JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

VOIZOT

**Note sur la théorie des courbes à double courbure**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 15 (1850), p. 481-486.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__481_0>

# NOTE

SUR

# LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. VOIZOT.

M. J. Bertrand, dans le § IV du Mémoire sur les courbes à double courbure, qu'il vient de publier dans ce Journal (septembre 1850), recherche quelles sont les surfaces réglées dont les génératrices sont les normales principales de deux courbes distinctes, et il arrive à la formule

$$(n) \qquad 1 = \frac{a}{\rho} - \frac{C}{R},$$

$\rho$ étant le rayon de courbure de l'une des deux courbes, dans son plan osculateur;

R étant le rayon de la seconde courbure;

$a$ étant la distance qui sépare les points correspondants des deux courbes;

et C une constante arbitraire fournie par l'intégration.

Dans le § VI, M. Bertrand recherche, pour l'hypothèse de $a$ constant, deux autres relations qui permettent d'exprimer les deux rayons de courbure de l'une des deux courbes en fonction de ceux de l'autre, et il est conduit à deux équations dont il déduit, pour le cas particulier de $\rho_1$ constant et égal à $a$,

$$(1) \qquad \rho_2 = -a,$$

$$(2) \qquad R_1 R_2 = a^2,$$

$\rho_1$ et $R_1$ étant les deux rayons de courbure de l'une des deux courbes, et $\rho_2$ et $R_2$ étant les rayons de courbure de l'autre courbe.

Or ces deux relations sont contenues, la première explicitement, la seconde implicitement, dans un Mémoire sur les courbes à double courbure, que j'ai adressé à l'Académie des Sciences en mai 1847, et qui est, depuis cette époque, entre les mains d'un membre de l'Institut. Voici comment j'ai obtenu la première.

Soit F une courbe plane. Si, par chacun de ses points, on élève des perpendiculaires au plan, on obtiendra un cylindre droit qui, de même que la courbe F se rapporte à son cercle osculateur, se rapportera au cylindre droit construit sur ce cercle. Ce cylindre circulaire droit sera donc osculateur de la surface cylindrique qui a la courbe F pour directrice.

Si l'on considère une surface conique quelconque, on pourra, par la même raison, regarder comme surface osculatrice de ce cône celle d'un cône circulaire droit ayant même centre.

Maintenant, deux éléments consécutifs de la surface des tangentes en un point quelconque $(x, y, z)$ d'une courbe à double courbure FF′, pouvant toujours être considérés comme appartenant à un cône circulaire droit dont le centre est le point $(x, y, z)$, je me suis proposé de rechercher l'angle au centre de ce cône et la position de son axe.

Si l'on porte, à partir du point $(x, y, z)$, sur les deux tangentes consécutives se coupant à ce point, une longueur égale à l'unité; et si, aux points ainsi déterminés, on mène deux parallèles à deux normales aux plans osculateurs consécutives, ces deux droites se couperont dans un plan perpendiculaire à la génératrice de la surface des tangentes, et détermineront l'élément d'une section conique dont l'équation sera

$$y_1^2 = mx_1 + nx_1^2,$$

cette section étant rapportée à son sommet de gauche comme origine des coordonnées $x_1, y_1$. Le rayon de courbure de cet élément, dont la longueur égale $\frac{1}{2}m$, sera dans un plan perpendiculaire au plan osculateur de la courbe FF′, lequel plan passe par l'axe du cône cherché.

D'ailleurs l'équation d'une section conique, pour un cône dont l'angle au centre égale $\beta$, et faite perpendiculairement à une génératrice, à une distance du centre égale à l'unité, est

$$y_1^2 = \frac{\sin\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}x_1 - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi+\beta\right)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}x_1^2,$$

d'où

$$\frac{1}{2}m = \frac{\sin\beta}{2\cos^2\frac{1}{2}\beta} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta;$$

et enfin

$$(3) \qquad dt = dt'\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta,$$

en appelant $dt$ l'angle de contingence et $dt'$ l'angle conique de torsion, ou l'angle de deux plans osculateurs consécutifs, $\beta$ se rapportant à la nappe de la surface des tangentes qui rencontre le plan des $xy$.

Tandis que l'équation

$$(4) \qquad \rho\, dt = ds,$$

où $ds$ désigne la différentielle de l'arc, est l'équation de courbure circulaire, l'équation (3) est l'équation conique de la courbe FF'.

Le centre de cette dernière courbure se trouve évidemment sur l'axe du cône osculateur, qui est le lieu des centres de courbure de tous les points de la génératrice correspondante. Et le lieu de tous ces axes est ainsi le lieu des centres de courbure de tous les points de la surface des tangentes.

L'axe du cône osculateur est situé dans un plan perpendiculaire au plan osculateur, et du côté de la surface des tangentes par rapport au plan osculateur. L'angle $\frac{1}{2}\beta$, toujours aigu, sera positif quand la surface des tangentes sera intérieure à l'angle aigu formé par le plan osculateur au point $(x, y, z)$ et le plan des $xy$; il sera négatif dans le cas contraire; $dt'$ est de même signe que $\frac{1}{2}\beta$.

L'angle de cet axe avec le rayon de courbure est droit.

Arrivons à la formule (1).

Soit $F_1F''_1$ l'arête de rebroussement formée par les intersections des plans normaux à la courbe FF′. Les tangentes de cette courbe sont toutes perpendiculaires aux plans osculateurs de la proposée et passent par le lieu de ses centres de courbure.

