JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 193-207.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__193_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR QUELQUES FORMULES
RELATIVES
A LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. J.-A. SERRET.

Quelques-uns des résultats contenus dans l'article qu'on va lire font partie d'une Lettre que j'ai écrite, il y a près de deux ans, à M. Liouville, et qu'il m'a fait l'honneur d'insérer dans une des Notes qu'il vient de publier avec la cinquième édition du chef-d'œuvre de Monge, l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*.

I.

Considérons une courbe à double courbure rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires. Soient M un point de cette courbe; MT la tangente en M; MN la normale *principale*, c'est-à-dire celle qui est située dans le plan osculateur et avec laquelle coïncide le rayon de courbure; ML l'axe du plan osculateur. Je désignerai par α, β, γ; ξ, υ, ζ; λ, μ, ν les angles formés avec les axes coordonnés par les droites MT, MN, ML respectivement; par ds la différentielle de l'arc terminé en M; par $d\varepsilon$ et $d\eta$ les angles de contingence et de torsion; enfin, par ρ et r les rayons de courbure et de torsion, lesquels ont pour valeurs, comme on sait,

$$(1) \qquad \rho = \frac{ds}{d\varepsilon}, \quad r = \frac{ds}{d\eta}.$$

Je me propose d'indiquer ici quelques formules par lesquelles on simplifie considérablement la solution de diverses questions relatives à la théorie des courbes. Ces formules permettent d'exprimer les différentielles des divers ordres des cosinus des trois angles α, ξ, λ, ou β, υ, μ, ou γ, ζ, ν, par des fonctions linéaires de ces mêmes cosinus dont les coefficients ne contiennent que ds, r, ρ et leurs différentielles. Je donnerai ensuite quelques exemples qui suffiront pour montrer quel parti on peut tirer de ces formules.

Rappelons d'abord les formules connues

$$(2)\quad \begin{cases} d\varepsilon = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos 6)^2 + (d\cos\gamma)^2}, \\ d\eta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}, \end{cases}$$

et

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\xi = \dfrac{d\cos\alpha}{d\varepsilon} = \rho\,\dfrac{d\cos\alpha}{ds}, \\ \cos\upsilon = \dfrac{d\cos 6}{d\varepsilon} = \rho\,\dfrac{d\cos 6}{ds}, \\ \cos\zeta = \dfrac{d\cos\gamma}{d\varepsilon} = \rho\,\dfrac{d\cos\gamma}{ds}; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(4)\quad \begin{cases} d\cos\alpha = \cos\xi\,\dfrac{ds}{\rho}, \\ d\cos 6 = \cos\upsilon\,\dfrac{ds}{\rho}, \\ d\cos\gamma = \cos\zeta\,\dfrac{ds}{\rho}. \end{cases}$$

II.

En vertu des équations (3), les équations

$$\cos\alpha\cos\xi + \cos 6\cos\upsilon + \cos\gamma\cos\zeta = 0,$$
$$\cos\lambda\cos\xi + \cos\mu\cos\upsilon + \cos\nu\cos\zeta = 0,$$

deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} \cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos 6\, d\cos 6 + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0, \\ \cos\lambda\, d\cos\alpha + \cos\mu\, d\cos 6 + \cos\nu\, d\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs, en différentiant les suivantes :

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos 6\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

et ayant égard à la seconde des équations (5), il vient

$$(6)\quad \begin{cases} \cos\alpha\, d\cos\lambda + \cos 6\, d\cos\mu + \cos\gamma\, d\cos\nu = 0, \\ \cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\mu\, d\cos\mu + \cos\nu\, d\cos\nu = 0. \end{cases}$$

On voit que les équations (6) ne diffèrent des équations (5) qu'en ce que $d\cos\alpha$, $d\cos6$, $d\cos\gamma$ y sont remplacées par $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$; d'où l'on conclut que les premières différentielles sont proportionnelles aux dernières : on a donc

$$(7) \qquad \frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\mu}{d\cos6} = \frac{d\cos\nu}{d\cos\gamma} = \frac{d\eta}{d\varepsilon} = \frac{\rho}{r}.$$

Ces équations (7) démontrent le théorème suivant :

Si α et λ désignent les angles formés avec une droite fixe D *par la tangente et par l'axe du plan osculateur en un point* M *d'une courbe à double courbure, le rapport*

$$\frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha}$$

est le même, quelle que soit la droite D, *et sa valeur est égale au rapport de la première courbure à la seconde* [*].

