JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Mémoire sur le déterminant d'un système de fonctions

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 212-227.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__212_0>

MÉMOIRE

SUR LE DÉTERMINANT D'UN SYSTÈME DE FONCTIONS;

Par M. J. BERTRAND.

(Présenté à l'Académie des Sciences le 3 février 1851.)

Si l'on considère n fonctions de n variables indépendantes,

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,\quad f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

elles ont, en tout, n^2 dérivées partielles, et l'on sait que le déterminant du système de ces n^2 dérivées a été nommé par M. Jacobi *déterminant du système des fonctions*. L'illustre géomètre a insisté, dans un de ses Mémoires, sur la grande analogie du déterminant d'un système de fonctions avec la dérivée d'une fonction d'une seule variable; mais cette analogie résulte jusqu'ici de la forme des énoncés et de la similitude des résultats bien plus que d'une ressemblance dans les définitions ou le mode de démonstration. J'adopte, dans ce Mémoire, une définition nouvelle qui rend, je crois, beaucoup plus sensible cette analogie importante, et de laquelle se déduisent, comme de simples corollaires, les propriétés connues du déterminant. Cette définition simplifie, en outre, notablement la démonstration des formules relatives aux changements de variables dans les intégrales multiples.

Définition du déterminant.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n fonctions de n variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots, x_n$; donnons à ces variables n systèmes d'accroissements distincts et indépendants:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{llll} d_1 x_1, & d_1 x_2, \ldots, & d_1 x_n, \\ d_2 x_1, & d_2 x_2, \ldots, & d_2 x_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n x_1, & d_n x_2, \ldots, & d_n x_n; \end{array}\right.$$

représentons les accroissements correspondants des fonctions par

$$(2)\qquad \begin{cases} d_1 f_1, & d_1 f_2,\ldots, & d_1 f_n, \\ d_2 f_1, & d_2 f_2,\ldots, & d_2 f_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n f_1, & d_n f_2,\ldots, & d_n f_n; \end{cases}$$

en sorte que, k et i désignant deux nombres entiers quelconques,

$$(3)\qquad d_k f_i = \frac{df_i}{dx_1} d_k x_1 + \frac{df_i}{dx_2} d_k x_2 + \ldots + \frac{df_i}{dx_n} d_k x_n.$$

Je nommerai *déterminant du système des fonctions*, la limite du rapport du déterminant du système (2) au déterminant du système (1), c'est-à-dire *la limite du rapport du déterminant du système d'accroissements des fonctions au déterminant du système des accroissements correspondants des variables*.

Pour que la définition précédente devienne légitime, il faut montrer que le rapport des déterminants des systèmes (1) et (2) est indépendant du système d'accroissements choisi pour les variables; or l'équation (3) prouve, en vertu d'un théorème bien connu dans la théorie des déterminants, que le déterminant du système (2) est le produit de deux déterminants, et que l'on a

$$\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n) = \sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n) \sum\left(\pm \frac{df_1}{dx_1}\frac{df_2}{dx_2}\cdots\frac{df_n}{dx_n}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)} = \sum\left(\pm \frac{df_1}{dx_1}\frac{df_2}{dx_2}\cdots\frac{df_n}{dx_n}\right).$$

Or le second membre est indépendant de la valeur des accroissements attribués aux variables; il en est donc de même du premier, et la proposition est, par conséquent, démontrée.

Cas où le déterminant est nul.

Pour que le déterminant d'un système de fonctions soit nul, il faut et il suffit qu'il existe, entre ces fonctions, une relation indépendante des valeurs attribuées aux variables.

Prouvons d'abord que le déterminant ne peut pas être nul lorsque les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont indépendantes les unes des autres; dans ce cas, en effet, les équations

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_2, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_n, \end{aligned}$$

sont distinctes les unes des autres, et l'on peut concevoir que l'on en déduise $x_1, x_2, \ldots, x_n$ exprimées en fonctions de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. On peut, par suite, considérer $f_1, f_2, \ldots, f_n$ comme des variables indépendantes et disposer arbitrairement de leurs accroissements, en sorte que le déterminant du système de ces accroissements qui sert de numérateur au déterminant du système des fonctions, peut être considéré comme complétement arbitraire. Ce numérateur peut donc avoir une valeur différente de zéro, et, par suite, le quotient n'est pas nul.

