JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINNE

Sur des équations différentielles qui se rattachent à l'équation de Riccati

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 255-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__255_0>

Sur des équations différentielles qui se rattachent à l'équation de Riccati;

Par M. E. BRASSINNE,
Professeur aux Écoles d'Artillerie.

1. On sait que l'équation

$$dy + ay^2\,dx = \frac{b}{x^2}\,dx + cx^m\,dx$$

est intégrable dans une infinité de cas. Pour le démontrer, on n'a qu'à poser

$$y = -\frac{l}{x} + z.u$$

(z et u étant deux fonctions inconnues de x, et l une constante indéterminée). Substituons dans l'équation proposée, nous trouverons

$$l\,\frac{dx}{x^2} + z\,du + u.dz + a\left(\frac{l^2}{x^2} - \frac{2lzu}{x} + z^2u^2\right)dx = \frac{b}{x^2}\,dx + cx^m\,dx;$$

on détermine ensuite l de telle sorte que

$$l + al^2 - b = 0.$$

Soit $p = al$, l étant une racine de cette équation, et posons

$$z\left(du - \frac{2pu}{x}\,dx\right) = 0,$$

d'où

$$u = x^{2p};$$

il nous restera l'équation

$$x^{2p}\,dz + ax^{4p}\,z^2\,dx = cx^m\,dx.$$

Divisant par x^{2p} et posant

$$x^{2p}\,dx = dt,$$

on retrouve la forme de l'équation de Riccati.

Nous avons rappelé cette transformation parce qu'elle démontre qu'une équation de la forme

$$dy + ay^2\,dx = \frac{b}{x^2}\,dx + cx^m\,dx + c'\,x^{m'}\,dx + \ldots$$

peut se ramener à une équation de même forme, mais dans laquelle on pourra réduire à zéro un quelconque des exposants m, m',.... Il suffira pour cela de faire usage de la transformation précédente et de poser

$$\frac{b}{x^2} = \frac{b'}{x^2} + \frac{b''}{x^2};$$

on déterminera ensuite l'arbitraire b' de telle sorte que la racine de l'équation du second degré $l + al^2 - b' = 0$ puisse, dans les réductions suivantes, annuler un des exposants de x au second membre.

2. Appliquons à l'équation

$$dy + y^2\,dx = ax^m\,dx$$

la transformation suivante :

$$y = uv - l.$$

Nous trouverons, par la substitution,

$$v\,du + u\,dv + (u^2 v^2 - 2\,l\,uv + l^2)\,dx = ax^m\,dx:$$

posons ensuite

$$u\,(dv - 2\,lv\,dx) = 0,$$

d'où

$$v = e^{2\,lx};$$

nous aurons l'équation simplifiée

$$du\,e^{2\,lx} + u^2\,e^{4\,lx}\,dx = ax^m\,dx - l^2\,dx;$$

posant enfin

$$e^{2\,lx}\,dx = dt,$$

on obtient, toutes simplifications faites, l'équation

$$du + u^2\,dt = \frac{a}{(2\,l)^{m+2}} \log\,(2\,lt)^m \cdot \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{4}\,\frac{dt}{t^2},$$

intégrable dans tous les cas de l'équation de Riccati.