JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Note sur une formule d'Abel

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 143-144.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__143_0>

NOTE SUR UNE FORMULE D'ABEL;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Dans un chapitre [*] intitulé : *Sur quelques intégrales définies*, Abel a rassemblé un grand nombre de formules qui sont extrêmement remarquables, tant pour leur généralité que pour leur élégance. Parmi les résultats qui s'y trouvent, il y en a un qui contient comme cas très-particulier le beau théorème de Legendre sur les fonctions elliptiques des deux premières espèces à modules complémentaires. Le voici :

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\gamma+1)}$$
$$= a\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\gamma(1+ax)^\beta}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\,dx}{(1+x)^{\gamma+1}[1+(1-a)x]^\alpha}$$
$$+(1-a)\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\,dx}{(1+x)^\gamma[1+(1-a)x]^\alpha}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^\beta}.$$

Je ne sais pas si l'on a remarqué encore que cette formule peut se déduire immédiatement du théorème célèbre de M. Dirichlet. En effet, rappelons-nous qu'on a, en vertu de ce théorème,

$$\iiint x^{k-1}y^{l-1}z^{m-1}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k}{2}+\frac{l}{2}+\frac{m}{2}\right)},$$

où les limites des variables se déterminent par l'inégalité

$$x^2+y^2+z^2 \leqq 1.$$

[*] Tome I^er des *Œuvres d'Abel*, page 93.

En intégrant par rapport à z et en transformant l'intégrale double qui en résulte par la substitution des coordonnées elliptico-sphériques, savoir,

$$x = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

on parviendra tout de suite à une formule où les variables se séparent d'elles-mêmes, et qui n'est autre chose que le théorème d'Abel. Il est évident qu'en généralisant cette marche, ce qui peut se faire sans la moindre difficulté, on arrivera à une formule analogue, relativement au cas de sommes de produits de n intégrales définies. Cette généralisation ne me semble pas être indiquée par la méthode suivie par Abel.

Je crois devoir rappeler l'attention des géomètres sur le rapprochement que je viens de faire, et qui me paraît ouvrir une application très-étendue et très-féconde du système des coordonnées elliptiques. On parviendra ainsi d'un manière simple à une foule de propriétés des intégrales à différentielles algébriques et à indices quelconques. Je me propose de revenir sur ce sujet important à une autre occasion.

Dublin, le 24 Février 1851.