JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Sur quelques propriétés des intégrales définies, déduites de la méthode des coordonnées elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 1-5.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__1_0>

JOURNAL

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES DÉFINIES, DÉDUITES DE LA MÉTHODE DES COORDONNÉES ELLIPTIQUES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

On sait que la méthode employée ordinairement pour obtenir la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

consiste à transformer l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

en faisant

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega,$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega,$$

d'où l'on déduit

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{1}{4}\pi.$$

ou

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Maintenant, supposons qu'au lieu de transformer x et y dans les coordonnées polaires, on fasse usage des coordonnées elliptiques, c'est-à-dire des variables μ et ν, données par les équations suivantes :

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} = 1,$$

b étant une quantité constante. Cela nous donne, comme on sait,

$$x^2 + y^2 = \mu^2 + \nu^2 - b^2$$

et

$$dx\,dy = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}},$$

en sorte qu'on a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_b^\infty \int_0^b \frac{e^{-(\mu^2+\nu^2-b^2)}(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}},$$

ce qui donne, en écrivant la lettre u au lieu de μ et ν,

$$\frac{1}{4}\pi e^{-b^2} = \int_b^\infty \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{u^2-b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{b^2-u^2}} - \int_b^\infty \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{u^2-b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{b^2-u^2}}.$$

Faisons dans cette formule $b = 1$, et transformons les intégrales

$$\int_1^\infty \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{u^2-1}}, \quad \int_1^\infty \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{u^2-1}},$$

en posant

$$v = \sqrt{u^2 - 1}:$$

transformons aussi les intégrales

$$\int_0^1 \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \int_0^1 \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{1-u^2}},$$

en faisant

$$u = \sqrt{v},$$

et nous aurons

$$\pi = \int_0^\infty e^{-v}\sqrt{\frac{1+v}{v}}\,dv . \int_0^1 \frac{e^{-v}\,dv}{\sqrt{v(1-v)}}$$
$$-\int_0^\infty \frac{e^{-v}\,dv}{\sqrt{v(1+v)}} . \int_0^1 e^{-v}\sqrt{\frac{v}{1-v}}\,dv.$$

Il est bon de remarquer que la formule qu'on vient d'obtenir n'est qu'un cas particulier d'un résultat donné par Abel, et qui se trouve dans ses Œuvres, publiées par Holmboë, tome Ier, page 100. Il suffira de faire, dans le théorème d'Abel dont il s'agit,

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a = 1.$$

Voilà donc une nouvelle application des coordonnées elliptiques, et qui sert encore à montrer avec quelle simplicité ce système merveilleux conduit à des résultats qui sont assez difficiles à obtenir par d'autres moyens.

Si notre formule n'a pas le même degré de généralité que celle d'Abel, on ne doit pas oublier, d'autre part, que la méthode que nous avons employée jouit de l'avantage de s'étendre à des cas entièrement nouveaux, en considérant les coordonnées elliptiques à trois dimensions, et les transformations analytiques analogues qui répondent à un nombre quelconque de variables.

En effet, transformons l'intégrale définie triple

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz,$$

en employant les variables ρ, μ, ν données par les équations suivantes :

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

b et c étant des quantités constantes. On aura donc

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2,$$

$$dx\,dy\,dz = \frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}\,d\rho\,d\mu\,d\nu,$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^3 = \frac{1}{8}\pi^{\frac{3}{2}}$$

$$= \int_c^\infty \int_b^c \int_0^b \frac{e^{-(\rho^2+\mu^2+\nu^2-b^2-c^2)}(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}\,d\rho\,d\mu\,d\nu.$$

Développant cette expression et écrivant la lettre u au lieu des trois lettres ρ, μ, ν, nous trouverons la formule suivante :

$$\frac{1}{8}\pi^{\frac{3}{2}} e^{-(b^2+c^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_c^\infty \frac{e^{-u^2}u^4\,du}{\sqrt{(u^2-b^2)(u^2-c^2)}} \cdot \int_b^c \frac{e^{-u^2}u^2\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(u^2-b^2)}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(b^2-u^2)}} \\
&- \int_c^\infty \frac{e^{-u^2}u^2\,du}{\sqrt{(u^2-b^2)(u^2-c^2)}} \cdot \int_b^c \frac{e^{-u^2}u^4\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(u^2-b^2)}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(b^2-u^2)}} \\
&+ \int_c^\infty \frac{e^{-u^2}u^2\,du}{\sqrt{(u^2-b^2)(u^2-c^2)}} \cdot \int_b^c \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(u^2-b^2)}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2}u^4\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(b^2-u^2)}} \\
&- \int_c^\infty \frac{e^{-u^2}u^4\,du}{\sqrt{(u^2-b^2)(u^2-c^2)}} \cdot \int_b^c \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(u^2-b^2)}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2}u^2\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(b^2-u^2)}} \\
&+ \int_c^\infty \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{(u^2-b^2)(u^2-c^2)}} \cdot \int_b^c \frac{e^{-u^2}u^4\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(u^2-b^2)}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2}u^2\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(b^2-u^2)}} \\
&- \int_c^\infty \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{(u^2-b^2)(u^2-c^2)}} \cdot \int_b^c \frac{e^{-u^2}u^2\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(u^2-b^2)}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2}u^4\,du}{\sqrt{(c^2-u^2)(b^2-u^2)}}.
\end{aligned}$$

Il serait superflu d'insister sur la relation qui existe entre cette formule, qui me semble assez curieuse, et la théorie des transcendantes elliptiques et des inverses de ces fonctions. Considérée sous ce rapport, elle peut être présentée sous une forme expressive, que je me dispense de transcrire. Je me contente de l'avoir indiquée.

Quant à la formule générale qui résulte du changement des variables dans l'intégrale définie multiple

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+z^2+\ldots+t^2)}\, dx\, dy\, dz \ldots dt,$$

par des substitutions analogues à celles que nous venons d'employer, il suffira de rappeler à l'attention de nos lecteurs les divers Mémoires publiés dans le Journal de M. Crelle par MM. Jacobi et Hœdenkamp, et par d'autres géomètres qui ont traité le sujet de ces transformations, ainsi que les travaux récents de M. Liouville, qui ont paru dans son Journal. On y trouvera tous les détails nécessaires pour obtenir la formule dont il s'agit.

Dublin, le 29 Janvier 1851.