JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. PUISEUX

Recherches sur les fonctions algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 365-480.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__365_0>

RECHERCHES

SUR

LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES,

PAR M. V. PUISEUX,

Maître de Conférences à l'École Normale.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Lorsqu'une fonction u d'une variable z réelle ou imaginaire est définie par une équation algébrique

$$f(u, z) = 0,$$

il ne suffit pas d'attribuer à la variable une valeur particulière pour que la fonction soit complétement déterminée; car l'équation proposée fournira, en général, plusieurs valeurs de u pour chaque valeur de z : il faut encore faire connaître laquelle de ces valeurs on doit choisir, si l'on veut que la fonction u soit définie sans ambiguïté.

Soit, par exemple, l'équation

$$u^2 - z = 0$$

l'équation dont il s'agit; la valeur de z étant représentée par $re^{t\sqrt{-1}}$, où r est positif et t réel, les deux valeurs correspondantes de u seront $r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}$, $-r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}$, en désignant par $r^{\frac{1}{2}}$ la valeur arithmétique de la racine carrée de r. Pour achever de définir la fonction, on pourrait convenir de prendre pour t un angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et d'adopter constamment pour u l'une des deux formules écrites ci-dessus, $r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}$, par exemple. Mais cette convention, qu'il serait difficile d'étendre à des équations d'un degré quelconque, a encore cet inconvénient, que u devient alors une fonction discontinue de z. En effet, attribuons à cette variable les deux valeurs $re^{(\pi-\varepsilon)\sqrt{-1}}$, $re^{(-\pi+\varepsilon)\sqrt{-1}}$, qui différeront infiniment peu si ε désigne un infiniment petit positif; les valeurs correspondantes de u, savoir : $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}\sqrt{-1}}$, $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-\pi+\varepsilon}{2}\sqrt{-1}}$, différeront d'une quantité finie et sensiblement égale à $2r^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$.

2. On évitera cette discontinuité en définissant autrement la fonction u. Reprenons l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

dont nous pouvons supposer le premier membre entier en u et z; donnons à z une valeur initiale quelconque c, et, pour la valeur initiale b de u, choisissons une quelconque des racines de l'équation

$$f(u, c) = 0.$$

Concevons maintenant que z varie d'une manière continue à partir de la valeur c, et atteigne une autre valeur k; M. Cauchy a démontré (*Nouveaux Exercices de Mathématiques*, tome II, page 109) que les diverses valeurs de u varient en même temps d'une manière continue. Il y en aura donc une qui, d'abord égale à b, aura passé par degrés infiniment petits à une valeur déterminée h qu'elle atteindra pour $z = k$. Cette valeur de u sera pour nous une fonction de z, et, comme on le voit, une fonction continue; mais sa détermination, pour une valeur particulière de z, dépendra tout à la fois et de cette valeur même et de la série des valeurs par lesquelles z a passé à partir de sa valeur initiale.

Observons toutefois que la fonction cesserait d'être déterminée, si, en passant de la valeur c à la valeur k, z prenait une des valeurs qui font acquérir à l'équation

$$f(u, z) = 0$$

des racines égales. Mais ces dernières valeurs étant en nombre limité, il sera toujours possible d'éviter cette circonstance, quelles que soient les quantités c et k; car il y a une infinité de manières de faire passer une variable imaginaire d'une valeur à une autre.

De plus, il importe de remarquer que, selon la série de valeurs qu'on adoptera pour z, la fonction u pourra acquérir, pour $z = k$, telle ou telle valeur. La question qui va nous occuper, de déterminer la valeur de u pour une valeur quelconque de z, devra donc être posée comme il suit, si l'on veut qu'elle ait une solution unique :

« La fonction u satisfaisant à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

» et ayant la valeur b pour $z = c$, assigner la valeur qu'elle acquiert » pour $z = k$, en supposant connue la série des valeurs infiniment » rapprochées par lesquelles z passe de la valeur c à la valeur k. »

M. Cauchy a montré combien est importante dans l'analyse, et particulièrement dans le calcul intégral, la considération des diverses manières dont une variable imaginaire peut passer d'une valeur à une autre. Afin de rendre plus sensible la marche d'une pareille variable, nous nous servirons de la représentation géométrique dont cet illustre analyste a tiré un si grand parti. Ayant fait $z = x + y\sqrt{-1}$, nous imaginerons un point Z dont x et y soient les coordonnées rectangulaires, de sorte qu'à chaque valeur de z répondra une position de Z, et réciproquement. Alors, en même temps que z variera de c à k par une série déterminée de valeurs, le point mobile Z passera du point C correspondant à $z = c$, au point K correspondant à $z = k$, en suivant un chemin déterminé. Le problème proposé ci-dessus reviendra donc à trouver la valeur qu'acquiert la fonction u, lorsque Z passe de C en K par un chemin donné [*].

3. Pour éclaircir par un exemple ces considérations générales,

---

[*] Ce chemin peut être ou une ligne droite, ou une ligne brisée, ou une ligne courbe, ou un assemblage quelconque de lignes droites et courbes. Il n'est assujetti qu'à former entre les points C et K un trait non interrompu.

revenons à l'équation

$$u^2 - z = 0.$$

De l'origine O des coordonnées comme centre, *fig.* 1, *Pl. I,* avec un rayon quelconque r, décrivons une circonférence sur laquelle nous prendrons, dans l'angle des coordonnées positives, les deux points C et K; appelons τ et θ les angles aigus $\mathrm{CO}x$, $\mathrm{KO}x$, et supposons $\theta > \tau$; on aura, au point C,

$$z = re^{\tau\sqrt{-1}} = c,$$

et, au point K,

$$z = re^{\theta\sqrt{-1}} = k.$$

Pour une position quelconque du point Z sur le cercle, on aura

$$z = re^{t\sqrt{-1}},$$

et l'on pourra prendre l'angle τ pour valeur initiale de t, et la quantité $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\tau}{2}\sqrt{-1}}$ pour valeur initiale de u. Si, maintenant, on suppose que Z aille de C en K en décrivant l'arc CLK moindre que la demi-circonférence, l'angle t croîtra d'une manière continue de τ à θ, et la fonction u acquerra, pour $z = k$, la valeur $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}$. Mais si l'on fait décrire à Z l'arc CMK plus grand que la demi-circonférence, l'angle t décroîtra de τ à $\theta - 2\pi$, et la fonction u obtiendra, pour $z = k$, la valeur $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta-2\pi}{2}\sqrt{-1}}$ égale et de signe contraire à la précédente. On voit donc bien que, dans notre manière d'envisager une fonction implicite, elle dépend non-seulement de la valeur de la variable z ou de la position du point Z, mais encore du chemin par lequel ce point y est arrivé à partir de sa position initiale.