On doit remarquer, pour compléter cette démonstration, que le dénominateur du déterminant du système des fonctions ne peut pas, si ce n'est pour des valeurs particulières des variables, être infini par rapport au numérateur, car l'un et l'autre contiennent à leurs différents termes le même nombre de facteurs infiniment petits du premier ordre.

Réciproquement, il est facile de voir que, dans le cas où les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ne sont pas indépendantes, leur déterminant est toujours nul. Supposons, en effet, que, parmi ces fonctions, un certain nombre d'entre elles, $f_1, f_2, \ldots, f_p$, puissent seules recevoir des valeurs arbitraires, et que les autres, $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_n$, en soient des fonctions déterminées; $f_1, f_2, \ldots, f_p$ étant arbitraires, on pourra supposer que leurs accroissements soient nuls, en sorte que

$$d_1 f_1 = 0, \quad d_1 f_2 = 0, \quad d_1 f_p = 0,$$

et cela d'une infinité de manières, car ces équations n'établissent que p relations entre les accroissements $d_1 x_1$, $d_1 x_2, \ldots, d_1 x_n$, qui, par suite, resteront, en partie, indéterminés.

Mais alors $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_n$, qui sont, par hypothèse, des fonctions de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, auront aussi des accroissements égaux à zéro, et, par suite, dans le carré relatif au déterminant des accroissements des fonctions, la première ligne horizontale tout entière,

$$d_1 f_1, \quad d_1 f_2, \quad d_1 f_3, \ldots, \quad d_1 f_n,$$

sera composée de zéros, et le déterminant sera évidemment égal à zéro. Or on voit, sans qu'il soit nécessaire de le développer, que le déterminant de l'accroissement des variables pourra être rendu différent de zéro; car la première ligne horizontale de ce déterminant n'est pas uniquement composée de zéros, et les $n - 1$ lignes restantes peuvent être choisies complétement à volonté. Le rapport de ces deux déterminants, c'est-à-dire le déterminant du système proposé, est donc, comme nous l'avions annoncé, égal à zéro.

Déterminant des fonctions inverses.

Si l'on conçoit que les équations

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_n, \end{aligned}$$

soient résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et que l'on trouve

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(f_1, f_2, \ldots, f_n), \\ x_2 &= \varphi_2(f_1, f_2, \ldots, f_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(f_1, f_2, \ldots, f_n), \end{aligned}$$

on dit que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ forment un système inverse de celui des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$; il est facile de voir que les systèmes (1) et (2) ont des déterminants dont les valeurs sont réciproques. Si l'on considère, en effet, n systèmes d'accroissements attribués à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les accroissements correspondants de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, le déterminant du système (1) est

$$\frac{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)},$$

et celui du système (2),

$$\frac{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)}{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)},$$

et ces fractions sont évidemment réciproques l'une de l'autre.

Déterminant des fonctions de fonctions.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, n fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Considérons n fonctions de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, que nous désignerons par $f_1, f_2, \ldots, f_n$; $f_1, f_2, \ldots, f_n$ formeront un système de fonctions de fonctions. Pour chercher l'expression du déterminant d'un pareil système, attribuons aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n systèmes d'accroissements

$$\begin{array}{lll} d_1 x_1, & d_1 x_2, \ldots, & d_1 x_n, \\ d_2 x_1, & d_2 x_2, \ldots, & d_2 x_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n x_1, & d_n x_2, \ldots, & d_n x_n; \end{array}$$

il en résultera pour les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; $f_1, f_2, \ldots, f_n$, des accroissements correspondants

$$\begin{array}{lll} d_1 f_1, & d_1 f_2, \ldots, & d_1 f_n, \\ d_2 f_1, & d_2 f_2, \ldots, & d_2 f_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n f_1, & d_n f_2, \ldots, & d_n f_n, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} d_1 \varphi_1, & d_1 \varphi_2, \ldots, & d_1 \varphi_n, \\ d_2 \varphi_1, & d_2 \varphi_2, \ldots, & d_2 \varphi_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n \varphi_1, & d_n \varphi_2, \ldots, & d_n \varphi_n. \end{array}$$

