JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BAZIN

Sur une question relative aux déterminants

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 145-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__145_0>

SUR

UNE QUESTION RELATIVE AUX DÉTERMINANTS;

PAR M. BAZIN,

Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

On demande n séries de m quantités :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta,\ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta',\ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \delta'',\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)}, & \delta^{(n-1)},\ldots \end{array}\right\},$$

telles, que tous les déterminants à n^2 lettres que l'on peut former en combinant n quantités quelconques de la première série, $\alpha, \beta, \gamma,\ldots, \theta$, avec les $n(n-1)$ quantités $\alpha', \beta', \gamma',\ldots, \alpha'', \beta'', \gamma'',\ldots, \alpha^{(n-1)}, \beta^{(n-1)}, \gamma^{(n-1)},\ldots, \theta^{(n-1)}$ qui leur correspondent dans les autres séries, soient égaux à des valeurs données.

Il est clair, d'après l'énoncé de la question, que le nombre des équations est plus grand que le nombre des inconnues; il doit donc y avoir entre les valeurs assignées aux déterminants des équations de condition. Établissons avant tout ces relations.

Nous désignerons, en général, par $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$ le déterminant d'un système de n^2 quantités :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \alpha, & \beta, & \gamma,\ldots, & \theta \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\ldots, & \theta' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'',\ldots, & \theta'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)},\ldots, & \theta^{(n-1)} \end{array}\right\}.$$

Nous pouvons faire dériver tous les déterminants qui résultent des combinaisons des mn inconnues, de l'un d'eux pris arbitrairement, $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$ par exemple, en changeant dans le symbole $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$ une ou plusieurs des n lettres α, β, γ,..., θ en d'autres lettres quelconques de la première ligne du tableau (1).

Posons, pour abréger,

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\theta) = \Delta;$$

nous appellerons déterminants dérivés du premier ordre ceux qui se déduisent de Δ par le changement d'une seule lettre; et nous les représenterons, en général, par le symbole $\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$, dans lequel la lettre du dénominateur est la lettre effacée dans l'expression $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$, et la lettre du numérateur celle qui lui est substituée, de telle sorte que $\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ est égal à $(\lambda\beta\gamma\ldots\theta)$.

Nous appellerons, de même, déterminants dérivés du deuxième, du troisième,..., du $n^{\text{ième}}$ ordre, ceux qui se déduisent de Δ par le changement de deux, trois,..., n lettres; et nous les représenterons par les notations $\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right)$, $\Delta\left(\frac{\lambda\mu\nu}{\alpha\beta\gamma}\right)$,..., $\Delta\left(\frac{\lambda\mu\nu\ldots\varphi}{\alpha\beta\gamma\ldots\theta}\right)$ en inscrivant au dénominateur les lettres effacées dans Δ, et au numérateur dans un ordre correspondant celles qui les remplacent; ces expressions ne sont ainsi que les abréviations des expressions $(\lambda\mu\gamma\ldots\theta)$, $(\lambda\mu\nu\ldots\theta)$,..., $(\lambda\mu\nu\ldots\varphi)$.

Ceci posé, on a, quel que soit λ,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Delta\lambda = \alpha\,\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \beta\,\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + \gamma\,\Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) + \ldots + \theta\,\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)\\
\Delta\lambda' = \alpha'\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \beta'\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + \gamma'\Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) + \ldots + \theta'\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)\\
\Delta\lambda'' = \alpha''\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \beta''\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + \gamma''\Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) + \ldots + \theta''\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}.$$

En effet, on a

$$\Delta = \alpha\frac{d\Delta}{d\alpha} + \alpha'\frac{d\Delta}{d\alpha'} + \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \lambda\frac{d\Delta}{d\alpha} + \lambda'\frac{d\Delta}{d\alpha'} + \ldots,$$

de même

$$\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) = \lambda\frac{d\Delta}{d\beta} + \lambda'\frac{d\Delta}{d\beta'} + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Substituant ces valeurs dans les équations (3), on voit sans peine qu'elles deviennent identiques.

