant $\frac{ds}{dt}$ par le rayon ρ, la valeur

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2} . \sqrt{h^2 - b^2}}{hk}$$

pour la vitesse angulaire de ce pôle autour de l'axe du sphéroïde.

2°. Que l'herpolhodie σ est un autre cercle d'un rayon

$$v = \sqrt{\beta^2 - h^2},$$

ou

$$v = \frac{\sqrt{a^2 - h^2} . \sqrt{h^2 - b^2}}{h},$$

et que la circonférence de ce cercle décrit autour de l'axe fixe du couple d'impulsion, est parcourue avec une vitesse uniforme $\frac{d\sigma}{dt}$ parfaitement égale à la précédente $\frac{ds}{dt}$; d'où résulte, en divisant $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{ds}{dt}$ par le rayon v, le quotient $\frac{b^2}{hk}$ pour la vitesse angulaire du pôle I autour de l'axe fixe dans l'espace absolu : valeur qui s'accorde parfaitement, comme cela doit être, avec celle que donnerait l'expression générale de $\frac{d\varphi}{dt}$ si l'on y faisait $b = c$.

On voit donc qu'ici tout est uniforme et circulaire, et qu'il n'est pour ainsi dire besoin d'aucune intégration; car on a immédiatement

$$u = \beta, \quad v = \sqrt{\beta^2 - h^2}, \quad s = \sigma = \frac{b^2}{hk}\cdot\sqrt{\beta^2 - h^2}\,.\,t, \quad \varphi = \frac{b^2}{hk}\,.\,t,$$

en faisant commencer l'angle φ et les arcs s et σ avec le temps t.

20. Dans le cas particulier de $b = a$, ce qui répond au cas d'un sphéroïde central aplati vers les pôles, on trouverait, *mutatis mutandis*, des expressions toutes semblables aux précédentes.

21. Enfin, si l'on avait les axes extrêmes a et c égaux entre eux, ce qui entraînerait l'égalité des trois axes a, b, c et de la ligne h, il n'y aurait plus rien qui ne fût, pour ainsi dire, évident de soi-même. Le corps tournerait constamment autour d'un même diamètre $2a$ avec une vitesse angulaire $\theta = a : k$.

Il faut toutefois se rappeler que ce cas si particulier de

$$a = b = c = h$$

convient non-seulement aux corps homogènes qui sont sphériques ou réguliers, mais encore à une infinité d'autres de constitution quelconque.

CHAPITRE II.

NOUVELLE IMAGE DE LA ROTATION DES CORPS.

22. Soient toujours O le centre du corps; OG l'axe du couple d'impulsion; OI l'axe instantané de la rotation θ, et i l'inclinaison mutuelle de ces deux axes. FIG. 21.

On peut toujours supposer qu'à chaque instant dt la rotation θ soit décomposée en deux : l'une autour de l'axe OG du couple, et l'autre autour d'une droite OT perpendiculaire à OG dans le plan des deux axes OG et OI.

Or, par la première rotation $\theta \cos i$ autour de OG, cet axe OG reste immobile dans le corps et dans l'espace; mais par la seconde $\theta \sin i$ autour de OT, il y a une certaine ligne OG' du corps qui vient se placer sur OG dans l'espace : de sorte que OG, qui est réellement fixe dans l'espace, paraît décrire un angle GOG' dans l'intérieur du corps. Or c'est le plan de cet angle infiniment petit, et dont la valeur est

$$\mathrm{GOG'} = \theta \sin i \,.\, dt,$$

qui forme l'élément de la surface conique tracée par l'axe OG du couple dans l'intérieur du corps.

23. La ligne OT, qui est perpendiculaire au plan de cet angle, est donc normale à la surface de ce cône. La suite des normales OT correspondantes à toutes les positions de la génératrice OG forme donc, dans l'intérieur du corps, une autre surface conique de même sommet normale à la première. Et il est évident que ces deux cônes que je représente, pour abréger, par (OG) et (OT), sont en quelque sorte *réciproques* l'un de l'autre : car les génératrices de l'un peuvent être regardées comme la suite des normales à la surface de l'autre.

24. On trouve aisément (seconde partie, n° **76**, corollaire VII) que la surface conique, décrite par l'axe OG du couple, a pour équation

$$(h^2 - a^2)\,x^2 + (h^2 - b^2)\,y^2 + (h^2 - c^2)\,z^2 = 0;$$

on peut donc en conclure que l'autre surface conique, décrite par OT toujours normale à la première, a pour équation

$$\frac{x^2}{h^2 - a^2} + \frac{y^2}{h^2 - b^2} + \frac{z^2}{h^2 - c^2} = 0.$$

25. On voit donc :

Que ces surfaces sont celles de deux cônes droits, à bases elliptiques, autour d'un axe commun qui est, ou le grand axe a, ou le petit axe c, de l'ellipsoïde central, selon qu'on a $h > b$, ou $h < b$;

Que, dans le cas singulier de $h = b$, le premier cône (OG), décrit par l'axe du couple, se réduit à l'un des deux plans représentés par l'équation

$$z = x\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{h^2 - c^2}};$$

et le second cône (OT), à une simple droite OT perpendiculaire à ce plan;

Et qu'enfin, dans le cas où l'ellipsoïde central du corps est de révolution, les deux cônes sont des cônes droits à bases circulaires autour de l'axe du sphéroïde.

26. Voyons maintenant, à l'aide de ces images, comment s'exécute dans l'espace le mouvement d'un corps qui a reçu l'impulsion d'un couple dans une direction quelconque donnée.

Pour mieux fixer les idées et simplifier le discours, on peut considérer le plan MON du couple (qui reste fixe dans l'espace) comme étant le plan *horizontal*, et, par conséquent, l'axe OG de ce couple comme la *verticale*.

Cela posé, il est visible que, dans tout le cours du mouvement, la surface du premier cône (OG) doit passer par la verticale OG, et que la surface du second (OT) doit être en contact avec le plan horizontal MN. Car, la ligne OG étant toujours normale à la surface du cône (OT), et perpendiculaire au plan MN, ce plan horizontal MN ne peut être autre chose que le plan tangent à la surface. Donc, *pendant le mouvement du corps, le cône* (OT) *demeure perpétuellement en contact avec le plan fixe du couple appliqué.*

27. Actuellement, il est bien facile de se représenter le mouvement du corps par celui de ce cône intérieur (OT), qui est attaché au corps et l'entraîne avec soi dans l'espace absolu.

En effet, par la rotation $\theta \sin i$ autour de la génératrice OT, ce cône roule sur le plan horizontal MN et amène en contact, au bout d'un instant dt, une certaine génératrice infiniment voisine OT′ : par la seconde rotation $\theta \cos i$ autour de la verticale OG, cette génératrice OT′ glisse sur ce même plan en tournant d'un certain angle infiniment petit T′OT″. Ainsi, par les deux rotations composantes de θ, la génératrice OT, ou la ligne de contact du cône avec le plan MN a décrit sur ce plan, au bout d'un instant dt, un angle TOT″ composé des deux angles TOT′, T′OT″ dont on vient de parler. FIG. 21

Pour se représenter le mouvement du corps, il faut donc concevoir qu'à chaque instant dt, on fait rouler le cône (OT) sur le plan fixe MN, par l'angle

$$\mathrm{TOT}' = d\omega,$$

dû à la rotation $\theta \sin i$ autour de la ligne de contact OT; et, ensuite, qu'on le fait glisser, sur ce même plan, par l'angle

$$\mathrm{T'OT''} = d\psi,$$

dû à la rotation $\theta \cos i$ autour de la verticale OG : et par ces deux mouvements, exécutés l'un après l'autre, on a le lieu du corps au bout de cet instant dt.

28. Dans la nature, ces deux mouvements ne sont pas exécutés l'un après l'autre, ils sont *simultanés,* ou plutôt ils n'en font qu'un seul qui est le composé de ces deux-là. Mais, comme on ne considère qu'un temps infiniment petit dt, les deux espaces qu'un point quelconque du corps tend à décrire en vertu des deux rotations $\theta \sin i$ et $\theta \cos i$, sont censés *rectilignes,* comme les deux côtés d'un parallélogramme : et ce point étant porté d'abord le long de l'un de ces côtés, et ensuite sur une ligne égale et parallèle à l'autre, se trouve alors au bout de la diagonale, c'est-à-dire au même lieu de l'espace où il serait arrivé par son mouvement naturel en suivant cette diagonale. Si donc on imagine que cette double opération, que je viens de décrire, soit répétée pour chaque partie infiniment petite dt du temps t, on aura la suite des lieux où le corps passe dans le cours de sa rotation, ou l'image fidèle de son mouvement dans l'espace.