Or on a identiquement

$$\frac{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)} = \frac{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum(\pm d_1 \varphi_1\, d_2 \varphi_2 \ldots d_n \varphi_n)} \frac{\sum(\pm d_1 \varphi_1\, d_2 \varphi_2 \ldots d_n \varphi_n)}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)},$$

et cette identité est l'expression analytique du théorème suivant:

Le déterminant d'un système de fonctions de fonctions est le produit du déterminant du système des fonctions proposées par rapport aux variables dont elles dépendent directement, par le déterminant de ce système de variables intermédiaires considérées comme fonctions des variables principales.

Déterminant des fonctions composées.

Supposons actuellement que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soient exprimées au moyen des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ dont le nombre p soit différent de n. Cherchons le déterminant du système $f_1, f_2, \ldots, f_n$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ dépendent par hypothèse. Si nous attribuons à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n systèmes d'accroissements infiniment petits

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} d_1 x_1, & d_1 x_2, \ldots, & d_1 x_n, \\ d_2 x_1, & d_2 x_2, \ldots, & d_2 x_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n x_1, & d_n x_2, \ldots, & d_n x_n, \end{array}\right.$$

en désignant les accroissements correspondants des fonctions par

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} d_1 f_1, & d_1 f_2, \ldots, & d_1 f_n, \\ d_2 f_1, & d_2 f_2, \ldots, & d_2 f_n. \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n f_1, & d_n f_2, \ldots, & d_n f_n, \end{array}\right.$$

le déterminant cherché est, par définition, le rapport des déterminants des systèmes (2) et (1), c'est-à-dire

$$\frac{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)}.$$

Or, en remarquant que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont fonctions de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, on a, pour expression du terme général du système (2),

$$d_k f_i = \frac{df_i}{d\varphi_1} d_k \varphi_1 + \frac{df_i}{d\varphi_2} d_k \varphi_2 + \ldots + \frac{df_i}{d\varphi_p} d_k \varphi_p,$$

d'où l'on conclut, en vertu d'une propriété bien connue des déterminants,

$$\begin{aligned}&\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)\\ &= \mathbf{S} \sum\left(\pm \frac{df_1}{d\varphi_{\alpha_1}} \frac{df_1}{d\varphi_{\alpha_2}} \cdots \frac{df_n}{d\varphi_{\alpha_n}}\right) \sum(\pm d_1 \varphi_{\alpha_1}\, d_2 \varphi_{\alpha_2} \ldots d_n \varphi_{\alpha_n}),\end{aligned}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant n indices quelconques, tous différents, pris parmi les nombres $1, 2, \ldots, p$, et le signe $\mathbf{S}$ indiquant que l'on doit faire la somme des résultats correspondants aux divers groupes d'indices; la somme $\mathbf{S}$ se réduisant évidemment à zéro si p est moindre que n.

On déduit de la formule précédente

$$\begin{aligned}&\frac{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)}\\ &= \mathbf{S} \sum\left(\pm \frac{df_1}{d\varphi_{\alpha_1}} \frac{df_2}{d\varphi_{\alpha_2}} \cdots \frac{df_n}{d\varphi_{\alpha_n}}\right) \frac{\sum(\pm d_1 \varphi_{\alpha_1}\, d_2 \varphi_{\alpha_2} \ldots d_n \varphi_{\alpha_n})}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)}.\end{aligned}$$

et si l'on remarque que $\sum\left(\pm \frac{df_1}{d\varphi_{\alpha_1}} \frac{df_2}{d\varphi_{\alpha_2}} \cdots \frac{df_n}{d\varphi_{\alpha_n}}\right)$ est le déterminant du système $f_1, f_2, \ldots, f_n$ lorsque l'on considère ces fonctions comme ne contenant que les variables indépendantes $\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \ldots, \varphi_{\alpha_n}$, on voit, en vertu du théorème relatif au déterminant des fonctions de fonctions, que le second membre exprime la somme des valeurs du déterminant du système $f_1, f_2, \ldots, f_n$, en y considérant successivement comme seules variables les fonctions dont les indices forment les groupes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Déterminant des fonctions implicites.