Nous allons maintenant faire voir comment les déterminants dérivés de tous les ordres supérieurs au premier peuvent s'exprimer simplement en fonction de ceux du premier.

Considérons d'abord ceux du second ordre, par exemple $\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right)$ ou $(\lambda\mu\gamma\ldots\theta)$.

Si l'on se reporte aux équations (3), on voit que le système

$$\left\{\begin{array}{lllll} \lambda, & \mu, & \gamma,\ldots, & \theta \\ \lambda', & \mu', & \gamma',\ldots, & \theta' \\ \lambda'', & \mu'', & \gamma'',\ldots, & \theta'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{(n-1)}, & \mu^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)},\ldots, & \theta^{(n-1)} \end{array}\right\}$$

résulte de la composition du système (2) avec le suivant :

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), & \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\mu}{\alpha}\right), & 0, & 0, & 0,\ldots, & 0 \\ \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right), & \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\mu}{\beta}\right), & 0, & 0, & 0,\ldots, & 0 \\ \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right), & \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\mu}{\gamma}\right), & 1, & 0, & 0,\ldots, & 0 \\ \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\lambda}{\delta}\right), & \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\mu}{\delta}\right), & 0, & 1, & 0,\ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right), & \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\mu}{\theta}\right), & 0, & 0, & 0,\ldots, & 1 \end{array}\right\}.$$

En appelant K le déterminant du système (4), on a donc

$$\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right) = \mathrm{K}\Delta.$$

Mais il est évident, d'après la forme du système (4), que K est égal au déterminant

$$\frac{\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}{\Delta}\cdot\frac{\Delta\left(\frac{\mu}{\beta}\right)}{\Delta} - \frac{\Delta\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)}{\Delta}\cdot\frac{\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)}{\Delta}.$$

On a donc

$$\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\cdot\Delta\left(\frac{\mu}{\beta}\right) - \Delta\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)\right].$$

On verrait de même que $\Delta\left(\frac{\lambda\mu\nu}{\alpha\beta\gamma}\right)$ est égal à $\frac{1}{\Delta^2}\mathrm{K}'$, K′ étant le déterminant du système

$$\left\{\begin{matrix} \Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\alpha}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\alpha}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\beta}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\beta}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\gamma}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\gamma}\right) \end{matrix}\right\}.$$

En général, le déterminant dérivé de l'ordre h, $\Delta\left(\frac{\lambda\mu\nu\ldots\pi}{\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon}\right)$, est exprimé par la formule

$$(5)\qquad \Delta\left(\frac{\lambda\mu\nu\ldots\pi}{\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon}\right) = \frac{1}{\Delta^{h-1}} \times \text{déterm. du syst.} \left\{\begin{matrix} \Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\alpha}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\alpha}\right),\ldots, & \Delta\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\beta}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\beta}\right),\ldots, & \Delta\left(\frac{\pi}{\beta}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\gamma}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\gamma}\right),\ldots, & \Delta\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right),\ldots, & \Delta\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right) \end{matrix}\right\}.$$

Il résulte de ce qui précède que tous les déterminants sont connus si l'on donne simplement la valeur de l'un d'eux, Δ, et de ses $n(m-n)$ dérivés du premier ordre; en sorte que les équations du problème seront contradictoires ou se réduiront simplement à $n(m-n)+1$, équations distinctes dont les autres ne sont que des conséquences.

Ces équations, qui s'obtiennent en égalant les déterminants aux valeurs assignées par l'énoncé, peuvent être remplacées par d'autres plus simples. Représentons les valeurs numériques des déterminants en changeant simplement les parenthèses en crochets, de telle sorte que

$$\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right],\quad \Delta\left[\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right],\ldots$$

représentent les valeurs que doivent avoir

$$\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right),\quad \Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right),\ldots,\quad \text{etc.}$$

Soit, en outre, $[\Delta]$ celle de Δ. On a, quel que soit λ, les n équations du premier degré :

$$(6)\quad \begin{cases} [\Delta]\lambda = \alpha\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right] + \beta\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right] + \gamma\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right] + \ldots, \\ [\Delta]\lambda' = \alpha'\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right] + \beta'\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right] + \gamma'\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right] + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\Delta]\lambda^{(n-1)} = \alpha^{(n-1)}\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right] + \beta^{(n-1)}\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right] + \gamma^{(n-1)}\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right] + \ldots. \end{cases}$$