Mais si l'on demandait simplement de *marquer le lieu où se trouvera le corps au bout d'un temps quelconque,* sans s'occuper de la route que le corps suit pour y arriver, on n'aurait pas besoin de supposer que la double opération dont il s'agit soit répétée à chaque instant. On pourrait d'un seul coup faire rouler le cône (OT) par un angle fini ω égal à la somme de tous les angles TOT' que la génératrice OT trace à la surface de ce cône pendant le temps donné t; et, ensuite, le faire glisser en tournant autour de la verticale OG par un angle ψ égal à la somme de tous les angles T'OT'' qui sont dus à la rotation du corps autour de cette verticale pendant le même temps t. Par ces deux opérations, exécutées l'une après l'autre, et dans l'ordre qu'on voudra, le corps, il est vrai, n'aurait pas suivi le mouvement qu'il a dans la nature, mais il se trouverait actuellement posé dans le même lieu de l'espace où il arrive par son mouvement naturel au bout du temps t. D'où l'on voit que le problème de déterminer le lieu du corps au bout d'un temps quelconque, se réduit à chercher les deux sommes ou intégrales

$$\omega = \int (\mathrm{TOT}'), \quad \psi = \int (\mathrm{T'OT''}),$$

en fonction du temps t.

29. Quant à la seconde intégrale ψ, elle se trouve sur-le-champ; car il est évident qu'on a

$$\mathrm{T'OT''} = d\psi = \theta \cos i \,.\, dt;$$

or on a trouvé

$$\theta \cos i = const. = \frac{h}{k}:$$

on a donc

$$d\psi = \frac{h}{k} \cdot dt,$$

d'où l'on tire

$$\psi = \frac{h}{k} \cdot t,$$

en faisant commencer l'angle ψ avec le temps t.

Mais l'autre intégrale

$$\omega = \int (\mathrm{TOT}')$$

ne se trouve pas aussi aisément : il faut commencer par chercher l'expression différentielle de l'angle TOT'.

Pour cela je remarque que cet angle TOT', ajouté à l'angle T'OT'', forme l'angle TOT'' que la projection de l'axe instantané OI décrit autour de l'axe du couple; car le point T est la projection continuelle du pôle I sur le plan de ce couple. On a donc, en nommant $d\varphi$ ce dernier angle,

$$d\omega + d\psi = d\varphi:$$

or on a trouvé précédemment

$$d\varphi = \theta \cos i \,.\, dt + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 \,.\, k^3 \,.\, \theta^2 \sin^2 i} \cdot dt;$$

on a donc, en comparant les deux expressions de $d\varphi$,

$$d\omega = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 \,.\, k^3 \,.\, \theta^2 \sin^2 i} \cdot dt,$$

d'où l'on tire

$$\omega = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 k} \int \frac{dt}{k^2\theta^2 - h^2}.$$

Pour avoir ω, il faudra donc mettre d'abord, au lieu de θ^2, sa valeur en fonction de t, et puis intégrer l'expression $\int dt : (k^2\theta^2 - h^2)$; mais cette intégrale demande encore l'emploi des fonctions elliptiques.

30. Il faut remarquer que les lignes h et k étant essentiellement positives, et $d\psi$ étant égal à $\frac{h}{k}dt$, cet angle $d\psi$ peut toujours être regardé comme ayant le même signe $+$; mais l'angle $d\omega$ a tantôt le signe $+$ et tantôt le signe $-$, selon que h est $<$ ou $>$ b.

FIG. 21. Si $h < b$, le cône OT entoure le petit axe c de l'ellipsoïde central, et, dans ce cas, l'angle $d\omega$, de même signe que $d\psi$, *s'ajoute* à cet angle pour former l'angle $d\varphi$ que la projection de l'axe instantané décrit autour de l'axe du couple.

FIG. 22. Si $h > b$, le cône (OT) entoure le grand axe a; et, dans ce cas, l'angle $d\omega$, de signe contraire à $d\psi$, doit en être retranché pour former l'angle $d\varphi$.

31. Enfin, dans le cas singulier de $h = b$, le cône (OT) se réduit à une droite OT située dans le plan des axes extrêmes a et c, et inclinée sur a d'un angle dont la tangente est $-\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}$: l'angle $d\omega$ est *nul*, et $d\varphi$ se réduit simplement à l'angle

$$d\psi = \frac{h}{k}dt.$$

Ainsi, dans le cas de $h = b$, il existe dans le corps un axe *singulier* OT qui a la propriété de décrire uniformément le plan fixe MON du couple, avec une vitesse constante

$$\frac{h}{k} = \frac{b}{k},$$

tandis que le corps tourne autour de cet axe singulier avec une vitesse variable

$$\theta \sin i = \sqrt{\theta^2 - \frac{b^2}{k^2}}.$$

Dans ce cas, on n'a besoin que des règles ordinaires du calcul intégral pour déterminer la position du corps au bout d'un temps donné t. Car, pour amener le corps dans cette position, il suffirait de le faire tourner d'abord autour de l'axe du couple d'un angle

$$\psi = \frac{b}{k}t;$$

et ensuite, de le faire tourner sur son axe singulier OT, d'un angle τ égal à $\int \theta \sin i . dt$. Or, dans le cas de $h = b$, nous avons trouvé, pour l'expression de $\theta \sin i$ en fonction de t,

$$\theta \sin i = \frac{2n}{k} \cdot \frac{e^{\frac{nt}{k}}}{1 + e^{\frac{2nt}{k}}},$$

où e désigne la base des logarithmes de Néper, et n la valeur du radical $\sqrt{\beta^2 - b^2}$. Multipliant donc par dt cette expression de $\theta \sin i$, intégrant, et faisant commencer l'arc τ avec le temps t, on a

$$\tau = 2\left(\text{arc tang } e^{nt:k} - \frac{\pi}{4}\right).$$

32. Les deux cas de $h = a$, ou $h = c$ n'ont aucune difficulté; car les axes OI, OG se confondent entre eux et avec l'axe a, ou l'axe c du corps; et tout se réduit à une simple rotation constante $h : k$, autour de cet axe a, ou c, qui demeure immobile dans l'espace absolu.

33. Si l'ellipsoïde central a deux de ses axes égaux entre eux, le cône (OT) est un cône droit à base circulaire autour de l'axe de révolution de ce sphéroïde. Alors $\theta \sin i$ est constant, et, par conséquent, $d\omega$ est constant, aussi bien que $d\psi$ et $d\varphi$, et l'on a sur-le-champ la valeur de ces angles pour un temps quelconque t.

Si l'ellipsoïde central a ses trois axes égaux et devient une sphère, tout se réduit à un mouvement simple de rotation autour du diamètre qui fait l'axe du couple appliqué G.

Tous ces cas particuliers n'ont aucune espèce de difficulté et se résolvent d'eux-mêmes : il n'y a de remarquable que le cas singulier de $h = b$ qui se résout par l'intégration de la différentielle $\int \theta \sin i . dt$, laquelle ne dépend que des fonctions exponentielles et circulaires.

Remarque I.

34. J'ai trouvé plus haut l'expression de l'angle $d\omega$ par celle de l'angle $d\varphi$, qui nous était déjà connue (n° **13**). Mais cet angle $d\omega$, que trace le cône (OT) en roulant sur le plan du couple, peut se trouver aussi d'une manière directe, comme on va le voir dans l'article suivant, ce qui servira à confirmer notre analyse.

Au point T de la surface de ce cône (OT), la ligne de moindre courbure est évidemment la génératrice OT; et, par conséquent, la ligne de plus grande courbure est perpendiculaire à cette génératrice.