Considérons n équations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_n = 0$$

entre n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons que l'on attribue aux variables, n systèmes d'accroissements,

$$\begin{array}{lll} d_1 x_1, & d_1 x_2, \ldots, & d_1 x_n, \\ d_2 x_1, & d_2 x_2, \ldots, & d_2 x_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n x_1, & d_n x_2, \ldots, & d_n x_n; \end{array}$$

soient

$$\begin{array}{lll} d_1 f_1, & d_1 f_2, \ldots, & d_1 f_n, \\ d_2 f_1, & d_2 f_2, \ldots, & d_2 f_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n f_1, & d_n f_2, \ldots, & d_n f_n, \end{array}$$

les accroissements correspondants de $f_1, f_2, \ldots, f_n$: les fonctions F_1, $F_2, \ldots, F_n$ devant rester constamment nulles, on peut égaler leurs accroissements à zéro. On en conclut

$$\begin{aligned} &\frac{dF_k}{dx_1} d_i x_1 + \frac{dF_k}{dx_2} d_i x_2 + \ldots + \frac{dF_k}{dx_n} d_i x_n \\ &= -\left(\frac{dF_k}{df_1} d_i f_1 + \frac{dF_k}{df_2} d_i f_2 + \ldots + \frac{dF_k}{df_n} d_i f_n\right), \end{aligned}$$

équation que nous écrirons plus simplement

$$(1) \qquad d_{i,x} F_k = - d_{i,f} F_k.$$

Cela posé, le déterminant du système $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est, par définition,

$$\frac{\sum (\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum (\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)},$$

et il peut évidemment s'écrire

$$(2)\qquad (-1)^n \frac{\sum(\pm d_{1x} F_1\, d_{2x} F_2 \ldots d_{nx} F_n)}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)} : \frac{\sum(\pm d_{1f} F_1\, d_{2f} F_2 \ldots d_{nf} F_n)}{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)};$$

car, par cette transformation, nous introduisons, en numérateur et en dénominateur, deux expressions

$$(-1)^n \sum \pm d_{1x} F_1\, d_{2x} F_2 \ldots d_{nx} F_n \quad \text{et} \quad \sum \pm d_{1f} F_1\, d_{2f} F_2 \ldots d_{nf} F_n,$$

qui, en vertu de l'équation (1), sont identiquement les mêmes.

En se rappelant la formule trouvée pour le déterminant d'un système de fonctions de fonctions, on verra que l'équation (2) est l'expression du théorème suivant :

Le déterminant d'un système de fonctions implicites $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fournis par n équations, s'obtient en multipliant par $(-1)^n$ le quotient de la division du déterminant des premiers membres de ces équations considérés comme ne renfermant que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par le déterminant des mêmes premiers membres considérés comme ne renfermant que les variables $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Diverses formes que l'on peut donner à un déterminant.

En faisant varier les systèmes d'accroissements attribués aux variables, on peut mettre l'expression du déterminant d'un système de fonctions sous un grand nombre de formes distinctes.