Des équations (4) et (7) on déduit

$$(8) \qquad \begin{cases} d\cos\lambda = \cos\xi\,\dfrac{ds}{r}, \\ d\cos\mu = \cos v\,\dfrac{ds}{r}, \\ d\cos\nu = \cos\zeta\,\dfrac{ds}{r}. \end{cases}$$

---

[*] M. Bertrand, à qui j'avais communiqué ce théorème, l'a proposé comme exercice aux élèves de l'École Normale. L'un d'eux, M. Guiraudet, lui a remis la démonstration géométrique suivante, qui est d'une extrême simplicité :

« La direction qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportion-
» nels à $d\cos\alpha$, $d\cos6$, $d\cos\gamma$, est celle du rayon de courbure. Si l'on mène par
» l'origine deux parallèles aux axes des deux plans osculateurs infiniment voisins, et
» que l'on prenne sur ces parallèles des longueurs OM, OM' égales à l'unité, la ligne MM'
» qui joindra leurs extrémités fera avec les axes des angles dont les cosinus sont pro-
» portionnels à $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$. Ainsi, pour prouver notre théorème, il
» suffit de montrer le parallélisme de ces deux directions. Or cela est évident, car le
» plan parallèle aux axes de deux plans osculateurs voisins est parallèle au plan nor-
» mal de la courbe proposée, et la droite MM' située dans ce plan est évidemment
» perpendiculaire à l'axe du plan osculateur, et, par suite, parallèle au rayon de
» courbure. »

III.

De l'équation

$$\cos^2\xi + \cos^2\alpha + \cos^2\lambda = 1,$$

on tire, en différentiant,

$$d\cos\xi = -\cos\alpha\frac{d\cos\alpha}{\cos\xi} - \cos\lambda\frac{d\cos\lambda}{\cos\xi},$$

et, à cause des équations (4) et (8),

$$\begin{aligned} d\cos\xi &= -(\cos\alpha\, d\varepsilon + \cos\lambda\, d\eta) \\ &= -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\lambda}{\rho}\right) ds; \end{aligned}$$

on a donc les trois nouvelles équations

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} d\cos\xi &= -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\lambda}{r}\right) ds, \\ d\cos\upsilon &= -\left(\frac{\cos6}{\rho} + \frac{\cos\mu}{r}\right) ds, \\ d\cos\zeta &= -\left(\frac{\cos\gamma}{\rho} + \frac{\cos\nu}{r}\right) ds; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$(10)\qquad (d\cos\xi)^2 + (d\cos\upsilon)^2 + (d\cos\zeta)^2 = \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) ds^2.$$

Divisant les équations (9) par ds, différentiant ensuite, et ayant égard aux équations (4) et (8), on obtient les suivantes :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} d\frac{d\cos\xi}{ds} &= -\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\xi\, ds - \left(\cos\alpha\, d\frac{1}{\rho} + \cos\lambda\, d\frac{1}{r}\right), \\ d\frac{d\cos\upsilon}{ds} &= -\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\upsilon\, ds - \left(\cos6\, d\frac{1}{\rho} + \cos\mu\, d\frac{1}{r}\right), \\ d\frac{d\cos\zeta}{ds} &= -\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\zeta\, ds - \left(\cos\gamma\, d\frac{1}{\rho} + \cos\nu\, d\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right.$$

IV.