Considérons sur cette ligne de courbure l'arc infiniment petit ds qui se couche en un instant dt sur le plan MN quand le cône roule sur ce plan en vertu de la rotation $\theta \sin i$ qu'il a sur sa génératrice actuelle OT. Il est évident que $\theta \sin i . dt$ est l'angle de contingence, c'est-à-dire l'angle formé par les deux tangentes menées aux extrémités de l'arc ds, ou, ce qui revient au même, l'angle formé par les deux normales menées à la surface du cône en ces deux points. Or cet angle est exprimé par $\frac{ds}{\text{R}}$, en nommant R le rayon de la courbure. On a donc

$$\theta \sin i . dt = \frac{ds}{\text{R}}.$$

Mais l'angle formé par les deux génératrices voisines OT et OT′ qui vont du point O aux deux bouts du même arc ds, et que nous avons nommé $d\omega$, est évidemment exprimé par

$$d\omega = \frac{ds}{\text{OT}} = \frac{ds}{k\theta \sin i};$$

on a donc, pour l'expression de $d\omega$,

$$d\omega = \frac{\text{R}}{k}\, dt,$$

où R désigne le rayon de la plus grande courbure à la surface du cône (OT), au point T extrémité de la génératrice

$$\text{OT} = k\theta \sin i.$$

Or, l'équation de la surface conique (OT) étant

$$\frac{x^2}{h^2-a^2}+\frac{y^2}{h^2-b^2}+\frac{z^2}{h^2-c^2}=0,$$

le rayon R de la courbure en un point quelconque dont les coordonnées seraient x, y, z, est exprimé par

$$R=\frac{(h^2-a^2)(h^2-b^2)\left[\sqrt{z^2+\frac{(h^2-c^2)^2}{(h^2-b^2)^2}y^2+\frac{(h^2-c^2)^2}{(h^2-a^2)^2}x^2}\right]^3}{(h^2-c^2)(x^2+y^2+z^2)},$$

et, comme le point T dont il s'agit n'est pas un point quelconque de la surface du cône, mais un point qui doit se trouver en même temps sur la surface de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{(h^2-a^2)^2}+\frac{y^2}{(h^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(h^2-c^2)^2}=\frac{1}{h^2},$$

le trinôme qui est sous le radical se réduit ici à la constante $\frac{(h^2-c^2)^2}{h^2}$. En substituant cette valeur, il vient donc pour R, cette expression

$$R=\frac{(h^2-a^2)(h^2-b^2)(h^2-c^2)}{h^3(x^2+y^2+z^2)}.$$

Or on a

$$x^2+y^2+z^2=OT^2=k^2\theta^2\sin^2 i;$$

il vient donc, pour l'expression de $d\omega=\frac{R}{k}\,dt$,

$$d\omega=\frac{(h^2-a^2)(h^2-b^2)(h^2-c^2)}{h^3\,k^3\,.\,\theta^2\,.\,\sin^2 i}\,.\,dt,$$

ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on avait trouvé plus haut par une voie différente.

Remarque II.

35. Je ferai encore ici une remarque importante pour montrer comment, dans le cas de $h>b$, le mouvement angulaire $d\varphi$ du pôle instantané I de rotation est égal à la *différence* $d\psi-d\omega$ de l'angle $d\psi$ par lequel le cône (OT) glisse sur le plan du couple, à l'angle $d\omega$ par FIG. 23.

lequel ce cône roule sur le même plan; tandis que, dans le cas de $h<b$, l'angle $d\varphi$ est égal à la *somme* $d\psi + d\omega$ de ces deux angles.

Pour plus de clarté, considérons les choses au moment où le pôle instantané I traverse l'ellipse moyenne (ac) de l'ellipsoïde central. Si l'on mène en I la tangente à cette ellipse, qu'on abaisse sur elle la perpendiculaire OP, et qu'on achève le rectangle IPOT; on voit que OP sera la direction de l'axe du couple d'impulsion, et OT la génératrice actuelle du cône (OT); et comme OI est situé dans l'angle droit COA des axes extrêmes c et a, il est clair que la perpendiculaire OP à la tangente en I sera située aussi dans le même angle droit: donc OT perpendiculaire à OP tombera *au-dessous* de l'axe OA par rapport aux axes OI et OP que je regarde comme étant *au-dessus*.

Or, si l'on a $h > b$, on sait que le cône décrit par OT a pour axe le grand axe $\mathrm{OA} = a$ de l'ellipsoïde central : donc, si l'on mène à ce cône le plan tangent suivant OT, ce qui sera le plan même du couple d'impulsion, le cône (OT) sera situé au-dessus de ce plan du même côté que les points I et P. Si donc, en vertu de la rotation $\theta \cos i$ autour de OP, ce cône glisse en un instant dt, d'un angle $d\psi$ sur ce plan tangent, il est clair qu'en vertu de la rotation $\theta \sin i$ autour de OT, il roule sur le même plan par un angle $d\omega$ de *signe contraire* à $d\psi$: de sorte que le mouvement angulaire $d\varphi$ de la génératrice OT est exprimé par la différence $d\psi - d\omega$ de ces deux angles.

FIG. 21. Mais si l'on a $h < b$, ce n'est plus autour du grand axe OA, mais autour du *petit axe* OC, que le cône (OT) se trouve décrit. Et alors ce cône, au lieu d'être situé au-dessus du plan qui le touche en OT, du même côté que le pôle I et le point P, se trouve situé au-dessous, du côté opposé. Si donc ce cône, par la rotation autour de OP, glisse sur le plan d'un angle $d\psi$, il est clair que par l'autre rotation autour de OT, il roule sur ce plan d'un angle $d\omega$ de *même signe* que $d\psi$: de sorte que, dans ce cas, le mouvement angulaire $d\varphi$ du point T est exprimé par la somme $d\psi + d\omega$ de ces deux angles.

36. On voit par là comment il arrive que, dans le cas singulier de $h = b$, on a simplement

$$d\varphi = d\psi = \theta \cos i . dt = \frac{h}{k} dt :$$

car, le cas de $h = b$ pouvant être considéré comme appartenant à la fois à l'un et à l'autre des deux cas précédents, l'angle $d\omega$ devrait avoir également le signe $+$ et le signe $-$; ce qui ne peut être ici, à moins qu'on n'ait $d\omega = 0$: c'est, en effet, ce qui a lieu, et réduit alors $d\varphi$ à $d\psi$, c'est-à-dire que, dans ce cas singulier, la vitesse angulaire du pôle instantané, autour de l'axe fixe du couple, est constante et mesurée par $\frac{b}{k}$ dans toute la suite du mouvement.

Résumé de notre théorie.

37. On peut donc considérer, *dans l'intérieur du corps,* trois cônes du second ordre, savoir :

1°. Le cône (OI) décrit par l'axe instantané OI;

2°. Le cône (OT) décrit par la projection continuelle de OI sur le plan fixe MN du couple d'impulsion;

3°. Le cône (OG) décrit par l'axe fixe OG de ce couple dans l'intérieur du mobile.

Ces trois cônes sont *droits,* à *bases elliptiques,* et tous trois décrits autour d'un *même axe,* qui est, ou le *grand axe a*, ou le *petit axe c* de l'ellipsoïde central, selon que h est $>$ ou $<$ que l'*axe moyen b* de cet ellipsoïde.

Dans le cas singulier de $h = b$, le cône (OI) se réduit à un plan passant par l'axe moyen. Le cône (OG) se réduit à un autre plan passant par ce même axe, et le cône (OT) se réduit à une droite perpendiculaire à ce dernier plan.

Les surfaces de ces cônes sont toutes trois décrites et achevées dans le même temps.

L'axe OG du couple trace la sienne avec une vitesse angulaire

$$\theta \sin i = \sqrt{\theta^2 - \frac{h^2}{k^2}}.$$

L'axe OT trace la sienne avec une vitesse angulaire

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 k (k^2\theta^2 - h^2)}.$$

L'axe OI trace la sienne avec une vitesse angulaire que l'on trouve égale à

$$\frac{\sqrt{(Q-H)k^2\theta^2 - R}}{k^3\theta^2},$$

expression où l'on a

$$Q - H = \frac{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)h^2 - 2a^2b^2c^2}{h^2}.$$

et

$$R = \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

38. Mais, au lieu de ces trois cônes, on peut ne considérer que trois lignes courbes, et simplifier ainsi les images. Car, I étant le pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central, T la projection de ce point sur le plan du couple, et P sa projection sur l'axe OG, on peut considérer les trois orbes elliptiques, à double courbure, s, τ et π décrits par les points I, T et P dans l'intérieur du corps, et regarder ces orbes comme les bases de nos trois surfaces coniques dont le commun sommet est au centre O. Faisant donc abstraction de tout le reste, pour ne plus voir que ce centre O et l'une de ces trois espèces de roues s, τ, π, que je viens de définir, le mouvement du corps pourrait se peindre des trois manières suivantes :

FIG. 24. I. Si l'on suppose que l'orbe s, mis en contact avec le plan fixe MIN parallèle au plan du couple, roule sans glisser sur ce plan, et de manière qu'il tourne sans cesse sur son rayon OI avec une vitesse angulaire θ proportionnelle à ce rayon, on aura le mouvement précis du corps dans l'espace : c'est l'image la plus claire de ce mouvement.

II. Si, sur le plan MON du couple (qu'on suppose ici mené par le centre O), on fait rouler l'orbe τ avec la vitesse angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ trouvée ci-dessus, et qu'en même temps on le fasse glisser avec la vitesse angulaire constante $\frac{h}{k}$, on aura de même la représentation exacte du mouvement du corps : c'est une autre image de ce mouvement, mais un peu moins simple que la précédente.