En remplaçant successivement dans ces équations la lettre λ par chacune des $m-n$ lettres qui ne figurent pas dans l'expression $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$, nous obtiendrons $n(m-n)$ équations du premier degré. Tout système de valeurs qui les rendra identiques jouit de la propriété suivante : les déterminants formés avec ces valeurs des inconnues sont proportionnels aux valeurs numériques qu'ils devraient avoir d'après l'énoncé de la question.

En effet, d'après les équations (6), le système

$$\left\{\begin{matrix} \lambda, & \beta, & \gamma,\ldots, & \theta \\ \lambda', & \beta', & \gamma',\ldots, & \theta' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{(n-1)}, & \beta^{(n-)}, & \gamma^{(n-1)},\ldots, & \theta^{(n-1)} \end{matrix}\right\},$$

résulte évidemment de la composition du système (2) avec le suivant :

$$(7)\qquad \left|\begin{array}{cccc} \dfrac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 0,\ldots, & 0 \\ \dfrac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]}, & 1, & 0,\ldots, & 0 \\ \dfrac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 1,\ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\theta}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 0,\ldots, & 1 \end{array}\right|.$$

On a donc

$$\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \Delta \times \mathbf{M},$$

M étant le déterminant du système (7). Mais

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]};$$

d'où résulte

$$\frac{\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}{\Delta} = \frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]}.$$

On voit de même que le système

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \lambda, & \mu, & \gamma, & \delta,\ldots, & \theta \\ \lambda', & \mu', & \gamma', & \delta',\ldots, & \theta' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{(n-1)}, & \mu^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)}, & \delta^{(n-1)},\ldots, & \theta^{(n-1)} \end{array}\right\},$$

étant composé du système (2) et du suivant :

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]}, & \dfrac{\Delta\left[\frac{\mu}{\alpha}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 0,\ldots, & 0 \\ \dfrac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]}, & \dfrac{\Delta\left[\frac{\mu}{\beta}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 0,\ldots, & 0 \\ \dfrac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right]}{[\Delta]}, & \dfrac{\Delta\left[\frac{\mu}{\gamma}\right]}{[\Delta]}, & 1, & 0,\ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\theta}\right]}{[\Delta]}, & \dfrac{\Delta\left[\frac{\mu}{\theta}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 0,\ldots, & 1 \end{matrix}\right\},$$

on a

$$\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right) = \Delta\left\{\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]}\cdot\frac{\Delta\left[\frac{\mu}{\beta}\right]}{[\Delta]} - \frac{\Delta\left[\frac{\mu}{\alpha}\right]}{[\Delta]}\cdot\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]}\right\}.$$

Mais, d'après les équations de condition qui lient les valeurs numériques des déterminants

$$\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]}\cdot\frac{\Delta\left[\frac{\mu}{\beta}\right]}{[\Delta]} - \frac{\Delta\left[\frac{\mu}{\alpha}\right]}{[\Delta]}\cdot\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]} = \frac{\Delta\left[\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right]}{[\Delta]},$$

on a donc

$$\frac{\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right)}{\Delta} = \frac{\Delta\left[\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right]}{[\Delta]}.$$

Le même raisonnement peut s'appliquer aux déterminants d'ordre quelconque; par conséquent, nous pouvons prendre pour équations du problème les $n(m-n)$ équations (6), en y ajoutant la suivante :

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\theta) = [\Delta].$$

Supposons maintenant que nous ayons obtenu un système de valeurs pour nos mn inconnues et voyons comment tous les autres peuvent s'en déduire.