4. En général, le premier membre $f(u, z)$ de l'équation proposée sera de la forme

$$\mathrm{A}u^m + \mathrm{B}u^{m-1} + \mathrm{C}u^{m-2} + \ldots + \mathrm{I}u + \mathrm{K},$$

A, B,... K, désignant des fonctions entières de z qu'on peut supposer n'avoir pas de diviseur commun. Nous admettrons aussi que cette équation est irréductible, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune fonction entière de u et de z, d'un degré moindre que m par rapport à u, qui divise $f(u, z)$: s'il y avait un pareil diviseur, l'équation proposée se partagerait en plusieurs autres irréductibles, à l'une desquelles satisferait la fonction dont nous nous occupons. Il suit de là que l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ne pourra pas avoir de racines égales, quelle que soit z; car, si cela avait lieu, on sait qu'elle ne serait pas irréductible. Les valeurs de z qui lui feront acquérir des racines égales seront déterminées par une équation en z qui n'aura qu'un nombre limité de solutions : les points correspondants à ces valeurs seront donc en nombre limité et ne formeront pas une ligne continue.

5. Afin de définir d'une manière précise la fonction que nous voulons considérer, choisissons pour point de départ de Z un point C correspondant à la valeur c de z. Supposons que l'équation

$$f(u, c) = 0$$

ait une ou plusieurs racines simples et finies. Appelons b_1 une pareille racine, et u_1 une fonction continue de z qui satisfasse à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et se réduise à b_1 lorsque le point Z part de la position C.

Concevons maintenant que Z aille du point C qui répond à $z = c$, au point K qui répond à $z = k$, en suivant une ligne CMK, *fig.* 2, telle que, pour aucun point de cette ligne, la fonction u_1 ne devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Au point K, u_1 acquerra une valeur h_1 qui sera une des racines de l'équation

$$f(u, k) = 0.$$

Je vais prouver, et c'est là une proposition fondamentale dans notre théorie, que cette valeur h_1 restera la même, si, les points C et K restant fixes, la ligne CMK vient à se changer dans la ligne infiniment voisine CM′K.

En effet, regardons ces deux lignes comme parcourues en même temps par deux points mobiles Z et Z′ qui partent ensemble de la position C, qui arrivent ensemble en K, et dont les positions simultanées M et M′ soient toujours infiniment voisines. Appelons v_1 et v'_1 les valeurs simultanées de la fonction u_1 sur les deux lignes CMK, CM′K : puisque v_1 et v'_1 varient d'une manière continue quand les points Z et Z′ se déplacent, il en sera de même de la différence $v_1 - v'_1$.

Observons maintenant que tout le long de la ligne CMK, la racine u_1 de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

n'est égale à aucune autre, et qu'ainsi on peut assigner une quantité finie Δ telle, que le module de la différence entre u_1 et une autre racine soit, le long de cette ligne, constamment supérieur à Δ. Pour les deux points M et M′, les valeurs de z diffèrent infiniment peu, et, par conséquent, chacune des racines de l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

pour le point M′, diffère infiniment peu de quelqu'une des racines de la même équation pour le point M. Il en résulte que le module de la différence $v_1 - v'_1$ est ou infiniment petit ou supérieur à Δ : mais cette différence est nulle au point C et varie d'une manière continue; il faut donc qu'elle reste toujours infiniment petite : par conséquent, elle est rigoureusement nulle en K, et la fonction u_1 acquiert en ce point la même valeur h_1, soit que Z y arrive par le chemin CMK ou par le chemin CM′K.

6. Concevons à présent qu'on altère graduellement la ligne CMK, les points C et K restant fixes; nous obtiendrons la proposition suivante :

Le point Z *allant de* C *en* K, fig. 3, *soit par le chemin* CMK, *soit par le chemin* CNK, *la fonction* u_1 *qui avait en* C *la valeur* b_1 *acquerra dans les deux cas la même valeur* h_1, *si l'on peut, en déformant la ligne* CMK, *la faire coïncider avec* CNK, *sans lui faire franchir* *aucun point pour lequel la fonction u_1 devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0.$$

7. On peut faire coïncider le point K avec le point C, et alors on arrive au théorème suivant :

Le point Z étant supposé partir du point C et revenir à ce même point en décrivant la ligne CLMC, *fig.* 4, *la fonction u_1, qui avait au commencement la valeur b_1, reprendra à la fin la même valeur b_1, si l'on peut réduire la ligne fermée* CLMC *au seul point* C *sans lui faire franchir aucun point pour lequel la fonction u_1 devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0.$$

On doit observer que cette ligne fermée CLMC peut avoir une forme absolument quelconque, se couper elle-même, ou faire autour du point C un nombre quelconque de révolutions, pourvu que la condition exprimée dans l'énoncé du théorème soit remplie.

Par exemple, la fonction u_1 définie par l'équation

$$u^m = z - a$$

reprendra sa valeur initiale, lorsque le point Z, parti du point C, reviendra à ce même point, si la ligne qu'il a décrite peut se réduire au seul point C, sans franchir le point A qui répond à $z = a$.

Pareillement, la fonction u_1 définie par l'équation

$$(z - \mathrm{a})(z - \mathrm{a}')(z - \mathrm{a}'')\ldots u^m = (z - a)(z - a')(z - a''),\ldots,$$

reprendra sa valeur initiale, lorsque le point Z reviendra à son point de départ C, si la ligne décrite par ce point peut se réduire au seul point C sans franchir les points A, A', A'',..., $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc., qui correspondent respectivement aux valeurs a, a', a'',..., a, a', a'', etc., de z.

Enfin, il en sera de même de la fonction u_1 définie par l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

si la ligne fermée décrite par Z peut se réduire au seul point C sans franchir aucun des deux points A et A′ qui répondent à $z = + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ et à $z = - \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

8. Soit u_1 une fonction algébrique de z définie, comme précédemment, par la condition d'être continue, de satisfaire à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et de se réduire à la quantité b_1 pour $z = c$. La notation $\int_c^k u_1 dz$ désigne, comme on sait, la somme des produits des valeurs de la fonction u_1 par les accroissements infiniment petits que reçoit la variable z lorsque celle-ci passe de la limite inférieure c à la limite supérieure k. Or, on peut faire varier z de c à k, ou, ce qui est la même chose, faire passer le point Z de C en K d'une infinité de manières, et à chaque chemin CMK, *fig.* 5, suivi par le point Z répondra une valeur finie et déterminée de l'intégrale $\int_c^k u_1 dz$, pourvu qu'en aucun point de ce chemin la fonction u_1 ne devienne ni infinie, ni égale à une autre racine de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

On peut donc se demander comment varie l'intégrale $\int_c^k u_1 dz$, lorsque les points C et K, ainsi que la ligne CMK, viennent à changer infiniment peu. Cette ligne ne renfermant, par hypothèse, aucun point qui rende la fonction u_1 infinie ou racine multiple, il en sera de même de la ligne infiniment voisine C′M′K′, et l'on prouvera, comme au n° 5, que, pour deux points infiniment voisins pris sur ces deux lignes, les valeurs de u_1 diffèrent infiniment peu L'accroissement de l'intégrale, lorsqu'on passe d'un de ces chemins à l'autre, peut donc être calculé par les règles du calcul des variations, qui donnent

$$\delta \int_c^k u_1 dz = \int_c^k (u_1 dz) = \int_c^k (u_1 d\delta z + \delta u_1 dz).$$