III. Enfin, si l'on imagine que l'orbe π, dont le rayon OP est constant et de longueur h, glisse le long de sa tangente au point P avec une vitesse angulaire $\frac{\sqrt{k^2\theta^2-h^2}}{k}$, et tourne sur son rayon OP avec une vitesse angulaire constante $\frac{h}{k}$, on aura une troisième image du mouvement du corps; mais peut-être encore moins simple que la seconde. On pourrait donc écarter l'une et l'autre; mais, dans une matière aussi difficile, cette variété de démonstrations ne peut que jeter plus de jour sur le fond des choses, et je n'ai pas cru devoir les supprimer. Au reste, de toutes ces démonstrations, la meilleure, je veux dire celle où l'esprit trouve l'appui le plus naturel et le plus sensible, est celle de l'ellipsoïde central, dont on retient le centre immobile au même point de l'espace, et qu'on fait rouler sur le plan fixe du couple, sans aucun mouvement de *rasion* sur ce plan.

Équations des trois orbes s, τ, π, que nous venons de considérer.

39. On a déjà vu que l'orbe s, décrit à la surface de l'ellipsoïde central, par le pôle instantané I, est donné par l'intersection de cet ellipsoïde, dont l'équation est

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

avec la surface d'un autre ellipsoïde, dont l'équation est

$$\frac{h^2x'^2}{a^4}+\frac{h^2y'^2}{b^4}+\frac{h^2z'^2}{c^4}=1, \tag{2}$$

x', y', z' étant les coordonnées du pôle I parallèles aux axes respectifs a, b, c de l'ellipsoïde central.

On a vu que le plan du couple, supposé conduit par le centre O de cet ellipsoïde, a pour équation

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=0. \tag{3}$$

Donc, si du pôle I on abaisse une perpendiculaire IT sur ce plan, on aura, pour les équations de cette droite,

$$a^2z'(x-x')-c^2x'(z-z')=0, \tag{4}$$
$$a^2y'(x-x')-b^2x'(y-y')=0. \tag{5}$$

Or, si de ces trois dernières équations, on tire les valeurs de x, y, z coordonnées du pied T de la perpendiculaire, on trouvera [en faisant les réductions qui proviennent des deux premières équations (1) et (2)], ces expressions très-simples,

$$x = \frac{h^2 - a^2}{a^2} x', \quad y = \frac{h^2 - b^2}{b^2} y', \quad z = \frac{h^2 - c^2}{c^2} z';$$

d'où l'on tire

$$x' = \frac{a^2 x}{h^2 - a^2}, \quad y' = \frac{b^2 y}{h^2 - b^2}, \quad z' = \frac{c^2 z}{h^2 - c^2}.$$

Donc, en mettant ces valeurs de x', y', z' dans les équations (1) et (2), on aura en x, y, z les deux équations

$$\frac{a^2 x^2}{(h^2 - a^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(h^2 - b^2)^2} + \frac{c^2 z^2}{(h^2 - c^2)^2} = 1,$$

$$\frac{h^2 x^2}{(h^2 - a^2)^2} + \frac{h^2 y^2}{(h^2 - b^2)^2} + \frac{h^2 z^2}{(h^2 - c^2)^2} = 1,$$

qui appartiennent à deux nouveaux ellipsoïdes dont l'intersection donne l'orbite τ décrite par le point T qui est la projection continuelle du pôle I sur le plan du couple.

Remarque I.

40. Si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, on a

$$\text{(OT)} \qquad \frac{x^2}{h^2 - a^2} + \frac{y^2}{h^2 - b^2} + \frac{z^2}{h^2 - c^2} = 0,$$

équation de la surface conique décrite par la ligne OT dans l'intérieur du corps. Et c'est ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé d'une autre manière, en cherchant cette surface conique, comme la suite des normales OT à la surface du cône décrit par l'axe OG du couple dans l'intérieur du mobile. Et, en effet, cette dernière surface décrite par OG a pour équation

$$\text{(OG)} \qquad (h^2 - a^2) x^2 + (h^2 - b^2) y^2 + (h^2 - c^2) z^2 = 0.$$

Or il est clair que l'une de ces deux surfaces coniques peut être regardée comme la suite des normales à la surface de l'autre : d'où l'on voit qu'il suffit d'en connaître une pour les avoir toutes deux.

41. Dans le cas singulier de $h = b$, le cône (OG) se réduit à un plan passant par l'axe moyen b, et dont l'équation est

$$\frac{z}{x} = \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}:$$

et le cône (OT) à une simple ligne droite perpendiculaire à ce plan, et dont l'équation est

$$\frac{z}{x} = -\frac{c}{a} \cdot \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

Par conséquent, l'orbite τ décrite par le point T ne peut être ici qu'une ligne terminée OT, allant du centre O jusqu'au point T qui répond à la distance *maximum* $\sqrt{\beta^2 - b^2}$ de ce point au centre O.

42. Dans les deux cas particuliers de $h = a$, ou $h = c$, l'orbite τ se réduit à un point qui est le centre O de l'ellipsoïde central.

Remarque II.

43. Si l'on ne combinait ensemble que les équations (1), (2), (4) et (5) pour en éliminer x', y', z', et qu'on n'employât point l'équation (3) du plan du couple, on aurait en x, y, z une équation qui répondrait à la surface tracée par la suite des normales IT que l'on mènerait à la surface de l'ellipsoïde central, le long de l'orbite s décrite par le pôle instantané I ; et si l'on portait ensuite sur chaque normale IT, à partir de son pied I, et du même côté que l'ellipsoïde, une longueur IT égale à la ligne h, la suite des extrémités de toutes ces lignes formerait encore l'orbite τ décrite par le point T.

Au lieu de l'équation (3) on pourrait donc employer l'équation suivante :

$$\text{(P)} \qquad (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = h^2,$$

qui exprime que la ligne IT est de longueur constante h. Mais comme cette équation exprimerait également que la ligne IT peut être portée de l'autre côté du plan tangent, la combinaison des cinq équations (1), (2), (4), (5) et (P) donnerait, non-seulement l'orbite τ décrite par le pied de la perpendiculaire IT au plan du couple, mais une autre orbite τ' décrite par le point T' situé à la même distance IT' au dehors de l'ellipsoïde : courbe tout à fait différente dans l'espace relatif, et qui est ici étrangère à la question; mais, dans l'espace absolu, la route du point T' serait parfaitement égale et parallèle à la route du point T.

Remarque III.

44. La combinaison des cinq équations (1), (2), (4), (5) et P est peut-être encore plus facile que celle des quatre premières avec l'équation (3). Car, en tirant des équations (4) et (5) les valeurs de $(z - z')$, $(y - y')$ pour les porter dans l'équation (P), on a tout de suite

$$(x - x')^2 \left[1 + \frac{a^4}{x'^2}\left(\frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}\right)\right] = h^2,$$

d'où, en mettant pour $\frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}$ sa valeur $\frac{1}{h^2} - \frac{x'^2}{a^4}$ tirée de l'équation (2), on a

$$(x - x')^2 \cdot \frac{a^4}{h^2 x'^2} = h^2,$$

ce qui donne

$$x' = \frac{a^2 x}{h^2 \pm a^2};$$

et il est évident qu'on aurait de même

$$y' = \frac{b^2 y}{h^2 \pm b^2}, \quad z' = \frac{c^2 z}{h^2 \pm c^2},$$

expressions toutes semblables à celles du n° **39**, mais où des deux signes $\pm$ il ne faut prendre que le signe $-$, si l'on veut ne considérer, sur la normale IT, que le point T qui tombe du même côté que la surface de l'ellipsoïde central à l'égard du plan tangent en I : car, en prenant les signes $+$, on aurait un point T situé de l'autre côté de ce plan tangent, et la ligne OT, menée du centre O, ne serait plus perpendiculaire à la normale IT, comme on le veut dans la question proposée.

45. Au reste, pour lever toute équivoque, il est évident que les coordonnées du point T qui sont x, y, z doivent être telles, qu'elles satisfassent à l'équation du plan du couple, qui est

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0.$$

Or, en y mettant pour x, y, z les doubles valeurs

$$x = \frac{(h^2 \pm a^2)\,x'}{a^2}, \quad y = \frac{(h^2 \pm b^2)\,y'}{b^2}, \quad z = \frac{(h^2 \pm c^2)\,z'}{c^2},$$

on aurait

$$\frac{x'^2}{a^4}(h^2 \pm a^2) + \frac{y'^2}{b^4}(h^2 \pm b^2) + \frac{z'^2}{c^4}(h^2 \pm c^2) = 0.$$

ou, d'après l'équation (2),

$$\pm \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} \pm \frac{z'^2}{c^2} + 1 = 0;$$

mais celle-ci, à cause de l'équation (1), n'est évidemment possible qu'en adoptant à la fois les trois signes inférieurs $-$, ce qui nous ramène aux expressions simples de x, y, z trouvées par la première analyse.