Soient

$$(8)\qquad \left\{\begin{matrix} \mathrm{M}, & \mathrm{N}, & \mathrm{P},\ldots, & \mathrm{S} \\ \mathrm{M}', & \mathrm{N}', & \mathrm{P}',\ldots, & \mathrm{S}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{M}^{(n-1)}, & \mathrm{N}^{(n-1)}, & \mathrm{P}^{(n-1)},\ldots, & \mathrm{S}^{(n-1)} \end{matrix}\right\}$$

n^2 quantités quelconques liées seulement par la relation

$$(\mathrm{MNP}\ldots\mathrm{S}) = 1,$$

et $a, b, c,\ldots, a', b', c',\ldots, a^{(n-1)}, b^{(n-1)}, c^{(n-1)},\ldots$ un système de valeurs pour les mn inconnues de la question. Si l'on pose

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \mathrm{M}\,a + \mathrm{N}\,a' + \mathrm{P}\,a'' + \ldots + \mathrm{S}\,a^{(n-1)}, \\ b_1 &= \mathrm{M}\,b + \mathrm{N}\,b' + \mathrm{P}\,b'' + \ldots + \mathrm{S}\,b^{(n-1)}, \\ c_1 &= \mathrm{M}\,c + \mathrm{N}\,c' + \mathrm{P}\,c'' + \ldots + \mathrm{S}\,c^{(n-1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_1 &= \mathrm{M}'\,a + \mathrm{N}'\,a' + \mathrm{P}'\,a'' + \ldots + \mathrm{S}'\,a^{(n-1)}, \\ b'_1 &= \mathrm{M}'\,b + \mathrm{N}'\,b' + \mathrm{P}'\,b'' + \ldots + \mathrm{S}'\,b^{(n-1)}, \\ c'_1 &= \mathrm{M}'\,c + \mathrm{N}'\,c' + \mathrm{P}'\,c'' + \ldots + \mathrm{S}'\,c^{(n-1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a''_1 &= \mathrm{M}''\,a + \mathrm{N}''\,a' + \mathrm{P}''\,a'' + \ldots + \mathrm{S}''\,a^{(n-1)}, \\ b''_1 &= \mathrm{M}''\,b + \mathrm{N}''\,b' + \mathrm{P}''\,b'' + \ldots + \mathrm{S}''\,b^{(n-1)}, \\ c''_1 &= \mathrm{M}''\,c + \mathrm{N}''\,c' + \mathrm{P}''\,c'' + \ldots + \mathrm{S}''\,c^{(n-1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

les mn quantités $a_1, b_1, c_1,\ldots, a'_1, b'_1, c'_1,\ldots, a_1^{(n-1)}, b_1^{(n-1)}, c_1^{(n-1)},\ldots$ seront un nouveau système de valeurs satisfaisant à la question. En effet, un déterminant quelconque formé avec ces quantités est évidemment égal au déterminant formé avec celles qui leur correspondent dans la série $a, b, c,\ldots, a', b', c',\ldots, a^{(n-1)}, b^{(n-1)}, c^{(n-1)},\ldots,$ multiplié par $(\mathrm{MNP}\ldots\mathrm{S})$, qui est l'unité.

Réciproquement, si l'on connaît deux systèmes de valeurs $a, b, c,\ldots,$ $a', b', c',\ldots, a'', b'', c'',\ldots; a_1, b_1, c_1,\ldots, a'_1, b'_1, c'_1,\ldots, a''_1, b''_1, c''_1,\ldots,$ etc., on peut toujours en déduire n^2 quantités M, N, P,..., M', N', P',... satisfaisant aux équations (9) et à la condition $(\mathrm{MNP}\ldots\mathrm{S}) = 1$. En effet, considérons spécialement celles des quantités a, b, c,... qui entrent dans la composition du déterminant $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$, c'est-à-dire $a, b, c,\ldots, t$; $a', b', c',\ldots, t'$; $a'', b'', c'',\ldots, t'',\ldots$, etc.; on peut toujours trouver n^2 nombres M, N, P,..., M', N', P',.., tels que :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
a_1 &= \mathrm{M}\,a + \mathrm{N}\,a' + \mathrm{P}\,a'' + \ldots,\\
b_1 &= \mathrm{M}\,b + \mathrm{N}\,b' + \mathrm{P}\,b'' + \ldots,\\
c_1 &= \mathrm{M}\,c + \mathrm{N}\,c' + \mathrm{P}\,c'' + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_1 &= \mathrm{M}\,t + \mathrm{N}\,t' + \mathrm{P}\,t'' + \ldots,\\
a'_1 &= \mathrm{M}'a + \mathrm{N}'a' + \mathrm{P}'a'' + \ldots,\\
b'_1 &= \mathrm{M}'b + \mathrm{N}'b' + \mathrm{P}'b'' + \ldots,\\
c'_1 &= \mathrm{M}'c + \mathrm{N}'c' + \mathrm{P}'c'' + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t'_1 &= \mathrm{M}'t + \mathrm{N}'t' + \mathrm{P}'t'' + \ldots,\\
a''_1 &= \mathrm{M}''a + \mathrm{N}''a' + \mathrm{P}''a'' + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Soit maintenant l une lettre non comprise dans les n lettres a, b, $c,\ldots, t$.