Des formules qui précèdent, découlent immédiatement deux théorèmes remarquables. Le premier de ces théorèmes, qu'on établit facilement par des considérations géométriques, a été démontré analytiquement par M. Puiseux (*voir* le tome VI de ce Journal). Il consiste en ce que *l'hélice ordinaire est la seule courbe dont les deux courbures sont constantes*. Le second théorème est dû à M. Bertrand, qui l'a démontré géométriquement; il consiste en ce que *les courbes dont les deux courbures ont un rapport constant sont des hélices tracées sur un cylindre à base quelconque*.

Le premier des deux théorèmes dont il vient d'être question résulte immédiatement des équations (11), qui, en faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2},$$

et prenant ds pour la différentielle constante, donnent, si r et ρ sont constants,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\cos\xi}{ds^2} &= -\frac{1}{m^2}\cos\xi, \\ \frac{d^2\cos\upsilon}{ds^2} &= -\frac{1}{m^2}\cos\upsilon, \\ \frac{d^2\cos\zeta}{ds^2} &= -\frac{1}{m^2}\cos\zeta. \end{aligned}\right.$$

En intégrant, on a

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\xi &= \cos a\cos\frac{s}{m} + \cos a'\sin\frac{s}{m}, \\ \cos\upsilon &= \cos b\cos\frac{s}{m} + \cos b'\sin\frac{s}{m}, \\ \cos\zeta &= \cos c\cos\frac{s}{m} + \cos c'\sin\frac{s}{m}; \end{aligned}\right.$$

en désignant par a, b, c; a', b', c' les angles formés avec les axes par deux droites arbitraires D et D' perpendiculaires entre elles. Si x, y, z représentent les coordonnées de la courbe, on a

$$\cos\xi = \rho\frac{d\cos\alpha}{ds} = \rho\frac{d^2x}{ds^2};$$

les équations (13) donnent alors, en intégrant,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \rho\frac{dx}{ds} &= m\left(\cos a \sin\frac{s}{m} - \cos a' \cos\frac{s}{m}\right) + n\cos a'',\\ \rho\frac{dy}{ds} &= m\left(\cos b \sin\frac{s}{m} - \cos b' \cos\frac{s}{m}\right) + n\cos b'',\\ \rho\frac{dz}{ds} &= m\left(\cos c \sin\frac{s}{m} - \cos c' \cos\frac{s}{m}\right) + n\cos c'', \end{aligned}\right.$$

ou n désigne le radical $\sqrt{\rho^2 - m^2}$, et a'', b'', c'' les angles formés avec les axes par une droite D″ perpendiculaire aux droites D et D′. Si l'on fait coïncider les droites rectangulaires D, D′, D″ avec les axes des x, des y et des z, les équations (14) se réduiront à

$$\rho\frac{dx}{ds} = m\sin\frac{s}{m},$$

$$\rho\frac{dy}{ds} = -m\cos\frac{s}{m},$$

$$\rho\frac{dz}{ds} = n;$$

d'où, en intégrant,

$$x - x_0 = -\frac{m^2}{\rho}\cos\frac{s}{m},$$

$$y - y_0 = -\frac{m^2}{\rho}\sin\frac{s}{m},$$

$$z - z_0 = \frac{n}{\rho},$$

ou, en transportant l'origine au point arbitraire (x_0, y_0, z_0) et éliminant s,

$$(15)\qquad x = -\frac{m^2}{\rho}\cos\frac{z}{mn},\quad y = -\frac{m^2}{\rho}\sin\frac{z}{mn}.$$

Ce sont les équations de l'hélice ordinaire.

V.