1°. Supposons que, dans chaque système, toutes les variables, excepté une, aient des accroissements égaux à zéro, en sorte que ces divers accroissements soient représentés par le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
d_1 x_1, & 0, & 0, & 0,\ldots, & 0,\\
0, & d_2 x_2, & 0, & 0,\ldots, & 0,\\
0, & 0, & d_3 x_3, & 0,\ldots, & 0,\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0, & 0, & 0, & 0,\ldots, & d_n x_n;
\end{array}$$

les accroissements correspondants des fonctions sont évidemment

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{df_1}{dx_1}\,d_1\,x_1, & \dfrac{df_2}{dx_1}\,d_1\,x_1,\ldots, & & \dfrac{df_n}{dx_1}\,d_1\,x_1,\\[2mm]
\dfrac{df_1}{dx_2}\,d_2\,x_2, & \dfrac{df_2}{dx_2}\,d_2\,x_2,\ldots, & & \dfrac{df_n}{dx_2}\,d_2\,x_2,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\dfrac{df_1}{dx_n}\,d_n\,x_n, & \dfrac{df_2}{dx_n}\,d_n\,x_n,\ldots, & & \dfrac{df_n}{dx_n}\,d_n\,x_n;
\end{array}$$

le rapport des deux déterminants est évidemment

$$\sum \pm \frac{df_1}{dx_1}\frac{df_2}{dx_2}\cdots\frac{df_n}{dx_n}.$$

C'est l'expression donnée comme définition par M. Jacobi.

2°. Parmi les $2n$ variables $x_1, x_2,\ldots, x_n, f_1, f_2,\ldots, f_n$, on peut en choisir n à volonté; les autres sont alors déterminées. Il en résulte évidemment que, si l'on suppose que $n-1$ d'entre elles restent invariables, toutes les autres devront changer à la fois, et les rapports de leurs accroissements seront déterminés. D'après cette remarque, les accroissements des variables et les accroissements correspondants des fonctions peuvent être représentés par le tableau suivant :

$$\begin{array}{llllllllll}
d_1x_1, & d_1x_2, & & d_1x_n, & d_1f_1, & 0, & 0, & 0,\ldots, & 0,\\
0, & d_2x_2, & & d_2x_n, & d_2f_1, & d_2f_2, & 0, & 0,\ldots, & 0.\\
0, & 0, & d_3x_3,\ldots, & d_3x_n, & d_3f_1, & d_3f_2, & d_3f_3, & 0,\ldots, & 0.\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0, & 0, & 0,\ldots, & d_nx_n, & d_nf_1, & d_nf_2, & & & d_nf_n.
\end{array}$$

Or le rapport des déterminants de ces deux systèmes est évidemment

$$\frac{d_1f_1\, d_2f_2\ldots d_nf_n}{d_1x_1\, d_2x_2\ldots d_nx_n},$$

que l'on peut écrire

$$\left(\frac{d_1f_1}{d_1x_1}\right)\left(\frac{d_2f_2}{d_2x_2}\right)\cdots\left(\frac{d_nf_n}{d_nx_n}\right).$$

d_1f_1 est l'accroissement de f_1 lorsque $f_2, f_3,\ldots, f_n$ subissent des accroissements nuls, et $\frac{d_1 f_1}{d_1 x_1}$ est, par conséquent, la dérivée partielle par rapport à x_1 de f_1 considéré comme fonction de $x_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$. $d_2 f_2$ est l'accroissement de f_2 lorsque $x_1, f_3, f_4, \ldots, f_n$ reçoivent des accroissements, $\frac{d_2 f_2}{d_2 x_2}$ est, par conséquent, la dérivée partielle par rapport à x_2 de f_2 considéré comme fonction de x_1, $x_2, f_3, \ldots, f_n$, et ainsi de suite. Cette expression du déterminant sous forme de produit a été donnée par M. Jacobi. Elle est d'un emploi fort commode.