Enfin, quant à l'orbe π décrit par le point P pris à la distance $OP = h$ sur l'axe OG du couple d'impulsion, il est très-facile d'en trouver les équations. Il est évident que cette courbe n'est autre chose que l'intersection de la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2,$$

avec la surface conique décrite par OG, et dont l'équation est

$$(h^2 - a^2)\,x^2 + (h^2 - b^2)\,y^2 + (h^2 - c^2)\,z^2 = 0.$$

D'où l'on voit que cette courbe π est un orbe sphérique, à double courbure, comme les orbes elliptiques τ et s, et qu'elle est décrite autour du même axe.

46. En considérant les deux cônes (OP) et (OT) terminés par ces orbes π et τ qui leur servent de bases, le mouvement du corps se fait de telle manière que le corps tourne, à chaque instant dt, sur les génératrices OP et OT de ces deux cônes, avec des vitesses angulaires proportionnelles aux longueurs mêmes de ces génératrices : de sorte que la première vitesse $\theta \cos i$ est constante comme la ligne OP, et que la seconde $\theta \sin i$ est variable comme la ligne OT.

CHAPITRE III.

MOUVEMENTS ANGULAIRES DES AXES PRINCIPAUX DU CORPS DANS L'ESPACE ABSOLU.

I.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que le mouvement de l'axe *instantané,* parce qu'il suffit de le connaître, et dans le corps et dans l'espace, pour avoir le mouvement du corps lui-même, et, par suite, les mouvements des trois axes principaux que le corps entraîne avec soi dans l'espace absolu.

Mais il n'est peut-être pas inutile d'indiquer en peu de mots ces corollaires, et de montrer, à l'égard de chacun de ces axes principaux a, b, c, le mouvement qu'il a pour tourner autour de l'axe *fixe* du couple d'impulsion; pour s'abaisser et se relever alternativement sur le plan de ce couple : ce qui répond aux mouvements qu'on appelle, en Astronomie, la *précession* des nœuds, la *nutation* de l'axe; quantités analogues à celles qui, dans l'analyse précédente (relative à l'axe et à l'équateur *instantanés*), sont désignées par $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{di}{dt}$, et dont les valeurs en fonction de θ, et par conséquent, du temps t, sont exprimées par

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{\sqrt{\Delta}}{k(k^2\theta^2 - h^2)},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{h}{\theta\sqrt{k^2\theta^2 - h^2}}.$$

47. Soient donc ici λ, μ, ν les trois angles que les rayons principaux a, b, c font avec l'axe fixe du couple d'impulsion, et reprenons les lettres x, y, z pour désigner les lignes kp, kq, kr; il est aisé de voir qu'on a les trois équations suivantes :

$$(1)\qquad \cos\lambda = \frac{hx}{a^2},\quad \cos\mu = \frac{hy}{b^2},\quad \cos\nu = \frac{hz}{c^2},$$

et, par conséquent, celles-ci :

$$(2)\qquad \sin^2\lambda = \frac{a^4 - h^2x^2}{a^4},\quad \sin^2\mu = \frac{b^4 - h^2y^2}{b^4},\quad \sin^2\nu = \frac{c^4 - h^2z^2}{c^4}.$$

D'où l'on peut conclure en passant, que si l'on prolonge les rayons a, b, c jusqu'aux points A′, B′, C′ où ils vont rencontrer le plan du couple d'impulsion (lequel est à la distance h du centre O), on aura, en faisant les lignes variables

$$\mathrm{OA}' = \rho_a,\quad \mathrm{OB}' = \rho_b,\quad \mathrm{OC}' = \rho_c,$$

les équations

$$\rho_a^2 = \frac{a^4}{x^2},\quad \rho_b^2 = \frac{b^4}{y^2},\quad \rho_c^2 = \frac{c^4}{z^2};$$

ce qui donne ces deux propriétés assez remarquables.

$$\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{1}{\rho_c^2} = \textit{constante} = \frac{1}{h^2};$$

$$\frac{a^2}{\rho_a^2} + \frac{b^2}{\rho_b^2} + \frac{c^2}{\rho_c^2} = \textit{constante} = 1.$$

48. Maintenant, soient $\frac{d\pi_a}{dt}$, $\frac{d\pi_b}{dt}$, $\frac{d\pi_c}{dt}$, ou simplement $\dot\pi_a$, $\dot\pi_b$, $\dot\pi_c$ les vitesses angulaires des projections des trois axes a, b, c sur le plan du couple, je dis qu'on aura les trois équations suivantes :

$$\dot\pi_a = \frac{h}{k}\cdot\frac{a^2 - x^2}{a^2\sin^2\lambda},$$

$$\dot\pi_b = \frac{h}{k}\cdot\frac{b^2 - y^2}{b^2\sin^2\mu},$$

$$\dot\pi_c = \frac{h}{k}\cdot\frac{c^2 - z^2}{c^2\sin^2\nu},$$

dont la démonstration directe est très-facile.

Et, en effet, il est clair que $\dot\pi_a\,dt$ ne désigne autre chose que l'angle décrit par la projection du rayon a sur le plan du couple pendant l'instant dt. Or la projection de a est $a\sin\lambda$, et, par conséquent, l'expression $a^2\sin^2\lambda . \dot{\pi}_a\, dt$ représente l'aire décrite par cette projection de a : mais l'aire décrite sur un plan par la projection d'une ligne n'est autre chose que la projection de l'aire décrite dans l'espace par la ligne elle-même. Nous n'avons donc qu'à chercher l'aire que le rayon a décrit dans l'espace, à la projeter sur le plan du couple, et à l'égaler à l'expression $a^2\sin^2\lambda . \dot{\pi}_a\, dt$.

Or, dans un instant dt, le corps tourne autour de a d'un angle $p\,dt$; mais, par cette première rotation, la ligne a demeure immobile et ne produit aucune aire dans l'espace : il ne reste donc à considérer que les deux autres rotations $q\,dt$, $r\,dt$ qui ont lieu dans le même instant autour des deux autres axes b et c.

Par la première, le corps tourne autour de b d'un angle $q\,dt$; et, par conséquent, le rayon a décrit un secteur $a^2 q\,dt$ dans un plan perpendiculaire à b, lequel, étant projeté sur le plan du couple, donne l'aire

$$a^2 q\, dt \times \cos\mu.$$

Par la dernière rotation, le corps tourne autour de c d'un angle $r\,dt$, et le rayon a décrit un secteur $a^2 r\,dt$ perpendiculaire à c, lequel, projeté sur le plan du couple, donne l'aire

$$a^2 r\, dt \times \cos\nu.$$

On a donc l'équation

$$a^2 \sin^2\lambda . \dot{\pi}_a\, dt = (a^2 q\cos^2\mu + a^2 r\cos\nu)\, dt,$$

ou bien, en divisant de part et d'autre par $a^2\, dt$, et remettant, au lieu de q et r, leurs valeurs $\frac{x}{k}$ et $\frac{z}{k}$,

$$\sin^2\lambda . \dot{\pi}_a = \frac{h}{k}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{h}{k}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);$$

ce qui est la première de nos trois équations. Et il est évident qu'on aurait de même la seconde, en y changeant a en b, x en y, et λ en μ; et ensuite la troisième, en y changeant a en c, x en z, et λ en ν.

Ainsi on aura

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \dot{\pi}_a = \dfrac{h}{k}\cdot\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 \sin^2\lambda}, \\ \dot{\pi}_b = \dfrac{h}{k}\cdot\dfrac{b^2 - y^2}{b^2 \sin^2\mu}, \\ \dot{\pi}_c = \dfrac{h}{k}\cdot\dfrac{c^2 - z^2}{c^2 \sin^2\nu}; \end{cases}$$

ce qu'il fallait démontrer.