Mais le long de la ligne CMK, la dérivée $\frac{du_1}{dz}$ a constamment une valeur finie, comme on le voit par l'équation

$$\frac{df}{du_1}\frac{du_1}{dz}+\frac{df}{dz}=0,$$

où $\frac{df}{du_1}$ ne peut être nul tant que u_1 est une racine simple de l'équation

$$f(u, z)=0.$$

On aura donc

$$\delta u_1=\frac{du_1}{dz}\delta z,$$

d'où

$$\delta u_1\,dz=\frac{du_1}{dz}\delta z\,dz=du_1\,\delta z,$$

et, par suite,

$$\delta\int_c^k u_1\,dz=\int_c^k(u_1\,d\delta z+du_1\,\delta z)=\int_c^k d(u_1\,\delta z),$$

ou bien, en appelant b_1 et h_1 les valeurs de u_1 aux points C et K,

$$\delta\int_c^k u_1\,dz=h_1\,\delta k-b_1\,\delta c.$$

9. On tire de cette équation plusieurs conséquences importantes. Supposons d'abord que les points C′ et K′ coïncident avec les points C et K; on aura

$$\delta c=0,\quad \delta k=0,$$

et, par suite,

$$\delta\int_c^k u_1\,dz=0.$$

De là résulte le théorème suivant :

L'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, *prise le long de la ligne* CMK, *ne changera pas de valeur, si, les points* C *et* K *restant fixes, cette ligne vient à se déformer, sans franchir toutefois aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z)=0.$$

10. Supposons ensuite que le point K coïncidant avec le point C, le chemin CMK devienne une ligne fermée CLMC, *fig.* 4; on aura

$$\delta h = \delta c,$$

d'où

$$\delta \int_c^k u_1\, dz = (h_1 - b_1)\, \delta c.$$

Tant que le point C reste fixe, on a

$$\delta c = 0,$$

et, par suite,

$$\delta \int_c^k u_1\, dz = 0.$$

On conclut de là le théorème suivant :

L'intégrale $\int u_1 dz$, *prise à partir du point* C, *tout le long de la ligne fermée* CLMC, *garde la même valeur si, le point* C *restant fixe, cette ligne vient à se déformer sans franchir aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0.$$

11. On réduit encore à zéro le produit $(h_1 - b_1)\delta c$, en faisant $h_1 = b_1$, c'est-à-dire en supposant que la fonction u_1 reprend sa valeur initiale lorsque le point Z, parti du point C, revient à ce même point. On a donc ce théorème :

Si la ligne fermée CLMC *est telle, que la fonction* u_1 *reprenne sa valeur après une révolution du point* Z, *l'intégrale* $\int u_1 dz$, *prise tout le long de cette ligne, ne changera pas si l'on vient à la déformer sans lui faire franchir aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0.$$

En combinant ce théorème avec celui du n° **7**, on obtient encore la proposition suivante :

Si la ligne fermée CLMC *est telle, qu'on puisse la réduire au seul point* C *sans lui faire franchir aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0,$$

l'intégrale $\int u_1 dz$, *prise tout le long de cette ligne, sera égale à zéro.*

12. Lorsque la fonction u_1 reprend sa valeur initiale après une révolution de Z sur la ligne fermée CLMC, l'intégrale $\int u_1\,dz$ prise tout le long de cette ligne est indépendante du point C qu'on y prend pour origine de l'intégrale. En effet, la ligne CLMC restant la même, si le point C vient à se déplacer sur cette ligne, δc ne sera pas zéro; mais, comme on a, par hypothèse,

$$h_1 = b_1,$$

la variation de l'intégrale $\int u_1\,dz$ sera nulle.

Il n'en est plus de même évidemment, lorsque la fonction ne reprend pas sa valeur initiale après une révolution de Z sur la ligne fermée; car alors la différence $h_1 - b_1$ cesse d'être nulle.

13. Je crois devoir répéter l'observation déjà faite au n° **7**, que la ligne fermée dont il vient d'être question n'est pas nécessairement le contour extérieur d'une aire limitée, comme serait une circonférence ou une ellipse, mais qu'elle peut se couper elle-même comme une lemniscate, et cela un nombre quelconque de fois. Il peut se faire encore qu'une même partie de cette ligne soit parcourue deux ou plusieurs fois dans une révolution accomplie par le point Z. Par exemple, on pourrait la composer des deux circonférences CLAM, BNP, *fig.* 6, et de la droite AB, une révolution du point Z consistant à décrire successivement l'arc CLA, la droite AB, la circonférence BNP, la droite BA, et enfin l'arc AMC. L'habitude où l'on est d'entendre par *ligne fermée* un contour qui ne se coupe pas lui-même me fait insister sur ces remarques, afin qu'on ne restreigne pas inutilement l'étendue des théorèmes précédents [*].

[*] Les théorèmes des n^{os} **9**, **10**, **11** ont été donnés par M. Cauchy dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, année 1846. Seulement l'illustre géomètre caractérise les points que le chemin parcouru ne doit pas franchir en disant que, pour ces points, la fonction devient discontinue : comme je me borne ici aux fonctions algébriques, j'ai cru donner plus de précision aux énoncés et aux démonstrations en disant que les points dont il s'agit sont ceux pour lesquels la fonction u devient infinie ou racine multiple de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

14. Sans rien changer aux démonstrations, on peut, dans les propositions qui viennent d'être établies, substituer à u_1 une fonction rationnelle de u_1 et de z, pourvu qu'elle ne devienne pas infinie le long du chemin suivi par le point Z. De là nous pouvons conclure le développement de u_1 en série.

Soient a, a', a'', etc., les valeurs de z pour lesquelles l'équation

$$f(u, z) = 0$$

a des racines égales ou infinies : nommons A, A′, A″, etc., les points correspondants; joignons le point de départ C de Z aux points A, A′, A″, etc., par des droites, et appelons ρ une quantité positive moindre que la plus petite des longueurs CA, CA′, CA″, etc. Du centre C, avec un rayon égal à ρ, décrivons un cercle σ qui ne renfermera aucun des points A, A′, A″, etc.

Considérons un point intérieur à ce cercle ou situé sur la circonférence : la fonction u_1 peut acquérir en ce point diverses valeurs, suivant que le point Z, parti de C, y arrive par tel ou tel chemin; mais si l'on assujettit ce chemin à ne pas sortir du cercle σ, la fonction u_1 ne pourra plus prendre au point dont il s'agit qu'une seule valeur parfaitement déterminée; car tous les chemins assujettis à cette condition se réduisent les uns aux autres sans franchir aucun des points A, A′, A″, etc. Nous nommerons $\varphi(z)$ cette valeur de la fonction u_1, et c'est elle que nous allons développer en série, en suivant la méthode expliquée par M. Cauchy dans divers Mémoires.