Le second des deux théorèmes dont il a été question au paragraphe précédent, se démontre très-facilement en faisant usage des équations (7). Nous nous proposons de trouver les courbes dont les deux courbures ont un rapport constant k. On a

$$d\eta = k\,d\varepsilon, \tag{16}$$

et, par suite, en vertu des équations (7),

$$\left\{\begin{aligned} &d\cos\lambda - k\,d\cos\alpha = 0,\\ &d\cos\mu - k\,d\cos 6 = 0,\\ &d\cos\nu - k\,d\cos\gamma = 0;\end{aligned}\right. \tag{17}$$

réciproquement, l'une des équations (17) entraîne l'équation (16). En intégrant, on a

$$\cos\lambda - k\cos\alpha = \text{constante},$$
$$\cos\mu - k\cos 6 = \text{constante},$$
$$\cos\nu - k\cos\gamma = \text{constante};$$

la somme des carrés des premiers membres ayant pour valeur $1 + k^2$. on aura

$$\cos\lambda - k\cos\alpha = \sqrt{1+k^2}\cos\alpha',$$
$$\cos\mu - k\cos 6 = \sqrt{1+k^2}\cos 6',$$
$$\cos\nu - k\cos\gamma = \sqrt{1+k^2}\cos\gamma'.$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\lambda = k\cos\alpha + \sqrt{1+k^2}\cos\alpha',\\ &\cos\mu = k\cos 6 + \sqrt{1+k^2}\cos 6',\\ &\cos\nu = k\cos\gamma + \sqrt{1+k^2}\cos\gamma':\end{aligned}\right. \tag{18}$$

α', $6'$, γ' étant les angles formés avec les axes par une droite arbitraire. Si l'on prend cette droite pour axe des z, les équations (18) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\lambda = k\cos\alpha,\\ &\cos\mu = k\cos 6,\\ &\cos\nu = k\cos\gamma + \sqrt{1+k^2};\end{aligned}\right. \tag{19}$$

élevant au carré ces équations (19) et ajoutant les résultats, on a

$$\cos\gamma = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}, \tag{20}$$

d'où

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}. \tag{21}$$

L'équation (20) montre que la tangente à la courbe considérée fait un angle constant avec l'axe des z; c'est donc une hélice tracée sur le cylindre qui la projette sur le plan des xy.

Il est facile de voir que, réciproquement pour toute hélice, c'est-à-dire pour toute courbe qui satisfait à l'équation (20), l'équation (16) a lieu. En effet, γ étant constant, les équations (3) montrent que $\cos\zeta$ est nul, donc la normale principale est constamment perpendiculaire à l'axe des z : alors l'équation (20) entraîne l'équation (21) à cause de

$$\cos^2\zeta + \cos^2\gamma + \cos^2\nu = 1.$$

D'après cela, on a

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu = \frac{k^2}{1+k^2},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2 6 = \frac{1}{1+k^2},$$

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos 6\cos\mu = \frac{k}{1+k^2}:$$

en ajoutant ces équations, après avoir multiplié la seconde par k^2 et la troisième par $-2k$, il vient

$$(\cos\lambda - k\cos\alpha)^2 + (\cos\mu - k\cos 6)^2 = 0,$$

d'où l'on conclut les équations (19), et, par suite, les équations (17) et (16).

Il est facile d'établir maintenant que la projection sur le plan des xy de la courbe qu'on vient d'étudier, est un cercle si les deux rayons de courbure et de torsion sont eux-mêmes constants, ce qui donnera une nouvelle démonstration du théorème établi au § IV.

En effet, à cause des équations (19), les équations (9) donnent

$$d\cos\xi = -\left(\frac{1}{\rho} + \frac{k}{r}\right)\cos\alpha\, ds = -\frac{r^2+\rho^2}{\rho r^2}\, dx,$$

$$d\cos\upsilon = -\left(\frac{1}{\rho} + \frac{k}{r}\right)\cos 6\, ds = -\frac{r^2+\rho^2}{\rho r^2}\, dy;$$

d'où, en intégrant et désignant par x_0, y_0 deux constantes,

$$x - x_0 = -\frac{\rho r^2}{r^2+\rho^2}\cos\xi,$$

$$y - y_0 = -\frac{\rho r^2}{r^2+\rho^2}\cos\upsilon.$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient, à cause de $\cos\zeta = 0$,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{\rho r^2}{r^2+\rho^2}\right)^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

VI.