49. Si l'on multiplie la première de ces trois équations par $\sin^2\lambda$, la deuxième par $\sin^2\mu$, la troisième par $\sin^2\nu$, et qu'on les ajoute, il vient

$$\sin^2\lambda\,.\,\dot{\pi}_a + \sin^2\mu\,.\,\dot{\pi}_b + \sin^2\nu\,.\,\dot{\pi}_c = \frac{h}{k}(3-1) = 2\frac{h}{k}.$$

Or, qu'on prenne sur les axes principaux, et à partir du centre, trois lignes égales à l'unité, et l'on pourra voir $\sin\lambda$, $\sin\mu$, $\sin\nu$ comme les trois projections de ces lignes sur le plan fixe du couple; et $\sin^2\lambda\,.\,\dot{\pi}_a$, $\sin^2\mu\,.\,\dot{\pi}_b$, $\sin^2\nu\,.\,\dot{\pi}_c$ comme les fluxions des trois aires décrites par ces projections sur le même plan. Donc, en considérant la somme de ces trois aires, on aura, pour cette somme, l'expression très-simple

$$2\frac{h}{k}t,$$

où l'on peut remarquer que $\frac{h}{k}$ est la vitesse angulaire constante $\theta\cos i$ du système autour de l'axe fixe du couple d'impulsion G.

50. Si, en considérant les mêmes équations (II), on multiplie la première par $\frac{\sin^2\lambda}{a^2}$, la deuxième par $\frac{\sin^2\mu}{b^2}$, la troisième par $\frac{\sin^2\nu}{c^2}$, il vient

$$\frac{1}{a^2}\sin^2\lambda\,.\,\dot{\pi}_a = \frac{h}{ka^2} - \frac{h}{k}\frac{x^2}{a^4},$$

$$\frac{1}{b^2}\sin^2\mu\,.\,\dot{\pi}_b = \frac{h}{kb^2} - \frac{h}{k}\frac{y^2}{b^4},$$

$$\frac{1}{c^2}\sin^2\nu\,.\,\dot{\pi}_c = \frac{h}{kc^2} - \frac{h}{k}\frac{z^2}{c^4},$$

d'où, en ajoutant, on tire cette équation remarquable,

$$\frac{1}{a^2}\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a + \frac{1}{b^2}\sin^2\mu.\dot{\pi}_b + \frac{1}{c^2}\sin^2\nu.\dot{\pi}_c = \frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{h^2}\right).$$

Or $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ne sont autre chose que les bras de l'inertie du corps autour des axes principaux : si donc, à partir du centre O, on porte sur les axes, trois lignes égales aux *bras respectifs de l'inertie* autour des mêmes axes, on pourra considérer $\frac{1}{a}\sin\lambda$, $\frac{1}{b}\sin\mu$, $\frac{1}{c}\sin\nu$ comme les trois projections de ces lignes sur le plan du couple, et $\frac{1}{a^2}\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a$, $\frac{1}{b^2}\sin^2\mu.\dot{\pi}_b$, $\frac{1}{c^2}\sin^2\nu.\dot{\pi}_c$ comme les fluxions des trois aires que ces projections décrivent sur le même plan pendant le mouvement du corps; donc, en multipliant par dt et intégrant, on aura pour la somme de ces aires décrites dans le temps t,

$$\frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{h^2}\right)\cdot t.$$

31. Voilà donc deux propriétés nouvelles du mouvement d'un corps libre qui tourne sur son centre de gravité :

1°. *Si, à partir de ce centre, on porte sur les axes principaux du corps, trois lignes égales entre elles et d'une longueur quelconque* R, *la somme des aires décrites par leurs trois projections sur le plan fixe du couple d'impulsion sera proportionnelle au temps; et elle sera exprimée par* $2\frac{h}{k}\cdot R^2 t$;

2°. *Si l'on porte sur les mêmes axes principaux, trois lignes proportionnelles aux trois bras de l'inertie du corps autour des mêmes axes, la somme des trois aires décrites par leurs projections sur le plan du couple sera aussi proportionnelle au temps;* et cette somme sera exprimée par

$$j^2\cdot\frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{h^2}\right)\cdot t,$$

j étant le commun rapport des trois lignes aux trois bras d'inertie; ce qui forme deux théorèmes très-remarquables dans la théorie de la rotation d'un corps libre de toute action étrangère : théorèmes en quelque sorte géométriques, et qu'il ne faut pas confondre avec ceux qui regardent le principe ordinaire de la conservation des aires, quoiqu'ils en dépendent au fond, et qu'on puisse en rapprocher les expressions, comme on peut le voir dans l'article suivant.

32. Et, en effet, si l'on considère tous les rayons vecteurs menés du centre à toutes les molécules égales du corps, et la moyenne de toutes les aires que leurs projections tracent sur le plan fixe du couple, on aura évidemment, pour cette *aire moyenne*, l'expression $\frac{G}{m}$; G étant la grandeur du couple d'impulsion, et m la masse du corps, ou le nombre de toutes ses molécules. Ainsi, comme on a représenté G par $\frac{m}{hk}$, on aura, pour l'expression de cette aire moyenne, décrite dans le temps t,

$$\frac{1}{hk}\cdot t.$$

33. Si donc on voulait que l'aire précédente $2\frac{h}{k}\cdot R^2.t$, due aux mouvements des trois rayons égaux R, pris sur les trois axes du corps, fût égale à cette aire moyenne $\frac{1}{kh}\cdot t$ du système de tous les rayons vecteurs menés aux particules du corps, il faudrait choisir la longueur du rayon R de manière qu'on eût

$$2\frac{h}{k}R^2 = \frac{1}{kh};$$

ce qui donne, pour R, l'expression

$$R = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Ainsi, en prenant, sur les axes principaux du corps, trois lignes égales à $\frac{1}{h\sqrt{2}}$, on peut dire que, pendant le mouvement du corps, ces trois lignes projetées sur le plan du couple y décrivent trois aires dont la somme est égale à l'aire moyenne du système : de sorte qu'en multipliant cette aire par la masse m du corps, on a l'aire totale due au couple d'impulsion G.

54. On pourrait chercher de même les rayons inégaux R_a, R_b, R_c, mais proportionnels aux bras respectifs de l'inertie $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, qu'il faudrait prendre sur les axes, pour que l'aire décrite fût égale à l'aire moyenne du système. En désignant, comme ci-dessus, par j le rapport inconnu de R_a à $\frac{1}{a}$, de R_b à $\frac{1}{b}$, de R_c à $\frac{1}{c}$, on aurait, pour déterminer j, l'équation

$$j^2 \cdot \frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{h^2}\right) = \frac{1}{kh},$$

d'où l'on tire

$$j^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{h^2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2) - a^2 b^2 c^2},$$

et, par conséquent, en faisant $a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 = B$ et $a^2 b^2 c^2 = C$,

$$R_a = \frac{bc}{\sqrt{Bh^2 - C}},$$

$$R_b = \frac{ac}{\sqrt{Bh^2 - C}},$$

$$R_c = \frac{ab}{\sqrt{Bh^2 - C}}.$$

Ainsi, en prenant les aires décrites par les projections de ces trois lignes, on aurait en somme une aire égale à l'aire moyenne du système.

II.

Propriétés des mouvements de nutation des trois axes principaux vers l'axe fixe du couple d'impulsion.

55. Les trois équations (2) du n° 47 donnent :

$$a^2 \sin^2 \lambda = a^2 - h^2 \frac{x^2}{a^2},$$

$$b^2 \sin^2 \mu = b^2 - h^2 \frac{y^2}{b^2},$$

$$c^2 \sin^2 \nu = c^2 - h^2 \frac{z^2}{c^2};$$

donc, en ajoutant, on a l'équation

$$\text{(A)}\quad a^2\sin^2\lambda + b^2\sin^2\mu + c^2\sin^2\nu = a^2 + b^2 + c^2 - h^2 = \textit{constante}.$$

Les mêmes équations (2) donnent

$$\sin^2\lambda = 1 - h^2\frac{x^2}{a^4},\quad \sin^2\mu = 1 - h^2\frac{y^2}{b^4},\quad \sin^2\nu = 1 - h^2\frac{z^2}{c^4}:$$

donc, en ajoutant, on a

$$\text{(B)}\qquad \sin^2\lambda + \sin^2\mu + \sin^2\nu = 3 - 1 = 2 = \textit{constante},$$

ce qui revient à l'équation connue

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

comme cela doit être.

Donc, *si l'on considère les trois pôles* A, B, C *de l'ellipsoïde central, il résulte de l'équation précédente* (A), *que la somme des carrés de leurs distances à l'axe fixe du couple d'impulsion est constante dans tout le cours du mouvement.*

On peut regarder $\sin^2\lambda$ comme $a^2\sin^2\lambda \times \frac{1}{a^2}$, c'est-à-dire comme le produit du carré de la distance du pôle A à l'axe du couple, multipliée par le carré du bras $\frac{1}{a}$ de l'inertie du corps. Il résulte donc de l'équation (B) cet autre théorème :

La somme des carrés des bras de l'inertie du corps respectivement multipliés par les carrés des distances variables des pôles à l'axe du couple, est constante dans tout le cours du mouvement.