Pour cela, nous prendrons dans l'intérieur du cercle σ un point quelconque Γ; soit γ la valeur correspondante de z. L'expression

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}$$

sera une fonction rationnelle de z et de $\varphi(z)$ qui ne deviendra pas infinie, tant que le point Z ne sortira pas du cercle σ; car, pour $z = \gamma$, elle se réduit à la quantité finie $\varphi'(\gamma)$. Comme d'ailleurs cette fonction reprend la même valeur après une révolution de Z sur la circonférence du cercle σ, l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}\, dz,$$

prise tout le long de cette ligne, sera, d'après le n° **11**, égale à zéro.

On aura donc l'équation

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}\,dz = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(\gamma)\int \frac{dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma},$$

les intégrales étant toujours prises le long de la circonférence σ.

Mais l'intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$ peut être réduite, en vertu du nº **11**, à la même intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$, prise le long d'une autre circonférence décrite du centre Γ avec un très-petit rayon ε. Sur cette dernière, on peut faire

$$z-\gamma = \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}},$$

θ variant seul, de sorte qu'on ait

$$dz = \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}}\,d\theta\sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$\int \frac{dz}{z-\gamma} = \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sqrt{-1}.$$

L'équation précédente devient donc

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma}.$$

Observons maintenant que sur la circonférence σ le module ρ de $z-c$ est supérieur à la distance $C\Gamma$, ou, ce qui est la même chose, au module de $\gamma - c$: l'expression

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{\gamma-c}{z-c}}$$

peut donc être développée en série convergente suivant les puissances croissantes de $\frac{\gamma-c}{z-c}$, et l'on a

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z-c} + \frac{\gamma-c}{(z-c)^2} + \frac{(\gamma-c)^2}{(z-c)^3} + \ldots.$$

On en conclut

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-c} + (\gamma-c)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^2} + (\gamma-c)^2\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^3} + \ldots,$$

où le second membre est une série convergente. On a donc enfin l'équation

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int\frac{\varphi(z)\,dz}{z-c} + (\gamma - c)\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^2} \\ \displaystyle + (\gamma-c)^2\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^3} + \ldots \end{array}\right],$$

qui donne le développement de $\varphi(\gamma)$ en série convergente suivant les puissances croissantes de $\gamma - c$.

15. L'existence de ce développement une fois démontrée, on pourra en calculer les coefficients par le théorème de Taylor, qui donnera

$$\varphi(\gamma) = \varphi(c) + \frac{\varphi'(c)}{1}(\gamma - c) + \frac{\varphi''(c)}{1.2}(\gamma - c)^2 + \ldots.$$

On a dans cette équation

$$\varphi(c) = b_1;$$

si, de plus, on appelle $F_1(u, z)$, $F_2(u, z)$, etc., les valeurs de $1 . \frac{du}{dz}$, $1 . 2 . \frac{d^2u}{dz^2}$, etc., tirées des équations

$$\frac{df}{du}\frac{du}{dz} + \frac{df}{dz} = 0, \quad \frac{df}{du}\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2f}{du^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2f}{du\,dz}\frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2} = 0, \ldots,$$

les quantités $\frac{\varphi'(c)}{1}$, $\frac{\varphi''(c)}{1.2}$, etc., auront pour valeurs $F_1(b_1, c)$, $F_2(b_1, c)$, etc., et il en résultera

$$\text{(F)} \quad \varphi(\gamma) = b_1 + F_1(b_1, c).(\gamma - c) + F_2(b_1, c).(\gamma - c)^2 + \ldots.$$

On voit clairement par ce qui précède quelle est celle des racines de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

dont la formule (F) donne le développement : la série qui en est le second membre fournit la valeur pour $z = \gamma$ de celle des racines qui, se réduisant à b_1 pour $z = c$, varie d'une manière continue avec z, en supposant que le point Z aille de C en Γ sans sortir du cercle σ, c'est-à-dire en supposant que la distance CZ reste toujours moindre que la plus petite des distances CA, CA′, CA″, etc. La formule ne peut s'appliquer qu'aux valeurs de γ telles, que le module de $\gamma - c$ soit inférieur à cette plus petite distance; la notation $\varphi(\gamma)$ n'a même un sens déterminé qu'à cette condition, n° **14**.

16. Soit maintenant k une valeur quelconque de z et K le point correspondant : supposons que le point mobile Z arrive en K par un chemin CMK, *fig.* 7, qui ne passe par aucun des points A, A', A'', etc.; on pourra calculer comme il suit la valeur h_1 de la fonction u_1 pour $z = k$.

Du centre C on décrira un cercle qui laisse en dehors de lui les points A, A', A'', etc. Si ce cercle renferme tout le chemin CMK, on obtiendra h_1 en remplaçant γ par k dans la formule (F). Si le contraire arrive, la circonférence coupera la ligne CMK en un ou plusieurs points : soient C' celui de ces points où Z arrive en premier lieu et c' la valeur correspondante de z; on obtiendra la valeur b'_1 de u_1 au point C' en remplaçant dans la formule (F) γ par c'. Le chemin CMK se trouve partagé par ce point en deux parties, l'une CMC' et l'autre C'M'K : du centre C' on décrira un second cercle qui laisse en dehors tous les points A, A', A'', etc. Si ce cercle renferme tout le chemin C'M'K, on obtiendra h_1 en remplaçant dans la formule (F) c par c', b_1 par b'_1 et γ par k : si le contraire arrive, la circonférence coupera le chemin C'M'K; soient C'' celui des points de rencontre où Z arrive en premier lieu et c'' la valeur correspondante de z. On obtiendra la valeur b''_1 de u_1 au point C'' en remplaçant dans la formule (F) c par c', b_1 par b'_1 et γ par c''. Le chemin C'M'K est maintenant partagé par ce point en deux parties C'M'C'' et C''M''K : du centre C'' on décrira encore un troisième cercle qui laisse en dehors tous les points A, A', A'', etc. En répétant cette construction un nombre limité de fois, on arrivera à un cercle décrit du centre $C^{(n)}$ et qui renfermera complétement le chemin $C^{(n)}M^{(n)}K$; alors on obtiendra h_1 en remplaçant dans la formule (F) c par $c^{(n)}$, b_1 par $b_1^{(n)}$ et γ par k.

Les points C et K restant fixes, si l'on déforme la ligne CMK sans lui faire franchir aucun des points A, A', A'', etc., la quantité h_1 reste la même. On pourra profiter de cette circonstance et aussi de l'indétermination des rayons des cercles pour faciliter le calcul de h_1; mais nous omettrons ces détails pour abréger.

17. Au lieu du développement donné par la formule (F), lequel est applicable tant que le point Z ne sort pas d'un certain cercle, on peut en former une infinité d'autres dont chacun sera exact dans toute l'étendue d'une courbe fermée différente du cercle.

Appelons $\psi(z)$ une fonction rationnelle de z qui s'annule pour $z=c$: si l'on fait, comme précédemment, $z=x+y\sqrt{-1}$, le module de $\psi(z)$, que nous représenterons par $m\psi(z)$, sera une fonction de x et de y, et l'équation

$$m\psi(z)=l,$$

où l désigne une constante positive, appartiendra à une courbe algébrique. Comme au point C on a

$$m\psi(z)=0,$$

il est aisé de voir que, pour des valeurs suffisamment petites de l, une des branches de cette courbe devra se réduire à un contour fermé s dans l'intérieur duquel se trouve le point C [*].