L'équation du plan normal en un point M (x, y, z) d'une courbe à double courbure, est

$$(x_1 - x)\cos\alpha + (y_1 - y)\cos 6 + (z_1 - z)\cos\gamma = 0. \tag{22}$$

Différentions cette équation par rapport à la variable indépendante dont x, y, z; α, 6, γ, etc., sont fonctions, on aura

$$(x_1 - x)\, d\cos\alpha + (y_1 - y)\, d\cos 6 + (z_1 - z)\, d\cos\gamma = ds,$$

ou

$$(x_1 - x)\cos\xi + (y_1 - y)\cos\upsilon + (z_1 - z)\cos\zeta = \rho. \tag{23}$$

Le système des équations (22) et (23) appartient à l'intersection du plan normal au point M et du plan normal *infiniment voisin*, ou, si l'on veut, à l'axe du cercle osculateur qu'on nomme aussi *droite polaire*. En différentiant de même l'équation (23), il vient

$$(x_1 - x)\, d\cos\xi + (y_1 - y)\, d\cos\upsilon + (z_1 - z)\, d\cos\zeta = d\rho,$$

car $dx\cos\xi + dy\cos\upsilon + dz\cos\zeta$ est nulle; en faisant usage des équations (9) et ayant égard à l'équation (22), la dernière équation devient

$$(24)\quad (x_1 - x)\cos\lambda + (y_1 - y)\cos\mu + (z_1 - z)\cos\nu = -r\frac{d\rho}{ds}.$$

Le système des équations (22), (23), (24) représente l'intersection de trois plans normaux infiniment voisins, c'est-à-dire le centre de la sphère osculatrice au point M. Si l'on ajoute ces trois équations, après les avoir multipliées respectivement, d'abord par $\cos\alpha$, $\cos\xi$, $\cos\lambda$; puis par $\cos 6$, $\cos\upsilon$, $\cos\mu$; puis enfin par $\cos\gamma$, $\cos\zeta$, $\cos\nu$, il vient

$$(25)\quad \begin{cases} x_1 - x = \rho\cos\xi - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\lambda, \\ y_1 - y = \rho\cos\upsilon - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\mu, \\ z_1 - z = \rho\cos\zeta - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\nu. \end{cases}$$

En élevant les équations (25) au carré, et désignant par R le rayon de la sphère osculatrice, on a

$$(26)\quad R^2 = \rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2}.$$

De là résulte ce théorème :

Si une courbe est tracée sur une sphère, la quantité $\rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2}$ *est constante en chaque point et égale au carré du rayon de la sphère.*

Réciproquement.

Si en chaque point d'une courbe la quantité $\rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2}$ *est constante, la courbe est sphérique, à moins que son rayon de courbure* ρ *ne soit constant.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de différentier les équations (25). On trouve ainsi, en se servant des formules données précédemment,

$$(27)\quad \begin{cases} dx_1 = -\left[\dfrac{\rho}{r}ds + d\left(r\dfrac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\lambda, \\ dy_1 = -\left[\dfrac{\rho}{r}ds + d\left(r\dfrac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\mu, \\ dz_1 = -\left[\dfrac{\rho}{r}ds + d\left(r\dfrac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\nu. \end{cases}$$

Ainsi la condition pour que le centre de la sphère osculatrice soit le même pour les différents points de la courbe est

$$\frac{\rho}{r}\,ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right) = 0;$$

elle n'est pas satisfaite si $\rho =$ une constante. Elle devient intégrable en la multipliant par $2r\frac{d\rho}{ds}$, et l'on trouve

$$\rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2} = \text{constante},$$

équation qui est satisfaite par $\rho =$ une constante. En excluant ce cas, on voit que si la précédente équation a lieu, les quantités x_1, y_1, z_1, R sont constantes pour tous les points de la courbe proposée; cette dernière est donc tout entière située sur une sphère fixe [*].