Considérons trois de ces tangentes consécutives, correspondantes au point $(x, y, z)$ et aux trois points suivants. Les deux équations de courbure de cette arête seront

$$(5) \qquad \rho_1\, dt' = ds',$$

$$(6) \qquad dt' = dt \cot \tfrac{1}{2}\beta,$$

puisque l'angle de contingence $dt$ de la courbe FF′ devient l'angle conique de la courbe $F_1F'_1$, et que, réciproquement, l'angle conique $dt'$ de la première devient l'angle de contingence de la seconde.

Les rayons de courbure $\rho$ et $\rho_1$ sont dans le plan normal à la courbe FF′. Ils sont parallèles comme perpendiculaires à la tangente de $F_1F'_1$. De plus, il est facile de voir qu'ils sont dirigés en sens opposés.

L'axe du cône osculateur est ici dans un plan parallèle à celui de $\beta$, puisque ces deux plans sont perpendiculaires à un même plan normal de la courbe FF′, lequel est osculateur de $F_1F'_1$. Son angle $\frac{1}{2}\beta'$ avec ce plan égale $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\beta$. Il est positif et négatif dans des circonstances analogues à celles qui déterminent le signe de $\frac{1}{2}\beta$. $dt$, considéré comme angle conique, est de même signe que $\frac{1}{2}\beta'$.

Soient $(x_1, y_1, z_1)$ le point de l'arête $F_1F'_1$ correspondant à celui $(x, y, z)$ de la courbe FF′, et $m$ la distance de ce point au plan osculateur de FF′, ou la partie de la tangente de $F_1F'_1$ à ce point, interceptée par le plan osculateur; on aura

$$(7) \qquad m = \frac{d\rho}{dt'}.$$

Si l'on amène en coïncidence ce point avec le centre de courbure correspondant de la courbe FF′, en faisant glisser parallèlement à elle-même la courbe $F_1F'_1$ le long de sa tangente, on verra facilement que, pour les deux cas de $\left[+\frac{1}{2}\beta,\ \pm\frac{1}{2}\beta'\right]$, correspondants à $[+dt',\ \pm d\rho]$, les surfaces des tangentes des deux courbes seront intérieures à l'angle droit des deux plans osculateurs tourné du côté du plan des $xy$; et que, pour les deux cas de $\left[-\frac{1}{2}\beta,\ \pm\frac{1}{2}\beta'\right]$, correspondants à $[-dt',\ \pm d\rho]$, ces deux surfaces seront extérieures à cet angle.

Les mêmes circonstances se produisent dans l'angle droit opposé au sommet à celui considéré, à cause de l'opposition de sens des secondes nappes des deux courbes.

Dans les deux premiers cas, les axes des cônes osculateurs sont parallèles et dirigés dans le même sens. Dans les deux derniers cas, ces axes sont parallèles et dirigés en sens contraires.

Donc, quelle que soit la valeur de $m$, les axes des cônes osculateurs des courbes FF′, $F_1F'_1$ sont parallèles.

Reprenons notre question.

On a, équation (7),

$$dm = ds' - \rho\, dt' = \frac{dt'\, d^2\rho - d\rho\, d^2t'}{dt'^2},$$

d'où

$$(8)\qquad ds' = \frac{dt'\, d^2\rho - d\rho\, d^2t' + \rho\, dt'^3}{dt'^2} = \rho_1\, dt';$$

et enfin

$$(9)\qquad \rho_1 = \frac{dt'\, d^2\rho - d\rho\, d^2t' + \rho\, dt'^3}{dt'^3};$$

relations où les inconnues de l'équation (5) se trouvent exprimées au moyen de $\rho$ et de $dt'$.

Soit maintenant

$$\rho = a;$$

les équations (7), (8), (9) donneront

$$m = 0,\quad ds' = a\, dt',\quad \rho_1 = a;$$

les deux systèmes [(3), (4)], [(5), (6)] deviendront

$$\left[a\, dt = ds,\ dt = dt' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\right],\quad \left[a\, dt' = ds',\ dt' = dt \cot\tfrac{1}{2}\beta\right],$$

et l'arête de rebroussement $F_1 F'_1$ se confondra avec le lieu des centres de courbure de la courbe FF'. Les deux rayons de courbure se confondront aussi, et chacune des courbes FF' et $F_1 F'_1$ sera le lieu des centres de courbure de l'autre. C'est cette propriété qui m'a fait donner à ces courbes le nom de *courbes conjuguées*.

Deux courbes conjuguées sont les lieux des centres des sphères osculatrices l'une de l'autre. Elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre, et à une distance constante égale à $a$.

Toutes les hélices sont des courbes conjuguées avec les lieux respectifs de leurs centres de courbure. Les axes de leurs cônes osculateurs, qui sont les génératrices des cylindres sur lesquels elles sont tracées, sont parallèles et dirigés dans le même sens.

Quant à l'équation (2), comme dans les formules de M. Bertrand, relatives au cas de

$$\rho = a,$$

on a

$$R_1 = a \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta,$$

$$R_2 = a \cot \frac{1}{2} \beta;$$

il en résulte

$$R_1 R_2 = a^2.$$

Je dois dire, pour rendre hommage à la vérité, que la partie de cette Note concernant les signes de l'angle $\frac{1}{2}\beta$ est tirée d'une rédaction de mon Mémoire qui n'a pas été envoyée à l'Institut.