Supposons maintenant que l croissant depuis zéro jusqu'à une certaine valeur λ, le contour s, qui, pour $l=0$, se réduisait au point C, aille toujours en s'élargissant et coïncide, pour $l=\lambda$, avec la courbe fermée σ. Admettons aussi que sur la courbe σ ou dans son intérieur on ne puisse avoir

$$\psi(z)=\psi(z')$$

sans qu'on ait en même temps

$$z=z',$$

que la dérivée de $\psi(z)$ ne s'annule pas dans ces mêmes limites, et, enfin, que tous les points A, A', A'', etc., soient en dehors de cette courbe. Toutes ces conditions seront remplies si l'on prend λ assez petit.

Cela posé, si l'on assujettit Z à ne pas sortir du contour σ, la fonction u_1 ne pourra acquérir en chaque point qu'une seule valeur, quel que soit le chemin par lequel on y arrive. Nous appellerons $\varphi(z)$ cette valeur unique, et nous allons montrer qu'on peut la développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances de $\psi(z)$.

---

[*] Dans les *Comptes rendus de l'Académie*, tome IV, page 777, M. Cauchy examine comment les diverses branches de cette courbe se transforment et se réunissent, lorsque le module l croît de zéro à l'infini.

Prenons dans l'intérieur du contour σ un point quelconque Γ, et nommons γ la valeur correspondante de z. L'expression

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{\psi(z)-\psi(\gamma)}$$

sera une fonction rationnelle de z et de $\varphi(z)$ qui ne deviendra pas infinie tant que le point Z ne sortira pas de ce contour; car, pour $z=\gamma$, elle se réduit à la quantité finie $\frac{\varphi'(\gamma)}{\psi'(\gamma)}$. Comme, d'ailleurs, cette fonction reprend la même valeur après une révolution de Z sur la courbe σ, l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{\psi(z)-\psi(\gamma)}\,dz,$$

prise le long de cette ligne, sera égale à zéro. On aura donc

$$\varphi(\gamma)\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)},$$

d'où

$$\varphi(\gamma)=\frac{\displaystyle\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}}{\displaystyle\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}},$$

les intégrales étant toujours prises le long du contour σ.

L'intégrale

$$\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}$$

s'évalue aisément : on a, en effet,

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{1}{\psi'(\gamma)}\cdot\frac{1}{z-\gamma}+\varpi(z),$$

$\varpi(z)$ désignant une fonction rationnelle de z qui reste finie dans tout l'intérieur de σ ou même sur cette courbe; il en résulte

$$\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{1}{\psi'(\gamma)}\int\frac{dz}{z-\gamma}+\int\varpi(z)\,dz.$$

En vertu du n° **11**, on a

$$\int\varpi(z)\,dz=0;$$

quant à l'intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$, on n'en change pas la valeur en la supposant prise le long d'une circonférence décrite du centre Γ avec un rayon très-petit ε, ce qui permet d'y faire

$$z-\gamma=\varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}},$$

θ variant seul : on a donc

$$\int \frac{dz}{z-\gamma}=\sqrt{-1}\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi\sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$\int \frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\psi'(\gamma)}.$$

Observons à présent que sur la courbe σ le module de $\psi(z)$ est égal à λ, et, par conséquent, supérieur à celui de $\psi(\gamma)$; l'expression

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{1}{\psi(z)}\cdot\frac{1}{1-\frac{\psi(\gamma)}{\psi(z)}}$$

peut donc être développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{\psi(\gamma)}{\psi(z)}$, et l'on a

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{1}{\psi(z)}+\frac{\psi(\gamma)}{\psi^2(z)}+\frac{\psi^2(\gamma)}{\psi^3(z)}+\ldots.$$

On en conclut

$$\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)}+\psi(\gamma)\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^2(z)}+\psi^2(\gamma)\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^3(z)}+\ldots,$$

et, par suite,

$$\varphi(\gamma)=\frac{\psi'(\gamma)}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)}+\psi(\gamma)\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^2(z)}+\psi^2(\gamma)\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^3(z)}+\ldots\right],$$

où les intégrales peuvent être maintenant prises le long d'un contour fermé quelconque renfermé dans la courbe σ et enveloppant une fois le point C.

En réduisant ce contour à une circonférence d'un rayon très-petit ayant le point C pour centre, on prouve facilement que l'intégrale

$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^n(z)}$ est égale à $2\pi r_n\sqrt{-1}$, r_n désignant ce que M. Cauchy appelle le résidu de la fonction $\frac{\varphi(z)}{\psi^n(z)}$ relatif à $z = c$. L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\varphi(\gamma) = \psi'(\gamma)\,[r_1 + r_2\psi(\gamma) + r_3\psi^2(\gamma) + \ldots].$$

Cette formule, qui s'étend à tous les points du contour σ et de son intérieur, donne l'expression de $\varphi(\gamma)$ en une série ordonnée suivant les puissances de $\psi(\gamma)$.

En y faisant

$$\psi(z) = z - c,$$

on retrouve la formule (F); pour en donner une autre application, prenons

$$\psi(z) = (z - c)(z - c'),$$

c' désignant la valeur de z qui répond au point C' : l'équation

$$m(z - c)(z - c') = l$$

représente le lieu des points tels, que le produit de leurs distances aux points C et C' soit égal à l. Pour des valeurs de l moindres que $\frac{1}{4}\Delta^2$, Δ étant la distance CC', le lieu se compose de deux courbes fermées : une de ces courbes enveloppe le point C, elle va en s'élargissant à mesure que l augmente; et pour $l = \frac{1}{4}\Delta^2$, elle devient la moitié POQ, *fig.* 8, d'une lemniscate ayant pour foyers les points C et C'. Si tous les points A, A', A'', etc., sont sur cette demi-lemniscate ou en dehors, on pourra prendre pour le contour σ la courbe fermée infiniment voisine qui répond à $l = \frac{1}{4}\Delta^2 - \varepsilon$, ε désignant un infiniment petit positif; car il est aisé de voir que toutes les conditions énoncées ci-dessus seront remplies. En effet, la dérivée $2z - c - c'$ de $\psi(z)$ ne s'annule que pour la valeur $z = \frac{c + c'}{2}$, qui répond au point O extérieur au contour σ : de plus, l'équation

$$\psi(z) = \psi(z')$$

donne ici pour z' les deux valeurs $z' = z$, $z' = c + c' - z$, et si le point qui répond à la première valeur est situé en dedans du contour σ, celui qui répond à la seconde sera en dehors, puisque ces deux points sont placés symétriquement par rapport au point O.