Les équations (27) peuvent servir à démontrer ce théorème connu, que *le lieu des centres des sphères osculatrices d'une courbe quel-*

---

[*] M. Bertrand m'a donné de ces résultats une démonstration géométrique fort simple fondée sur des considérations dont il a déjà plusieurs fois fait usage. Je crois devoir la transcrire ici :

« Nommons ρ le rayon de courbure d'une courbe, s' l'arc de la courbe lieu de ses » centres de courbure : le triangle infinitésimal formé par l'arc ds', la normale princi- » pale qui aboutit à l'une de ses extrémités, et la perpendiculaire abaissée sur cette nor- » male par l'autre extrémité de ds', montre que le cosinus de l'angle formé par l'arc s' » avec le rayon ρ est égal à $\frac{d\rho}{ds'}$. Si l'on remarque que le rayon ρ est tangent à la surface » développable lieu des axes de cercles osculateurs sur laquelle est situé l'arc ds', et » qu'il coupe à angle droit la génératrice correspondante, on en conclut que $\frac{d\rho}{ds'}$ est » aussi le sinus de l'angle que ds' forme avec cette génératrice, et que, par suite, $d\rho$ est » la distance de l'une des extrémités de ds' à la génératrice qui passe par l'autre extré- » mité ; mais l'angle de deux génératrices égal à l'angle de deux plans osculateurs de la » courbe proposée, en désignant par ds l'arc infiniment petit de cette courbe et par $\frac{1}{r}$

conque est l'arête de rebroussement de la surface développable lieu des droites polaires ou axes des cercles osculateurs.

S'il s'agit d'une courbe dont le rayon de courbure ρ est constant, mais seulement dans ce cas, les équations (25) se réduisent à

$$x_1 - x = \rho \cos \xi,$$

$$y_1 - y = \rho \cos \upsilon,$$

$$z_1 - z = \rho \cos \zeta;$$

ce qui montre que le centre de la sphère osculatrice coïncide avec le centre de courbure; d'où l'on conclut ce théorème :

Si une courbe à double courbure a son rayon de courbure constant, le lieu des centres de courbure se confond avec l'arête de rebroussement de la surface enveloppe des plans normaux, et réciproquement.

» sa seconde courbure, est mesuré par $\frac{ds}{r}$. Si donc on nomme u la distance de l'arc » ds' à laquelle se coupent les deux axes consécutifs, on aura

$$d\rho = u\frac{ds}{r}, \quad u = r\frac{d\rho}{ds}.$$

» Or, le rayon ρ, la distance u et le rayon R de la sphère osculatrice forment évidem- » ment un triangle rectangle; donc

$$R^2 = \rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2}.$$

» Si l'on porte sur des normales à une courbe une longueur constante, la courbe lieu » de leurs extrémités les coupe toutes à angle droit; si donc R est constant, l'arête de » rebroussement de la surface développable doit, si elle *ne se réduit pas à un point*, » couper à angle droit les normales de la courbe proposée qui passent par les différents » points, ces normales sont donc perpendiculaires à l'axe des cercles osculateurs et » sont, par conséquent, des normales principales; R se confond donc avec ρ, et » l'on a

$$\rho = \text{constante.} \text{ »}$$

VII.

Considérons une courbe située sur une sphère de rayon a et dont le centre est à l'origine des coordonnées; on aura

$$\rho^2 + r^2 \frac{d\rho^2}{ds^2} = a^2, \tag{28}$$

et, comme les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont constamment nulles, les équations (25) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\rho\cos\xi + r\frac{d\rho}{ds}\cos\lambda, \\ y &= -\rho\cos\upsilon + r\frac{d\rho}{ds}\cos\mu, \\ z &= -\rho\cos\zeta + r\frac{d\rho}{ds}\cos\nu. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Il est facile de voir que les courbes sphériques de courbure constante sont des cercles. En effet, si ρ est constant, l'équation (28) montre que l'on a $r = \infty$ ou $\rho = a$. Dans le premier cas, il est évident que la courbe est une circonférence, puisqu'elle est plane. Dans le second cas, où $\rho = a$, les équations (29) donnent