On a

$$[\Delta]\,l_1 = a_1\,\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right] + b_1\,\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right] + c_1\,\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right] + \ldots.$$

Remplaçons a_1, b_1, c_1,... par leurs valeurs en fonction de a, b, c,... tirées des équations (10); il vient, en divisant par $[\Delta]$,

$$\begin{aligned}
l_1 = {} & \mathrm{M}\left\{a\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]} + b\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]} + c\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right]}{[\Delta]} + \ldots\right\}\\
& + \mathrm{N}\left\{a'\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]} + b'\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]} + c'\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right]}{[\Delta]} + \ldots\right\}\\
& + \mathrm{P}\left\{a''\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]} + b''\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]} + c''\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right]}{[\Delta]} + \ldots\right\}\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Mais on a vu plus haut que

$$a\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]} + b\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]} + \ldots = l,$$

$$a'\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]} + b'\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]} + \ldots = l',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

D'où résulte enfin

$$l_1 = \mathrm{M}l + \mathrm{N}l' + \mathrm{P}l'' + \ldots.$$

Les équations (9) sont donc satisfaites, et, par suite, l'équation

$$(\mathrm{MNP}\ldots\mathrm{S}) = 1,$$

qui n'en est qu'une conséquence.

On voit, par ce qui précède, que toutes les solutions de la question peuvent s'obtenir sans peine dès que l'on en connaît une seule, puisqu'il suffit de la combiner avec tous les systèmes de n^2 quantités satisfaisant à l'équation indéterminée

$$(\mathrm{MNP}\ldots\mathrm{S}) = 1.$$

Or il est facile de trouver une solution; nous avons ramené le problème à rendre identiques les équations du premier degré (6) et l'équation

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\theta) = [\Delta];$$

considérons d'abord cette dernière, elle peut s'écrire

$$\alpha\frac{d\Delta}{d\alpha} + \beta\frac{d\Delta}{d\beta} + \ldots + \theta\frac{d\Delta}{d\theta} = [\Delta].$$

Si l'on attribue à $\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots, \alpha^{(n-1)}, \beta^{(n-1)}, \gamma^{(n-1)}, \ldots$ des valeurs quelconques, les expressions $\frac{d\Delta}{d\alpha}, \frac{d\Delta}{d\beta}, \ldots$ qui ne renferment que ces quantités prendront des valeurs déterminées, et l'on pourra toujours trouver pour $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$ des valeurs qui satisfassent à l'équation précédente.

En substituant dans les équations (6) les valeurs des n^2 inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$, on obtiendra immédiatement celles de toutes les autres inconnues.

On obtient ainsi pour les inconnues un système de valeurs $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots, a'', b'', c'', \ldots$; ensuite les formules (10) donneront toutes les solutions si l'on y remplace successivement M, N, P,..., M', N', P',... par tous les systèmes qui satisfont à l'équation

$$(\mathrm{MNP}\ldots\mathrm{S}) = 1.$$

Nous avons de cette manière les expressions générales des inconnues en fonction de n^2 arbitraires liées par une seule équation de condition.

Ces expressions peuvent être écrites sous une autre forme moins simple, mais plus symétrique. Établissons d'abord certaines équations de condition qui existent entre les déterminants, et qui sont une simple conséquence des précédentes.