On aura donc l'équation

$$\varphi(\gamma) = (2\gamma - c - c')\begin{bmatrix} r_1 + r_2(\gamma - c)(\gamma - c') \\ + r_3(\gamma - c)^2(\gamma - c')^2 + \ldots \end{bmatrix},$$

r_n désignant le résidu relatif à $z = c$ de $\frac{\varphi(z)}{(z-c)^n(z-c')^n}$, et cette formule sera applicable tant que le point Γ correspondant à $z = \gamma$ sera dans l'intérieur de la demi-lemniscate FOQ.

Ajoutons qu'en suivant la marche tracée au nº **16**, on pourra se servir de ces nouveaux développements pour le calcul de la fonction u_1 à l'extrémité d'un chemin donné.

DEUXIÈME PARTIE.

18. Nous avons établi que la valeur de la fonction u_1 au point K reste la même, quand le chemin CMK suivi par le point Z vient à se déformer sans franchir aucun point pour lequel cette fonction devienne infinie ou racine multiple de l'équation

$$f(u, z) = 0;$$

nous avons ensuite donné le moyen de calculer cette valeur de u_1, lorsque le chemin CMK est connu. Mais si ce chemin, en se déformant, franchit un ou plusieurs des points dont nous venons de parler, la valeur de u_1 pour le point K changera généralement : il nous faut examiner comment ces diverses valeurs de u_1 se changent les unes dans les autres.

Pour plus de clarté, nous supposerons d'abord que le coefficient de la plus haute puissance de u dans le polynôme $f(u, z)$ soit indépendant de z; alors les valeurs de u tirées de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ne peuvent devenir infinies pour des valeurs finies de z.

Soit maintenant A un point pour lequel p racines de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

deviennent égales : nommons b la valeur commune de ces racines et a la valeur de z au point A. Décrivons autour de ce point un contour fermé de dimensions infiniment petites CLMC, *fig.* 9 [*]; prenons-y un point C pour position initiale du point mobile Z; appelons u_1, $u_2, \ldots, u_p$ les p fonctions de z qui satisfont à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et qui se réduisent pour la position initiale C de z aux p racines très-peu différentes de b de l'équation

$$f(u, c) = 0.$$

On sait qu'après une révolution de Z sur le contour CLMC les fonctions de z, qui satisfont à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et dont les valeurs au point de départ diffèrent infiniment peu des racines simples de l'équation

$$f(u, a) = 0,$$

reprennent leurs valeurs initiales : voyons ce qui arrive aux fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Observons que, pour $u = b$, les polynômes

$$f(u, a), \quad \frac{df(u, a)}{du}, \quad \frac{d^2 f(u, a)}{du^2}, \ldots, \quad \frac{d^{p-1} f(u, a)}{du^{p-1}},$$

doivent s'annuler, mais que la dérivée suivante $\frac{d^p f(u, a)}{du^p}$ doit prendre une valeur A différente de zéro. Si donc dans l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

[*] Nous supposerons dans ce qui va suivre que la ligne infiniment petite CLMC ne fait qu'une seule circonvolution autour du point A, c'est-à-dire que l'angle polaire formé par le rayon vecteur AZ avec une direction fixe varie seulement de 2π, pendant une révolution de Z sur le contour CLMC.

on pose

$$u = b + \beta, \quad z = a + \alpha,$$

elle prendra la forme

$$(1) \qquad A\beta^p + \sum B\beta^q \alpha^r = 0,$$

le signe $\sum$ désignant une somme de termes dans lesquels les exposants q et r sont entiers et positifs; dans les termes où r est nul, q est plus grand que p, et il y a nécessairement un terme au moins où, q étant nul, r ne l'est pas; autrement l'équation (1) serait divisible par β, ou, ce qui est la même chose, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

serait divisible par $u - b$, et, par conséquent, ne serait pas irréductible.

Le point Z étant supposé infiniment voisin de A, le module de la différence $z - a = \alpha$ sera infiniment petit, et, parmi les valeurs correspondantes de u, tirées de l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

il y en aura p telles, que le module de la différence $u - b = \beta$ soit infiniment petit. Si l'on veut les déterminer, il faudra chercher les p valeurs infiniment petites de β qui satisfont à l'équation (1), et, pour les obtenir approximativement, il suffira de conserver, dans cette équation, les termes de l'ordre le moins élevé.

Commençons par le cas le plus ordinaire, celui où la dérivée $\frac{df(u, z)}{dz}$ ne s'annule pas pour $z = a$, $u = b$; alors il y a, dans l'équation (1), un terme de la forme $B\alpha$, et il est clair que les deux termes $A\beta^p$ et $B\alpha$ sont d'un ordre moins élevé que tous les autres. Les p valeurs cherchées de β sont donc données approximativement par l'équation

$$A\beta^p + B\alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \beta^p = h\alpha,$$

en faisant $-\frac{B}{A} = h$. Or, si l'on pose $\alpha = \rho e^{\tau\sqrt{-1}}$, ρ désignant la distance AZ et τ l'angle qu'elle fait avec la direction des x positives; si, de plus, on représente par $(h\rho)^{\frac{1}{p}}$ une des valeurs de $\sqrt[p]{h\rho}$, les p valeurs de β, qui satisfont à l'équation

$$\beta^p = h\alpha,$$

seront

$$\beta_1 = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau}{p}\sqrt{-1}}, \qquad \beta_2 = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+2\pi}{p}\sqrt{-1}},$$
$$\beta_3 = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+4\pi}{p}\sqrt{-1}}, \ldots, \quad \beta_p = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+2(p-1)\pi}{p}\sqrt{-1}}.$$

Lorsque le point Z, après avoir fait une révolution sur le contour CLMC, est revenu à sa position initiale C, le rayon vecteur ρ est redevenu le même sans avoir passé par zéro; le facteur $(h\rho)^{\frac{1}{p}}$ a donc repris sa valeur initiale. Mais l'angle τ a augmenté de 2π, et, par conséquent, β_1 a acquis la valeur initiale de β_2, β_2 a acquis celle de β_3, et ainsi de suite, jusqu'à β_p qui a pris celle de β_1.

Ces conclusions sont rigoureuses, bien que les valeurs précédentes de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ ne soient qu'approchées. En effet, nommons maintenant $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ les valeurs exactes de ces fonctions; l'erreur commise sur chacune d'elles dans les formules précédentes est un infiniment petit d'un ordre supérieur à $\frac{1}{p}$, en regardant ρ comme du premier ordre. Mais le système des valeurs de β fournies par l'équation (1) doit se retrouver le même quand le point Z est revenu à son point de départ. Si donc la valeur finale de β_1, après une révolution de Z, n'était pas exactement égale à la valeur initiale de β_2, il faudrait qu'elle fût égale à la valeur initiale de quelque racine de l'équation (1) autre que β_2; or cela est impossible, puisqu'elle différerait de cette valeur initiale ou d'une quantité finie, ou d'un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{p}$, qui ne peut être nul tant que ρ ne l'est pas. On voit de même que la valeur finale de β_2 est rigoureusement égale à la valeur initiale de β_3, et ainsi de suite. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ ne se réduit pas à zéro pour $z = a$, $u = b$, les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$, qui deviennent égales à b au point A, peuvent *être rangées sur un cercle de façon qu'après une révolution de* Z *sur un contour infiniment petit tracé autour du point* A, *la valeur finale de chacune d'elles soit égale à la valeur initiale de la suivante.*

C'est ce que nous énoncerons d'une manière abrégée en disant que ces fonctions forment autour du point A un *système circulaire* composé de p termes.