3°. En remarquant, comme précédemment, que l'on peut supposer nuls $n-1$ des accroissements $d_i x_1$, $d_i x_2, \ldots, d_i x_n$; $d_i f_1$, $d_i f_2, \ldots$, $d_i f_n$, on verra que les accroissements des variables et ceux des fonctions peuvent être représentés par le tableau suivant, dans lequel m désigne un nombre entier quelconque :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
d_1 x_1, & 0, & 0, \ldots, & 0, & d_1 x_{m+1}, & d_1 x_{m+2}, \ldots, & d_1 x_n, & d_1 f_1, & d_1 f_2, \ldots, & d_1 f_m, & 0, \ldots, & 0. \\
0, & d_2 x_2, & 0, \ldots, & 0, & d_2 x_{m+1}, & d_2 x_{m+2}, \ldots, & d_2 x_n, & d_2 f_1, & d_2 f_2, \ldots, & d_2 f_m, & 0, \ldots, & 0, \\
0, & 0, & d_3 x_3, \ldots, & 0, & d_3 x_{m+1}, & d_3 x_{m+2}, \ldots, & d_3 x_n, & d_3 f_1, & d_3 f_2, \ldots, & d_3 f_m, & 0, \ldots, & 0. \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0, & 0, & 0, \ldots, & d_m x_m, & d_m x_{m+1}, & d_m x_{m+2}, \ldots, & d_m x_n, & d_m f_1, & d_m f_2, \ldots, & d_m f_m, & 0, \ldots, & 0. \\
0, & 0, & 0, \ldots, & 0, & d_{m+1} x_{m+1}, & 0, \ldots, & 0, & d_{m+1} f_1, & d_{m+1} f_2, \ldots, & d_{m+1} f_m, & d_{m+1} f_{m+1}, \ldots, & d_{m+1} \\
0, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0, & d_{m+2} x_{m+2}, \ldots, & 0, & d_{m+2} f_1, & d_{m+2} f_2, \ldots, & d_{m+2} f_m, & d_{m+2} f_{m+1}, \ldots, & d_{m+2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0, & 0. & 0, \ldots, & 0, & 0, & 0, \ldots, & d_n x_n, & d_n f_1, & d_n f_2, \ldots, & d_n f_m, & d_n f_{m+1}, \ldots, & d_n f_n
\end{array}$$

Le déterminant du système d'accroissements des variables est alors $d_1 x_1\ d_2 x_2 \ldots d_n x_n$, celui du système d'accroissements des fonctions est le produit de deux déterminants

$$\sum (\pm\, d_1 f_1\ d_2 f_2 \ldots d_m f_m) \sum (\pm\, d_{m+1} f_{m+1}\ d_{m+2} f_{m+2} \ldots d_n f_n);$$

et le rapport de ces deux déterminants peut s'écrire

$$\sum \pm \left[\left(\frac{d_1 f_1}{d_1 x_1}\right)\left(\frac{d_2 f_2}{d_2 x_2}\right)\cdots\left(\frac{d_m f_m}{d_m x_m}\right)\right] \sum \left[\pm \left(\frac{d f_{m+1}}{d_{m+1} x_{m+1}}\right)\left(\frac{d f_{m+2}}{d_{m+2} x_{m+2}}\right)\cdots\left(\frac{d f_n}{d_n x_n}\right)\right].$$

En consultant le tableau des accroissements des variables, on verra facilement que les dérivées $\frac{df_1}{dx_1}, \frac{df_2}{dx_2}, \ldots, \frac{df_m}{dx_m}$, qui figurent dans le premier facteur de ce produit, sont prises en considérant $f_1, f_2, \ldots, f_m$ comme fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m; f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n$, et que, dans le second facteur, les dérivées $\frac{df_{m+1}}{dx_{m+1}}, \frac{df_{m+2}}{dx_{m+2}}$, etc., sont prises, en regardant $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots$, comme des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si, dans la formule générale, on suppose $m = 1$, on obtient, pour le déterminant, la forme suivante, qui est fréquemment employée.

$$\frac{df_1}{dx_1} \sum \left(\pm \frac{df_2}{dx_2} \frac{df_3}{dx_3} \cdots \frac{df_n}{dx_n} \right),$$

$\frac{df_1}{dx_1}$ étant la dérivée partielle de f_1 considérée comme fonction de x_1, $f_2, \ldots, f_n$.

Transformation qui n'altère pas le déterminant.