Supposons qu'au lieu de faire dériver tous les déterminants de Δ ou $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$, nous les fassions dériver d'un autre déterminant quelconque

$$\Delta_1 = (\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\theta_1);$$

à chaque lettre λ répondent, dans chaque hypothèse, n dérivés du premier ordre,

$$\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \quad \Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right), \quad \Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right), \ldots$$

dans le premier cas,

$$\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right), \quad \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right), \quad \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\gamma_1}\right), \ldots$$

dans le second; les déterminants de la première de ces deux séries peuvent s'exprimer en fonction de ceux de la seconde et de n^2 quantités qui resteront les mêmes, quelle que soit la lettre λ que l'on considère.

Dans l'équation

$$\Delta\lambda = \alpha\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + \ldots + \theta\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right),$$

remplaçons λ par

$$\frac{1}{\Delta_1}\left\{\alpha_1\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right) + \beta_1\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right) + \ldots + \theta_1\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\theta_1}\right)\right\},$$

il vient

$$\frac{1}{\Delta_1}\left\{\alpha_1\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right) + \beta_1\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right) + \ldots\right\} = \frac{1}{\Delta}\left\{\alpha\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + \ldots\right\}.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha_1 &= \alpha\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right) + \ldots,\\
\Delta\beta_1 &= \alpha\Delta\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right) + \ldots,\\
\Delta\gamma_1 &= \alpha\Delta\left(\frac{\gamma_1}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\gamma_1}{\beta}\right) + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans l'équation précédente, et égalons les coefficients de α, β, γ,... dans les deux membres; nous avons

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) &= \frac{1}{\Delta_1}\left\{\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right)\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right) + \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right)\Delta\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right) + \ldots\right\},\\
\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) &= \frac{1}{\Delta_1}\left\{\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right)\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right) + \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right)\Delta\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right) + \ldots\right\},\\
\Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) &= \frac{1}{\Delta_1}\left\{\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right)\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\gamma}\right) + \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right)\Delta\left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right) + \ldots\right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right) &= \frac{1}{\Delta_1}\left\{\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right)\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\theta}\right) + \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right)\Delta\left(\frac{\beta_1}{\theta}\right) + \ldots\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules font voir que le passage des déterminants $\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right)$,... aux déterminants $\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$, $\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)$,..., s'opérera comme une simple transformation de coordonnées, quel que soit λ, au moyen de la substitution linéaire

$$(12)\qquad \left\{\begin{matrix} \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\gamma_1}{\alpha}\right),\ldots, & \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\theta_1}{\alpha}\right) \\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\gamma_1}{\beta}\right),\ldots, & \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\theta_1}{\beta}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\theta}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\beta_1}{\theta}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\gamma_1}{\theta}\right),\ldots, & \frac{1}{\Delta_1}\Delta'\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right) \end{matrix}\right\},$$

Revenons maintenant à la solution du problème principal.

Soit

$$\Delta_1 = (\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\theta_1),$$

l'un quelconque des déterminants A, B, C,..., T, n constantes arbitraires; formons les m quantités

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} A\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\alpha_1}\right] + B\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\beta_1}\right] + C\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\gamma_1}\right] + \ldots + T\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\theta_1}\right], \\ A\Delta_1\left[\frac{\beta}{\alpha_1}\right] + B\Delta_1\left[\frac{\beta}{\beta_1}\right] + C\Delta_1\left[\frac{\beta}{\gamma_1}\right] + \ldots + T\Delta_1\left[\frac{\beta}{\beta_1}\right], \\ A\Delta_1\left[\frac{\gamma}{\alpha_1}\right] + B\Delta_1\left[\frac{\gamma}{\beta_1}\right] + C\Delta_1\left[\frac{\gamma}{\gamma_1}\right] + \ldots + T\Delta_1\left[\frac{\gamma}{\theta_1}\right]: \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

répétons cette même opération sur tous les déterminants en introduisant pour chacun d'eux n constantes arbitraires nouvelles, formons la somme de toutes les quantités analogues à la première des expressions (13), ce que nous indiquerons en plaçant devant cette expression le signe $\sum$; faisons de même celle de toutes les quantités analogues à la seconde de ces expressions, et ainsi de suite.