On a admis dans la démonstration que le point Z parcourait le contour CLMC dans le sens où l'angle polaire τ augmente et que nous appellerons le *sens direct* : s'il le parcourait en sens contraire, les valeurs finales de u_1, u_2, u_3,..., u_p seraient respectivement les valeurs initiales de u_p, u_1, u_2,..., u_{p-1}.

Si le point Z faisait dans le sens direct deux révolutions au lieu d'une, les valeurs finales des fonctions u_1, u_2,..., u_p seraient respectivement égales aux valeurs initiales de u_3, u_4,..., u_2 : après trois révolutions, elles seraient égales aux valeurs initiales de u_4, u_5,..., u_3, et ainsi de suite. Ce n'est qu'après p révolutions du point Z que ces fonctions auront repris leurs valeurs initiales.

19. Lorsque la dérivée $\frac{df(u, z)}{dz}$ s'annule pour $z = a$, $u = b$, les propositions précédentes ne sont plus toujours exactes : pour savoir ce que les racines deviennent dans ce cas après une révolution du point Z, revenons à l'équation (1) et cherchons à y mettre en évidence les termes de l'ordre le moins élevé. Soit T un terme quelconque; il y aura deux cas à distinguer : ou bien il n'existera dans l'équation (1) aucun autre terme dans lequel les exposants de α et de β soient à la fois moindres que dans T (l'un des deux pouvant être égal), ou bien il existera de pareils termes. Appelons Λ la somme des termes T qui sont dans le premier cas et Λ' la somme des autres, de sorte qu'on ait

$$f(b + \beta,\ a + \alpha) = \mathrm{A}\beta^p + \sum \mathrm{B}\beta^q \alpha^r = \Lambda + \Lambda';$$

les termes de l'ordre le moins élevé se trouveront certainement dans le groupe Λ. D'ailleurs, si l'on range les termes de Λ dans un ordre tel, que les exposants de β aillent en diminuant, les exposants de α devront aller en augmentant, sans quoi les exposants de α et de β dans un de ces termes seraient respectivement moindres que dans un autre, et alors ce dernier ferait partie du groupe A'. Si donc on désigne par p, p_1, $p_2, \ldots, p_{i-1}$ des nombres entiers décroissants, et par $q_1, q_2, \ldots, q_i$ des nombres entiers croissants, A sera de la forme

$$A = A\beta^p + A_1\beta^{p_1}\alpha^{q_1} + A_2\beta^{p_2}\alpha^{q_2} + \ldots + A_i\alpha^{q_i}.$$

Voici maintenant la question qui se présente : Dans le polynôme A, choisir de toutes les manières possibles un groupe de deux ou de plusieurs termes tels, qu'en y regardant α comme un infiniment petit du premier ordre et β comme un infiniment petit d'un ordre convenable, ces termes soient d'un même ordre inférieur à celui de tous les autres termes du polynôme.

Quand on aura trouvé tous ces groupes, on formera, en les égalant à zéro, des équations dont chacune déterminera approximativement une ou plusieurs des p valeurs infiniment petites de β.

Supposons donc qu'en regardant β comme de l'ordre μ, les deux termes

$$A^{(f)}\beta^{p_f}\alpha^{q_f}, \quad A^{(g)}\beta^{p_g}\alpha^{q_g},$$

soient d'un même ordre, et que tous les autres termes de A soient d'un ordre au moins égal; on aura

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g,$$

et, pour toutes les valeurs de h autres que f et g,

$$\mu p_h + q_h > \mu p_f + q_f,$$

le signe $>$ n'excluant pas l'égalité. (Pour que ces notations s'appliquent aux termes extrêmes de A, on supposera $p_0 = p$, $q_0 = 0$, $p_i = 0$.)

On rend l'interprétation de ces conditions plus facile en leur donnant une signification géométrique. Regardons les nombres entiers p_k et q_k comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point que nous appellerons M_k; alors le point M_0, *fig.* 10, sera sur l'axe des x, le point M_i sur l'axe des y, et tous les autres points M_k dans l'angle des coordonnées positives. De plus, la droite qui joint deux quelconques de ces points M_k, M_l rencontrera les axes des x et des y du côté des coordonnées positives; cela résulte de ce que si l'abscisse p_k est plus grande que l'abscisse p_l, l'ordonnée q_k sera moindre, au contraire, que l'ordonnée q_l.

D'un autre côté, si l'on construit la droite OL dont le coefficient angulaire est $\frac{1}{\mu}$, la quantité $\frac{\mu p_k + q_k}{\sqrt{1+\mu^2}}$ exprimera la projection de OM_k sur OL, et puisqu'on doit avoir

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g,$$

on voit que les projections de OM_f et de OM_g sur OL doivent être égales, ou, en d'autres termes, que OL doit être perpendiculaire sur la droite $M_f M_g$. De plus, on doit avoir

$$\mu p_h + q_h > \mu p_f + q_f;$$

par conséquent, la projection de OM_h sur OL doit être supérieure ou au moins égale à celle de OM_f. En d'autres termes, le point M_h doit être par rapport à l'origine au delà de la droite $M_f N_g$, ou du moins sur cette droite.

Ainsi, pour obtenir dans le polynôme A les groupes de termes définis ci-dessus, ou, ce qui revient au même, pour connaître ceux des points M_0, M_1, M_2, etc., auxquels correspondent les termes de ces groupes, on cherchera de toutes les manières possibles deux points M_f, M_g tels, qu'il n'y en ait aucun autre situé, par rapport à la droite $M_f M_g$ qui les joint, du même côté que l'origine. Sur cette droite pourront se trouver encore d'autres points M_k, M_l, etc. : alors un des groupes demandés sera

$$G = A^{(f)}\beta^{p_f}\alpha^{q_f} + A^{(g)}\beta^{p_g}\alpha^{q_g} + A^{(k)}\beta^{p_k}\alpha^{q_k} + A^{(l)}\beta^{p_l}\alpha^{q_l} + \ldots;$$

si l'on détermine le nombre μ par l'équation

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g,$$

qui donne

$$\mu = \frac{q_g - q_f}{p_f - p_g},$$

et qu'on regarde β comme étant de l'ordre μ, tous les termes de ce groupe seront d'un même ordre $\mu p_f + q_f$ inférieur à l'ordre de tous les autres termes de A, et, par conséquent, de tous les autres termes de l'équation (1).

