JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Note sur quelques points de la théorie des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 191-192.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__191_0>

Note sur quelques points de la théorie des surfaces;

PAR M. OSSIAN BONNET.

On a donné, comme l'on sait, le nom d'*ombilic* à tout point d'une surface pour lequel les rayons de courbure des sections principales, et, par suite, les rayons de courbure de toutes les sections normales sont égaux entre eux. D'après cela, pour trouver les ombilics, il suffit d'exprimer que l'équation

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned}&(rt-s^2)R^2 - R\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]\\ &\qquad +(1+p^2+q^2)^2=0,\end{aligned}\right.$$

qui donne, en général, les rayons de courbure principaux d'une surface, a ses deux racines égales; on obtient ainsi la condition

$$(1)\qquad [(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]^2 = 4(rt-s^2)(1+p^2+q^2).$$

Cette égalité peut se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left[(1+p^2)t-(1+q^2)r+2pq\left(\frac{pqr}{1+p^2}-s\right)\right]^2\\ &\qquad\qquad +4(1+p^2+q^2)\left(\frac{pqr}{1+p^2}-s\right)^2=0,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(3)\qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2}=\frac{s}{pq},$$

ce qui montre que les ombilics satisfont à deux équations indépendamment de l'équation de la surface, et, par conséquent, que ces points sont, en général, en nombre limité pour une même surface.

Ordinairement on ne parvient à mettre la condition (1) sous la forme (2) que d'une manière assez pénible. Or, sans recourir à une décomposition en deux carrés, on peut démontrer comme il suit que les deux relations (3) sont nécessaires pour l'égalité des racines de l'équation (a).

L'équation (a), en posant $R=\dfrac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{D}$, revient à

$$(b)\qquad [D(1+p^2)-r][D(1+q^2)-t]=(s-pqD)^2,$$

et c'est même sous cette forme qu'on l'obtient d'abord. (*Voyez*, par exemple, le *Cours d'Analyse* de M. Duhamel.) Si dans cette dernière équation, on substitue successivement à la place de D, les trois nombres

$$-\infty,\quad \frac{r}{1+p^2},\quad +\infty,$$

ou bien les trois suivants :

$$-\infty, \quad \frac{t}{1+q^2}, \quad +\infty,$$

on trouve des signes alternatifs, après avoir tout fait passer dans un membre; cela montre que ces deux systèmes de nombres séparent toujours les racines de l'équation (b); donc, si ces racines sont égales entre elles, elles doivent l'être à $\frac{r}{1+p^2}$ et à $\frac{t}{1+q^2}$, par suite à $\frac{s}{pq}$ d'après l'équation; donc on aura

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq}.$$

Réciproquement, si ces relations sont satisfaites, l'équation en D aura ses racines égales, car cette équation et sa dérivée seront vérifiées par $D = \frac{r}{1+p^2}$.

Je saisirai cette occasion pour relever une inexactitude qui m'est échappée dans ma Note sur les ombilics insérée dans le xxx^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. J'ai répété à la page 1, d'après quelques auteurs, que quelle que soit la direction suivant laquelle on chemine sur une surface, on ne trouve jamais deux normales successives qui se rencontrent rigoureusement : à la vérité, la phrase à laquelle je fais allusion est tout à fait isolée dans ma Note, et ce qui suit, relativement aux lignes de courbure, n'en dépend pas et reste parfaitement exact; je crois néanmoins devoir la rectifier en faveur des jeunes élèves qui pourraient me lire. Rien n'est plus simple, du reste, que de s'assurer qu'il existe sur une surface, contrairement à l'assertion précédente, deux lieux de points pour lesquels les normales rencontrent rigoureusement la normale correspondante à un point déterminé m. On voit aussi que ces deux lignes se coupent à angle droit et sont tangentes aux sections principales relatives au point m. M. Liouville s'est servi quelquefois, dans ses cours à l'École Polytechnique, de la considération de ces lignes pour établir les équations des lignes de courbure, et cette méthode est à la fois très-claire et très-simple. Il existe une autre méthode également très-simple pour obtenir les mêmes équations ; comme j'ignore si elle a déjà été employée, je vais l'indiquer en peu de mots. Elle consiste à regarder les lignes de courbure comme les lieux des points pour lesquels les normales à la surface forment une surface développable, ou bien sont tangentes à une même courbe, et puis à remarquer que lorsque l'on a les équations

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

d'une série de droites, il suffit, pour exprimer qu'elles sont tangentes à une courbe, de remplacer dans la condition

$$\frac{a'-a}{b'-b} = \frac{p'-p}{q'-q},$$

qui exprime que deux de ces droites se rencontrent, les accroissements $a'-a$, $b'-b$, $p'-p$, $q'-q$, des paramètres a, b, p, q par leurs différentielles relatives à la variable indépendante dont ils sont supposés fonctions. (*Voyez* une Note de M. Bouquet, tome XI de ce Journal.)