Considérons un système de n fonctions

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_n. \end{array} \right.$$

Si l'on se sert de ces diverses équations pour transformer une ou plusieurs des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ en les exprimant en fonction de x_1, $x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et que l'on obtienne ainsi

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_n, \end{array} \right.$$

M. Jacobi avait admis, dans son Mémoire sur les déterminants, que le déterminant des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ est le même que celui de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, lors même qu'on y considère $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ comme des constantes. Il a remarqué depuis que cet énoncé n'est pas exact, en général, mais sans indiquer la relation qui existe entre les déterminants dans le cas où ils ne sont pas égaux entre eux. La recherche de cette relation est, d'ailleurs, extrêmement facile. Le système des équations (2) peut, en effet, être considéré comme fournissant les expressions de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en fonction implicite de $x_1, x_2, \ldots, x_n$: on peut donc, pour calculer le déterminant de ce système de fonctions, faire usage de la formule donnée plus haut pour exprimer le déterminant d'un système de fonctions implicites; on aura

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & \sum\left(\pm \frac{d\lambda_1}{dx_1}\frac{d\lambda_2}{dx_2}\cdots\frac{d\lambda_n}{dx_n}\right) \\ & = (-1)^n \frac{\sum\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dx_2}\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)}{\sum\left[\pm\left(\frac{d\varphi_1}{d\lambda_1}-1\right)\left(\frac{d\varphi_2}{d\lambda_2}-1\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{d\lambda_n}-1\right)\right]}, \end{aligned} \right.$$

le dénominateur du second membre exprimant le déterminant du système

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{llll} \frac{d\varphi_1}{d\lambda_1}-1, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_2}, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_3},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_n}, \\ \frac{d\varphi_2}{d\lambda_1}, & \frac{d\varphi_2}{d\lambda_2}-1, & \frac{d\varphi_2}{d\lambda_3},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{d\lambda_n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\varphi_n}{d\lambda_1}, & \frac{d\varphi_n}{d\lambda_2}, & \frac{d\varphi_n}{d\lambda_3},\ldots, & \frac{d\varphi_n}{d\lambda_n}-1. \end{array} \right.$$

Or ce déterminant est, en général, très-différent de $(-1)^n$, et, par suite, les systèmes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n'ont pas le même déterminant. Il existe cependant un cas très-général dans lequel le déterminant du système (4) est $(-1)^n$, c'est celui où φ_1 ne contient pas λ_1, φ_2 ne contient ni λ_1 ni λ_2, φ_3 ni λ_1, ni λ_2, ni λ_3, etc.; dans ce cas, en effet, le système (4) se réduit à

$$\begin{array}{llll} -1, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_2}, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_3},\ldots, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_n}, \\ 0, & -1, & \frac{d\varphi_2}{d\lambda_3},\ldots, & \frac{d\varphi_2}{d\lambda_n}, \\ 0, & 0, & -1,\ldots, & \frac{d\varphi_3}{d\lambda_n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0,\ldots, & \frac{d\varphi_n}{d\lambda_n}, \end{array}$$

qui a évidemment pour déterminant $(-1)^n$. L'équation (3) devient alors

$$\sum\left(\pm\frac{d\lambda_1}{dx_1}\frac{d\lambda_2}{dx_2}\cdots\frac{d\lambda_n}{dx_n}\right)=\sum\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right).$$

Changement de variables dans les intégrales multiples.

Considérons d'abord une intégrale double

$$\int\int \mathrm{V}\,dx\,dy,$$

V désignant une fonction quelconque des deux variables x et y. On peut considérer cette intégrale comme la somme des produits obtenus en multipliant par V chaque élément infiniment petit de la surface plane dans l'intérieur de laquelle se fait l'intégration. Peu importe évidemment la forme de ces éléments. Nous pouvons donc supposer que ce soient des triangles. Soient

$$x,\quad y,\quad x+d_1x,\quad y+d_1y,\quad x+d_2x,\quad y+d_2y$$

les coordonnées des trois sommets de l'un d'eux; sa surface sera, comme on sait, la moitié du déterminant du système

$$\begin{matrix} d_1x, & d_1y, \\ d_2x, & d_2y, \end{matrix}$$

et l'on peut considérer, par conséquent, l'intégrale comme la somme

$$\int\frac{\mathrm{V}}{2}\,\text{dét.}\begin{cases} d_1x, & d_1y, \\ d_2x, & d_2y. \end{cases}$$