III.

Des courbes σ_a, σ_b, σ_c décrites sur le plan du couple par les projections des trois pôles A, B, C *de l'ellipsoïde central.*

56. Si l'on considère les trois courbes σ_a, σ_b, σ_c que décrivent les trois pôles A, B, C projetés sur le plan du couple, on voit que ces trois courbes, dont le cours est infini, et qui, en général, ne se ferment point, sont de même genre que l'herpolhodie σ décrite sur le même plan par le pôle instantané de rotation.

Si h est $> b$, par exemple, et que a soit ainsi l'axe que l'orbe elliptique s du pôle instantané entoure comme un essieu, la courbe σ_a décrite, sur le plan du couple, par la projection du pôle A, sera, comme l'herpolhodie σ, formée par une suite d'ondes égales et régulières autour du même centre P. Et même, comme le *maximum* du rayon vecteur $v_a = a \sin \lambda$ répond au *minimum* de x, et ce *minimum* au *minimum* du rayon vecteur v de la courbe σ, on voit que les sommets supérieurs des ondes de la courbe σ_a répondent aux sommets inférieurs de la courbe σ, et les inférieurs aux supérieurs.

57. Pendant ce temps, les projections des pôles B et C décrivent aussi, autour du même centre P, des courbes σ_b, σ_c qui ont des sommets alternatifs de *maximum* et de *minimum*, où ces deux pôles passent aux mêmes époques, mais l'un B passant par un sommet supérieur, quand l'autre C passe à un sommet inférieur, et réciproquement : et cela, à un angle droit de distance entre le rayon vecteur v_b de l'un et le rayon vecteur v_c de l'autre.

Si h est $< b$, auquel cas l'orbe elliptique s entoure le petit axe c comme son essieu, on aura les mêmes propriétés pour les courbes décrites par les projections des trois pôles.

Ce qu'on peut remarquer dans les deux cas, c'est que la courbe σ_b, décrite par le pôle *moyen* B, est la seule dont les sommets répondent toujours à des sommets de même nom dans l'herpolhodie σ, et que le contraire a toujours lieu pour les deux autres courbes σ_a, σ_c.

Cas singulier de $h = b$.

58. Enfin si $h = b$, auquel cas singulier l'orbe s est une ellipse passant par l'axe moyen b, et la courbe σ une spirale autour du centre P, 1° le pôle moyen B décrira de même une spirale autour du même centre, se rapprochant sans cesse de ce point comme la spirale σ, sans jamais pouvoir l'atteindre; 2° le pôle A décrira aussi une spirale, mais qui ira sans cesse en s'éloignant du même centre, depuis sa distance *minimum* $a \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$, jusqu'à sa distance *maximum* a

qu'elle ne pourra jamais atteindre : cette spirale, décrite par le pôle A, va donc sans cesse en s'épanouissant vers une circonférence de cercle du rayon a, qui en est comme l'asymptote; 3° enfin, il en sera de même de la spirale décrite par le pôle C, et dont le plus petit rayon sera $= c \cdot \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$, et le plus grand $= c$.

Cas où l'ellipsoïde central est de révolution.

59. Si l'ellipsoïde central est de révolution, l'orbe s est un cercle autour de l'axe de révolution, la courbe σ est un cercle sur le plan du couple, et la projection du pôle de la figure décrit aussi un cercle concentrique. Dans ce cas, il n'y a point, à proprement parler, d'autre pôle de la figure que celui qui fait l'extrémité de l'axe de révolution. Mais si l'on voulait en marquer arbitrairement deux autres sur l'équateur du sphéroïde, pris à un angle droit de distance l'un de l'autre, et considérer les deux courbes que leurs projections décrivent, on aurait deux courbes parfaitement égales, qui ne seraient point circulaires, mais qui formeraient des ondulations régulières autour du même centre : les sommets de noms différents sur les deux courbes étant toujours à un angle droit de distance angulaire l'un de l'autre.

Remarque I.

60. On a trouvé pour la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ du pôle instantané I autour du centre, de l'axe du couple,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 k \rho^2},$$

ρ étant le rayon vecteur de l'herpolhodie σ. Voyons quelle est, en fonction de son rayon vecteur ρ_a, l'expression de la vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ du pôle A de l'ellipsoïde autour du même axe fixe.

Cette vitesse angulaire est exprimée, comme on l'a vu plus haut, par

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{h}{k} \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2 \sin^2 \lambda}.$$

Or, $a^2 \sin^2\lambda$ étant le carré du rayon vecteur ν_a de la courbe σ_a, on a d'abord

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{h}{k} \cdot \frac{a^2 - x^2}{\nu_a^2};$$

mais, de

$$\nu_a^2 = a^2 \sin^2\lambda = \frac{a^4 - h^2 x^2}{a^2},$$

on tire

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2}{h^2}(\nu_a + h^2 - a^2);$$

on a donc, en mettant pour $a^2 - x^2$ cette valeur,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{a^2}{kh} + \frac{a^2(h^2 - a^2)}{kh \cdot \nu_a^2};$$

d'où l'on voit que l'expression de la vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ du pôle A de la figure est semblable à celle de la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ du pôle instantané I, l'une et l'autre se composant d'une partie constante et d'une partie réciproque au carré du rayon vecteur.

Et il est évident qu'on peut dire la même chose des deux autres pôles B et C, puisque leurs mouvements angulaires sont donnés par la même expression que la précédente en y changeant simplement a en b, et a en c.

Remarque II.

61. Si le corps était de révolution, autour de l'axe principal a par exemple, il est certain que la vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ du pôle A serait égale à celle du pôle instantané I. On doit donc trouver, dans le cas de $b = c$,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

C'est, en effet, ce qui a lieu, car il est aisé de voir que, dans le cas de $b = c$, le carré du rayon vecteur ν de l'herpolhodie σ est constant et qu'il a pour valeur

$$v^2 = \frac{(a^2 - h^2)(h^2 - b^2)}{h^2}:$$

d'un autre côté, on a, pour le carré du rayon vecteur v_a de la courbe σ_a,

$$v_a^2 = \frac{h^2(a^2 - h^2)}{h^2 - b^2}:$$

or, en mettant ces valeurs de v^2 et v_a^2 dans les expressions respectives de $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\pi_a}{dt}$, on trouve d'abord

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)^2 \cdot h^2}{h^3 k \cdot (a^2 - h^2)(h^2 - b^2)} = \frac{h}{k} - \frac{h^2(h^2 - b^2)}{h^3 k} = \frac{b^2}{kh},$$

et ensuite

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{h}{k} \cdot \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)}{h^2(a^2 - h^2)} = \frac{h}{k} - \frac{h}{k} \cdot \frac{h^2 - b^2}{h^2} = \frac{b^2}{kh},$$

même valeur que la précédente, comme cela devait être.

Remarque III.

62. Comme dans notre analyse la quantité $\frac{1}{hk}$ exprime la grandeur du couple d'impulsion, on tire de l'expression précédente,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{b^2}{hk},$$

qui ne renferme que le produit hk et le carré de b^2, cette conséquence remarquable : c'est que, dans un corps dont l'ellipsoïde central est de révolution, le mouvement $\frac{d\pi_a}{dt}$ des nœuds de l'équateur sur le plan fixe du couple ne dépend que de la grandeur de ce couple, et point du tout de sa direction; que ce mouvement ne dépend pas non plus du moment d'inertie autour de l'axe a du corps, mais du seul moment d'inertie autour du rayon b de l'équateur. Ainsi, quelles que soient la position du couple par rapport à l'axe, et la valeur du moment d'inertie $\frac{1}{a^2}$ autour de cet axe, le pôle A du corps tournera toujours avec la même vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ autour de l'axe fixe du couple d'impulsion.

Or il n'est pas difficile de reconnaître que, même sans changer la masse d'un corps, on en pourrait changer la figure d'une infinité de manières telles, que le sphéroïde *central* y aurait pour tous un équateur de même rayon b, mais un axe a qui différerait de l'un à l'autre. On peut donc dire qu'un même couple G, appliqué comme on voudra à l'un quelconque de ces corps, y produirait exactement la même *précession*, c'est-à-dire le même mouvement angulaire de la ligne des nœuds de l'équateur sur le plan fixe de ce couple.

IV.

Équations différentielles des courbes σ_a, σ_b, σ_c.

