JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. PUISEUX

Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^re série, tome 16 (1851), p. 208-211.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__208_0>

Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville);

PAR M. V. PUISEUX.

Dans une des Notes dont vous avez enrichi l'ouvrage de Monge, vous me faites l'honneur d'insérer la solution que j'ai donnée autrefois (*Journal de Mathématiques*, tome VII, page 65) de ce problème : *Trouver la ligne dont les deux courbures sont constantes*. J'avais prouvé que l'hélice tracée sur un cylindre de révolution est la seule courbe qui réponde à la question : vous faites observer que ce résultat est compris, comme cas particulier, dans un théorème qu'a donné depuis M. Bertrand, savoir, que l'hélice tracée sur un cylindre quelconque est la seule ligne pour laquelle le rapport des deux courbures soit constant. Vous ajoutez que ma méthode ne paraît pas se prêter à la démonstration de cette proposition; mais en cherchant à l'y appliquer, j'ai trouvé, pour établir le théorème de M. Bertrand, une analyse semblable à celle que j'avais employée dans le premier problème. Les trois coordonnées y sont traitées symétriquement, ce qui la distingue des formules, fort utiles d'ailleurs, dont M. Serret s'est servi pour traiter la même question. Voici cette démonstration :

Soient x, y, z les trois coordonnées rectangulaires d'un point d'une courbe, s l'arc qui aboutit à ce point et que je prends pour variable indépendante, ρ et r les deux rayons de courbure. Je fais, pour abréger,

$$(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 = 2p,$$

d'où

$$d^2x\,d^3x + d^2y\,d^3y + d^2z\,d^3z = dp,$$

et aussi

$$\begin{aligned} d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y &= l,\\ d^2z\,d^3x - d^2z\,d^3z &= m,\\ d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x &= n, \end{aligned}$$

d'où

$$dl = d^2y\,d^4z - d^2z\,d^4y,$$
$$dm = d^2z\,d^4x - d^2x\,d^4z,$$
$$dn = d^2x\,d^4y - d^2y\,d^4x.$$

Soit, de plus,

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = q,$$

d'où l'on conclut

$$dq = dl\,dx + dm\,dy + dn\,dz,$$

en observant que la somme

$$l\,d^2x + m\,d^2y + n\,d^2z$$

est identiquement nulle. On aura, en vertu des formules connues,

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{2p}}, \quad r = \frac{2p\,ds^2}{q},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\rho}{r} = \frac{q}{2p\sqrt{2p}}.$$

Cela posé, il s'agit de trouver la courbe pour laquelle le rapport $\frac{\rho}{r}$ est constant; on doit donc avoir

$$d \cdot \frac{q}{p\sqrt{p}} = 0,$$

ou bien

$$2p\,dq - 3q\,dp = 0.$$

Or, ds étant supposé constant, si l'on différentie trois fois de suite l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

on trouvera

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = 0,$$
$$dx\,d^3x + dy\,d^3y + dz\,d^3z = -2p,$$
$$dx\,d^4x + dy\,d^4y + dz\,d^4z = -3dp.$$

De ces trois équations on déduit, en éliminant alternativement deux des trois différentielles dx, dy, dz,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,dx &= 2p\,dl - 3l\,dp, \\ \mathrm{D}\,dy &= 2p\,dm - 3m\,dp, \\ \mathrm{D}\,dz &= 2p\,dn - 3n\,dp, \end{aligned}$$

où D désigne le déterminant formé avec le système des neuf quantités

$$\begin{matrix} d^2x, & d^2y, & d^2z, \\ d^3x, & d^3y, & d^3z, \\ d^4x, & d^4y, & d^4z. \end{matrix}$$

J'ajoute ces trois formules après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz; il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,ds^2 &= 2p(dl\,dx + dm\,dy + dn\,dz) - 3dp(l\,dx + m\,dy + n\,dz) \\ &= 2p\,dq - 3q\,dp: \end{aligned}$$

on a donc, pour la ligne cherchée,

$$\mathrm{D} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$dl\,d^3x + dm\,d^3y + dn\,d^3z = 0;$$

comme d'ailleurs on a identiquement

$$dl\,d^2x + dm\,d^2y + dn\,d^2z = 0,$$

on conclut de ces deux équations,

$$\frac{dl}{d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y} = \frac{dm}{d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z} = \frac{dn}{d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x},$$

ou bien

$$\frac{dl}{l} = \frac{dm}{m} = \frac{dn}{n},$$

par où l'on voit que les quantités l, m, n ont entre elles des rapports constants. Soient donc

$$l = ah, \quad m = bh, \quad n = ch,$$

a, b, c désignant trois constantes : l'équation identique

$$l\,d^2x + m\,d^2y + n\,d^2z = 0$$

nous donnera

$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = k\,ds,$$

k étant une nouvelle constante. Cette dernière équation signifie que les tangentes à la courbe cherchée font un angle constant avec une droite fixe L, savoir celle qui fait avec les axes coordonnés des angles ayant pour cosinus

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}:$$

cette courbe est donc bien une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite L.

On aurait abrégé la fin de la démonstration en s'appuyant sur un théorème connu, qu'on peut énoncer de cette manière :

Les lettres $t, u, v, \ldots, w$ désignant n variables, si le déterminant du système des n^2 quantités

$$\begin{array}{llll}
t, & u, & v,\ldots, & w, \\
dt, & du, & dv,\ldots, & dw, \\
d^2t, & d^2u, & d^2v,\ldots, & d^2w, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
d^{n-1}t, & d^{n-1}u, & d^{n-1}v,\ldots, & d^{n-1}w,
\end{array}$$

est égal à zéro, on a nécessairement l'équation

$$at + bu + cv + \ldots + gw = 0,$$

où $a, b, c, \ldots, g$ sont des constantes.

En vertu de ce théorème, de l'équation

$$D = 0$$

trouvée plus haut, on conclut sur-le-champ

$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = 0$$