Mais si u et v désignent deux fonctions de x et y et Δ leur déterminant, on a, d'après ce qui précède,

$$\Delta=\frac{\text{dét.}\begin{cases} d_1u, & d_1v \\ d_2u, & d_2v \end{cases}}{\text{dét.}\begin{cases} d_1x, & d_1y \\ d_2x, & d_2y \end{cases}},$$

en sorte que l'intégrale précédente est identiquement égale à

$$\int \frac{V}{2\Delta} \text{dét.} \begin{cases} d_1 u, & d_1 v, \\ d_2 u, & d_2 v, \end{cases}$$

c'est-à-dire évidemment à l'intégrale double

$$\int\int \frac{V}{\Delta} du\, dv$$

étendue à toutes les valeurs de u et de v qui correspondent à celles de x et de y comprises dans les limites de l'intégration proposée.

Considérons maintenant l'intégrale triple

$$\int\int\int V\, dx\, dy\, dz,$$

V désignant une fonction quelconque de x, y, z. On peut considérer cette intégrale comme la somme des produits obtenus en multipliant chaque élément infiniment petit du volume dans l'intérieur duquel se fait l'intégration par la valeur correspondante de la fonction V. Peu importe évidemment la forme de ce volume élémentaire, et nous pouvons, par conséquent, supposer que ce soit une pyramide. En désignant par

$$\begin{gathered} x, \quad y, \quad z, \quad x + d_1 x, \quad y + d_1 y, \quad z + d_1 z, \\ x + d_2 x, \quad y + d_2 y, \quad z + d_2 z, \quad x + d_3 x, \quad y + d_3 y, \quad z + d_3 z \end{gathered}$$

les coordonnées des sommets de cette pyramide, son volume est, comme on s'en assure facilement,

$$\frac{1}{6} \text{dét.} \begin{cases} d_1 x, & d_1 y, & d_1 z, \\ d_2 x, & d_2 y, & d_2 z, \\ d_3 x, & d_3 y, & d_3 z, \end{cases}$$

et l'intégrale triple est, par suite, égale à

$$\int \frac{V}{6} \text{dét.} \begin{cases} d_1 x, & d_1 y, & d_1 z, \\ d_2 x, & d_2 y, & d_2 z, \\ d_3 x, & d_3 y, & d_3 z, \end{cases}$$

la somme s'étendant à toutes les pyramides élémentaires.

Or, en désignant par u, v, w trois fonctions de x, y, z, et par Δ leur déterminant, Δ est égal à

$$\frac{\text{dét.}\begin{cases} d_1 u, & d_1 v, & d_1 w \\ d_2 u, & d_2 v, & d_2 w \\ d_3 u, & d_3 v, & d_3 w \end{cases}}{\text{dét.}\begin{cases} d_1 x, & d_1 y, & d_1 z \\ d_2 x, & d_2 y, & d_2 z \\ d_3 x, & d_3 y, & d_3 z \end{cases}},$$

d'où il résulte que l'intégrale proposée peut s'écrire

$$\int \frac{\mathrm{V}}{6\Delta}\,\text{dét.}\begin{cases} d_1 u, & d_1 v, & d_1 w, \\ d_2 u, & d_2 v, & d_2 w, \\ d_3 u, & d_3 v, & d_3 w, \end{cases}$$

ce qui représente évidemment l'intégrale triple

$$\int\!\!\int\!\!\int \frac{\mathrm{V}}{\Delta}\, du\, dv\, dw.$$

Le même procédé de démonstration pourrait s'étendre au cas d'un plus grand nombre de variables; mais il faudrait pour cela recourir à une sorte de géométrie idéale qui n'a pas un rapport direct avec la théorie des déterminants.