63. Si l'on voulait avoir l'équation polaire de l'une des courbes σ_a, entre son rayon vecteur v_a et l'angle π_a qu'il décrit sur le plan fixe, il suffirait de chercher l'expression de $\frac{dv_a}{dt}$ en fonction de v_a, et de la comparer à celle de $\frac{d\pi_a}{dt}$ qui nous est déjà connue.

Ainsi, comme on a

$$a^2 - v_a^2 = \frac{h^2}{a^2} x^2,$$

et d'ailleurs

$$x^2 = \frac{a^4}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \cdot (u^2 - \alpha^2),$$

on aura, en faisant, pour abréger,

$$\frac{a^2 h^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = n,$$

l'équation

$$a^2 - v_a^2 = n(u^2 - \alpha^2), \tag{1}$$

d'où l'on tire

$$-\frac{v_a\, dv_a}{dt} = n \cdot \frac{u\, du}{dt}.$$

Or on a trouvé précédemment (n° **8**)

$$\frac{u\,du}{dt} = \frac{1}{k}\sqrt{(u^2-\alpha^2)(\beta^2-u^2)(u^2-\gamma^2)},$$

et l'on a, d'après l'équation (1) ci-dessus,

$$u^2-\alpha^2 = \frac{a^2-v_a^2}{n};$$

$$\beta^2-u^2 = \frac{n(\beta^2-\alpha^2)-(a^2-v_a^2)}{n};$$

$$u^2-\gamma^2 = \frac{n(\alpha^2-\gamma^2)+(a^2-v_a^2)}{n};$$

donc, en substituant ces valeurs, on aura

$$v_a\cdot\frac{dv_a}{dt} = -\frac{1}{k\sqrt{n}}\cdot\sqrt{(a^2-v_a^2)[n(\beta^2-\alpha^2)-(a^2-v_a^2)][(a^2-v_a^2)+n(\alpha^2-\gamma^2)]}.$$

Maintenant, comme on a pour l'expression de $\frac{d\pi_a}{dt}$,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{a^2}{hk}\cdot\frac{h^2-(a^2-v_a^2)}{v_a^2},$$

on aura, en divisant cette équation par la précédente,

$$\frac{d\pi_a}{dv_a} = \frac{a^2\sqrt{n}}{h}\cdot\frac{v_a^2-a^2+h^2}{v_a\cdot\sqrt{(v_a^2-a^2)[v_a^2-a^2+h(\gamma^2-\alpha^2)][n(\alpha^2-\beta^2)-v_a^2]}}.$$

ce qui est, entre le rayon vecteur v_a et l'angle π_a qu'il décrit sur le plan fixe du couple d'impulsion, l'équation cherchée de la courbe σ_a.

On trouverait de même les équations polaires des deux autres courbes σ_b, σ_c décrites sur le même plan par les projections des deux pôles B et C de l'ellipsoïde central : il suffirait de changer a en b, et a en c dans l'équation précédente, mais avec cette attention de faire le même changement dans l'expression du nombre n, qui étant ici,

pour σ_a, $\qquad n = \frac{a^2h^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$,

serait pour σ_b, $\qquad n = \frac{b^2h^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$,

et pour σ_c, $\qquad n = \frac{c^2h^2}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}$.

64. Si, au lieu de la courbe σ_a, décrite par la projection du pôle A, on voulait considérer la courbe $\sigma_{a'}$ tracée par le point A′ où l'axe a prolongé va rencontrer le plan du couple, il est clair qu'en nommant $v_{a'}$ le rayon vecteur de cette nouvelle courbe $\sigma_{a'}$, on aurait d'abord entre v_a et $v_{a'}$, cette relation

$$(\mathrm{R}) \qquad v_a^2 = \frac{a^2 v_{a'}^2}{h^2 + v_{a'}^2}.$$

Or, ces deux rayons vecteurs v_a et $v_{a'}$ étant toujours dans une même direction, il est évident que le mouvement angulaire du rayon $v_{a'}$ est parfaitement égal à celui du rayon v_a, et que, par conséquent, pour avoir la vitesse angulaire $\frac{d\pi_{a'}}{dt}$ du rayon $v_{a'}$, il suffit de mettre, dans l'expression précédente de $\frac{d\pi_a}{dt}$, au lieu de v_a, sa valeur en $v_{a'}$ qui est donnée ci-dessus. On aura donc de suite l'équation

$$\frac{d\pi_{a'}}{dt} = \frac{h}{k}\cdot\frac{v_{a'}^2 + h^2 - a^2}{v_{a'}^2}.$$

A présent, pour obtenir l'équation polaire de cette nouvelle herpolhodie $\sigma_{a'}$, il faudrait chercher l'expression de $\frac{dv_{a'}}{dt}$ en fonction de $v_{a'}$. Or l'équation (R) étant différentiée donne d'abord

$$\frac{dv_a^2}{dt} = \frac{(h^2 + v_{a'}^2)^{\frac{3}{2}}}{a(v_{a'} - av_{a'} + h^2)}\cdot\frac{dv_a}{dt};$$

il ne reste donc qu'à trouver le facteur $\frac{dv_a}{dt}$ en fonction du rayon $v_{a'}$.

Mais nous avons trouvé plus haut $\frac{dv_a}{dt}$ en fonction du rayon v_a, et celui-ci, par l'équation (R), est donné en $v_{a'}$; donc, en faisant ces substitutions, on aura l'expression de $\frac{dv_{a'}}{dt}$ en fonction du rayon vecteur $v_{a'}$.

Donc enfin, si l'on divise l'expression de $\frac{d\pi_{a'}}{dt}$ par celle de $\frac{dv_{a'}}{dt}$, il viendra

$$\frac{d\pi_{a'}}{d\nu_{a'}} = \textit{fonction de } \nu_{a'},$$

ce qui donnera l'équation polaire de la courbe $\sigma_{a'}$.

On trouverait les deux autres courbes σ_b, σ_c par le simple changement de a en b, et de a en c dans la précédente.

65. On peut remarquer entre ces nouvelles courbes et les premières une différence assez notable. Chacune des trois premières courbes σ_a, σ_b, σ_c est, comme l'herpolhodie σ, toujours renfermée entre deux cercles de rayons finis, dont elle va toucher alternativement l'une et l'autre circonférences. Mais, des trois courbes $\sigma_{a'}$, $\sigma_{b'}$, $\sigma_{c'}$, il n'y en a qu'une seule qui circule ainsi entre deux circonférences finies; et cette courbe est ou $\sigma_{a'}$ ou $\sigma_{c'}$ selon qu'on a

$$h > b \quad \text{ou} \quad h < b.$$

Pour les deux autres, elles vont porter les sommets *supérieurs* de leurs ondes sur des circonférences de cercle d'un rayon infini. C'est ce qu'il est facile de reconnaître par la simple comparaison du rayon vecteur ν_a au rayon vecteur $\nu_{a'}$; etc.

66. Par les deux variables π_a et ν_a, déterminées en fonction du temps t, on aurait la projection du pôle A sur le plan fixe, et comme la hauteur de ce point au-dessus du plan est exprimée par $\sqrt{a^2 - \nu_a^2}$, on connaîtrait la position du pôle A dans l'espace absolu : et ainsi pour les deux autres pôles B et C du corps. Mais l'intégration de ces expressions $\frac{d\pi_a}{dt}$ et $\frac{d\nu_a}{dt}$ a les mêmes difficultés et demande l'emploi des mêmes fonctions elliptiques que les précédentes $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$ relatives au pôle instantané I de la rotation, etc., etc.

67. Mais je n'irai pas plus loin dans ces détails : nous n'avions ici d'autre but principal que de bien démontrer notre théorie nouvelle de la rotation des corps, et de l'élever à un point de clarté où elle devînt, pour ainsi dire, élémentaire : or il me semble que, par les nouveaux théorèmes et les images variées qui précèdent, cet important objet se trouve entièrement rempli.

J'ajouterai seulement, sur la nature du mouvement de rotation d'un corps libre, ce dernier corollaire : c'est que l'ellipsoïde central du corps est perpétuellement coupé par le plan fixe du couple d'impulsion suivant une ellipse dont la forme varie, mais dont l'aire est constante.

Cela se voit presque immédiatement si l'on considère que tous les rhomboïdes construits sur trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde sont égaux en volume, et qu'il en est de même de tous les cylindres inscrits à ces rhomboïdes; que, par conséquent, de cette infinité de cylindres égaux, ceux qui ont même hauteur, ont des bases équivalentes. Or c'est précisément ce qui a lieu pour les cylindres dont les deux bases parallèles touchent l'ellipsoïde central aux deux bouts de l'axe instantané de rotation.