Et posons

$$\alpha = \sum \left\{ A\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\alpha_1}\right] + B\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\beta_1}\right] + \ldots \right\},$$
$$\beta = \sum \left\{ A\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\alpha_1}\right] + B\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\beta_1}\right] + \ldots \right\},$$
$$\gamma = \sum \left\{ A\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\alpha_1}\right] + B\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soient de même

(14)
$$\alpha' = \sum \left\{ A'\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\alpha_1}\right] + B'\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\beta_1}\right] + \ldots \right\},$$
$$\beta' = \sum \left\{ A'\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\alpha_1}\right] + B'\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\beta_1}\right] + \ldots \right\},$$
$$\gamma' = \sum \left\{ A'\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\alpha_1}\right] + B'\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha'' = \sum \left\{ A''\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\alpha_1}\right] + B''\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\beta_1}\right] + \ldots \right\},$$
$$\beta'' = \sum \left\{ A''\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\alpha_1}\right] + B''\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\beta_1}\right] + \ldots \right\},$$
$$\gamma'' = \sum \left\{ A''\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\alpha_1}\right] + B''\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\beta_1}\right] + \ldots \right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A', B', C',..., A'', B'', C'',... étant de nouvelles arbitraires.

Il est facile de s'assurer, en ayant égard aux équations de condition (11), que ces expressions satisfont bien aux équations (6); mais, pour qu'elles rendent aussi identique l'équation

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\theta) = [\Delta],$$

il faut établir une relation entre les indéterminées A, B, C,..., A', B', C',..., A'', B'', C'',.... Cette équation s'obtient en formant le déterminant $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$ à l'aide des valeurs précédentes des inconnues, et l'égalant à $[\Delta]$, son premier membre sera évidemment une fonction linéaire des déterminants que l'on peut former par les combinaisons des indéterminées A, B, C,...; nous le désignerons par

$$\sum M_1 (ABC\ldots T),$$

et nous écrirons l'équation de condition ainsi,

$$\sum M_1 (ABC\ldots T) = [\Delta].$$

On pourra toujours y satisfaire: en effet, donnons-nous arbitrairement A', B', C',..., A'', B'', C'',...; le premier membre de cette équation se réduira à une fonction linéaire de A, B, C,.... Nous obtenons donc ainsi une solution du problème; en l'introduisant dans les formules (10), nous aurons les expressions les plus générales des inconnues. Cette substitution nous donne

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha &= \sum \left\{ (MA + NA' + PA'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\alpha_1}\right] + (MB + NB' + PB'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\beta_1}\right] + \ldots \right\},\\
\beta &= \sum \left\{ (MA + NA' + PA'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\frac{\beta}{\alpha_1}\right] + (MB + NB' + PB'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\frac{\beta}{\beta_1}\right] + \ldots \right\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha' &= \sum \left\{ (M'A + N'A' + P'A'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\alpha_1}\right] + (M'B + N'B' + P'B'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose maintenant

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&MA + NA' + PA'' + \ldots = A_1,\\
&MB + NB' + PB'' + \ldots = B_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&M'A + N'A' + P'A'' + \ldots = A'_1,\\
&M'B + N'B' + P'B'' + \ldots = B'_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

on voit que les expressions (15) ne diffèrent plus des expressions (14) que par le changement de A, B, C,..., A', B', C',..., en A_1, B_1, C_1,...,

A'_1, B'_1, C'_1,.... Il résulte d'ailleurs des équations (16) que les quantités A_1, B_1, C_1,..., etc., satisfont aussi à l'équation

$$\sum M_1 (A_1 B_1 C_1 \ldots T_1) = [\Delta].$$

Les expressions (15) ne sont donc pas plus générales que les expressions (14); d'où il résulte enfin que ces dernières donneront toutes les solutions de la question, si l'on y substitue pour A, B, C,..., A', B', C',..., tous les systèmes de valeurs satisfaisant à l'équation de condition

$$\sum M_1 (ABC\ldots T) = [\Delta].$$