$$x = -a\cos\xi, \quad y = -a\cos\upsilon, \quad z = -a\cos\zeta.$$

D'ailleurs, en prenant l'arc s de la courbe pour variable indépendante, $\cos\xi$, $\cos\upsilon$, $\cos\zeta$ sont proportionnels à d^2x, d^2y, d^2z; on a donc

$$y\,d^2z - z\,d^2y = 0, \quad z\,d^2x - x\,d^2z = 0, \quad x\,d^2y - y\,d^2x = 0.$$

Intégrant et désignant par A, B, C des constantes, il vient

$$y\,dz - z\,dy = \mathrm{A}\,ds, \quad z\,dx - x\,dz = \mathrm{B}\,ds, \quad x\,dy - y\,dx = \mathrm{C}\,ds;$$

enfin, en ajoutant ces équations respectivement multipliées par x, y, z, il vient

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0,$$

qui est l'équation du plan d'un grand cercle.

La recherche des courbes sphériques dont le rayon de torsion r est constant, présente de plus grandes difficultés. Je me bornerai à montrer que ce problème dépend de l'intégration d'une seule équation différentielle du deuxième ordre.

Si r est constant, l'équation (28) s'intègre, et donne

$$\rho = a \sin \frac{s - s_0}{r},$$

ou simplement,

$$\rho = a \sin \frac{s}{r},$$

puisque l'origine des arcs s est arbitraire. On déduit de là

$$r \frac{d\rho}{ds} = a \cos \frac{s}{r},$$

et les équations (29) donnent

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos \frac{s}{r} \cos \lambda - r \sin \frac{s}{r} \frac{d \cos \lambda}{ds}, \\ \frac{y}{a} &= \cos \frac{s}{r} \cos \mu - r \sin \frac{s}{r} \frac{d \cos \mu}{ds}, \\ \frac{z}{a} &= \cos \frac{s}{r} \cos \nu - r \sin \frac{s}{r} \frac{d \cos \nu}{ds}. \end{aligned} \right.$$

Le problème est ainsi ramené à exprimer $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ en fonction de s, car les équations (30) permettront ensuite d'exprimer x, y, z en fonction de cette variable.

La première des équations (9), savoir,

$$d \cos \xi = - \left(\frac{\cos \alpha}{\rho} + \frac{\cos \lambda}{r} \right) ds,$$

donne, à cause de

$$\cos \xi = r \frac{d \cos \lambda}{ds} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \xi},$$

et en prenant toujours s pour variable indépendante,

$$r^2 \frac{d^2 \cos \lambda}{ds^2} + \cos \lambda + \frac{r}{\rho} \sqrt{1 - \cos^2 \lambda - r^2 \left(\frac{d \cos \lambda}{ds} \right)^2} = 0,$$

ou, en remplaçant ρ par sa valeur $a \sin \frac{s}{r}$,

$$a \sin \frac{s}{r}\left(r^2 \frac{d^2 \cos\lambda}{ds^2} + \cos\lambda\right) + r\sqrt{1 - \cos^2\lambda - r^2\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2} = 0.$$

On peut prendre pour unité le rayon r de torsion, et l'on voit alors que l'équation différentielle du deuxième ordre

$$(31) \qquad a \sin s\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \varphi\right) + \sqrt{1 - \varphi^2 - \frac{d\varphi^2}{ds^2}} = 0$$

est satisfaite par $\varphi = \cos\lambda$, $= \cos\mu$, $= \cos\nu$.

En combinant l'équation (31) avec celle qu'on en déduit par la différentiation, on obtient une équation linéaire du troisième ordre. Je suis parvenu depuis longtemps à intégrer cette équation; mais le résultat que j'ai obtenu est trop compliqué pour offrir quelque intérêt.