Pour former les groupes G sans en laisser échapper aucun, on pourra procéder comme il suit. Par le point M_0, *fig.* 11, on imaginera une droite coïncidant d'abord avec l'axe des x, et on la fera tourner autour de M_0 dans un sens tel, qu'elle rencontre la partie positive de l'axe des y. On arrêtera ce mouvement de rotation dès que la droite mobile passera par quelqu'un des points M_1, M_2, etc. : à ce moment elle en pourra contenir plusieurs, et, si nous les nommons M_ε, $M_\zeta, \ldots, M_\eta$, les indices $\varepsilon, \zeta, \ldots, \eta$ étant rangés par ordre de grandeur, les termes de A correspondants aux points M_0, M_ε, $M_\zeta, \ldots, M_\eta$ formeront un premier groupe. Faisons maintenant tourner la droite mobile, toujours dans le même sens, mais autour du point M_η, jusqu'à ce qu'elle atteigne quelqu'un des points $M_{\eta+1}, M_{\eta+2}$, etc., et soient M_η, $M_\theta, \ldots, M_\iota$ les points qu'elle renferme dans cette nouvelle position : les termes de A correspondants aux points $M_\eta, M_\theta, \ldots, M_\iota$ composeront un deuxième groupe. Faisons encore tourner la droite mobile autour de M_ι, jusqu'à ce qu'elle atteigne de nouveaux points $M_\varkappa, \ldots, M_\lambda$: nous obtiendrons un troisième groupe formé des termes correspondants aux points M_ι, $M_\varkappa, \ldots, M_\lambda$, et ainsi de suite. On continuera jusqu'à ce que la droite mobile passe par le dernier point M_i : les divers groupes ainsi formés seront :

$$
\begin{aligned}
G_1 &= A\beta^{p} + A^{(\varepsilon)}\beta^{p_\varepsilon}\alpha^{q_\varepsilon} + \ldots + A^{(\eta)}\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta},\\
G_2 &= A^{(\eta)}\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta} + A^{(\theta)}\beta^{p_\theta}\alpha^{q_\theta} + \ldots + A^{(\iota)}\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota},\\
G_3 &= A^{(\iota)}\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota} + A^{(\varkappa)}\beta^{p_\varkappa}\alpha^{q_\varkappa} + \ldots + A^{(\lambda)}\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\lambda},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
G_\omega &= A^{(\varpi)}\beta^{p_\varpi}\alpha^{q_\varpi} + \ldots + A^{(i)}\alpha^{q_i},
\end{aligned}
$$

où l'on peut remarquer que le premier terme du premier groupe G_1 est indépendant de α; que le dernier terme du dernier groupe G_ω est indépendant de β; et, enfin, que le dernier terme de chaque groupe est en même temps le premier terme du groupe suivant [*].

[*] La règle qu'on vient de donner pour le mouvement de la droite mobile subsisterait encore, si, outre les points M correspondants aux termes de A, on avait encore

Si maintenant on égale successivement ces divers groupes à zéro, on aura les équations qui fournissent, approximativement, les valeurs infiniment petites de β. L'équation

$$G_1 = 0,$$

divisée par β^{p_η}, nous donnera $p - p_\eta$, valeurs de β, qui seront de l'ordre $\frac{q_\eta}{p - p_\eta}$; de même l'équation

$$G_2 = 0,$$

divisée par $\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\eta}$, fournira $p_\eta - p_\iota$, valeurs qui seront de l'ordre $\frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$; puis l'équation

$$G_3 = 0,$$

divisée par $\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\iota}$, en donnera $p_\iota - p_\lambda$, de l'ordre $\frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda}$, et ainsi de suite. Enfin, de l'équation

$$G_\omega = 0,$$

divisée par α^{q_ϖ}, on tirera p_ϖ, valeurs de β, de l'ordre $\frac{q_i - q_\varpi}{p_\varpi}$. Le nombre total de ces valeurs infiniment petites de β est

$$p - p_\eta + p_\eta - p_\iota + p_\iota - p_\lambda + \ldots + p_\varpi,$$

ou simplement p, comme cela devait être.

Il suit de la construction expliquée ci-dessus, que le polygone $M_0 M_\eta M_\iota \ldots M_\varpi M_i$ est convexe et tourne sa convexité vers l'origine; les valeurs numériques des coefficients angulaires des droites $M_0 M_\eta$, $M_\eta M_\iota$, $M_\iota M_\lambda$, ..., $M_\varpi M_i$ vont donc en augmentant, de sorte qu'on a

$$\frac{q_\eta}{p - p_\eta} < \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota} < \frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda} < \ldots < \frac{q_i - q_\varpi}{p_\varpi},$$

le signe $<$ excluant l'égalité. Ainsi, les valeurs infiniment petites de β

---

construit ceux qui répondent aux différents termes de A'; car aucun de ceux-ci ne peut être, par rapport à la droite mobile, du même côté que l'origine. La séparation du premier membre de l'équation (1) dans les deux polynômes A et A' n'est donc pas indispensable pour la recherche des groupes G_1, G_2, etc.; mais elle l'abrége.

fournies par l'équation

$$G_1 = 0,$$

sont d'un ordre moindre que celles qu'on tire de l'équation

$$G_2 = 0;$$

celles-ci, à leur tour, sont d'un ordre moindre que celles qui sont données par l'équation

$$G_3 = 0,$$

et ainsi de suite.

Considérons en particulier une de ces équations, par exemple l'équation

$$G_2 = 0,$$

qui peut s'écrire

$$A^{(\eta)}\beta^{p_\eta - p_\iota} + A^{(\theta)}\beta^{p_\theta - p_\iota}\alpha^{q_\theta - q_\eta} + \ldots + A^{(\iota)}\alpha^{q_\iota - q_\eta} = 0.$$

L'ordre μ des valeurs de β qu'on en tire étant, comme on l'a vu, égal à $\frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$, si l'on appelle r et s les quotients de $q_\iota - q_\eta$ et de $p_\eta - p_\iota$ par leur plus grand commun diviseur φ, on aura

$$\mu = \frac{r}{s};$$

d'ailleurs, tous les termes de l'équation précédente étant du même ordre, on a

$$\mu(p_\eta - p_\iota) = \mu(p_\theta - p_\iota) + q_\theta - q_\eta = \ldots = q_\iota - q_\eta;$$

il en résulte, en multipliant par s,

$$r(p_\eta - p_\iota) = r(p_\theta - p_\iota) + s(q_\theta - q_\eta) = \ldots = s(q_\iota - q_\eta) = rs\varphi.$$

On voit, par là, que la somme $r(p_\theta - p_\iota) + s(q_\theta - q_\eta)$ étant divisible par s, ainsi que la partie $s(q_\theta - q_\eta)$, l'autre partie $r(p_\theta - p_\iota)$ doit l'être aussi, et comme s est premier avec r, $\frac{p_\theta - p_\iota}{s}$ doit être un nombre entier ψ. Dans l'équation

$$r(p_\theta - p_\iota) + s(q_\theta - q_\eta) = rs\varphi,$$

remplaçons $p_\theta - p_\iota$ par $s\psi$, et il viendra

$$q_\theta - q_\eta = r(\varphi - \psi);$$

l'équation

$$G_2 = 0$$

peut donc se mettre sous la forme

$$A^{(\eta)}\beta^{s\varphi} + A^{(\theta)}\beta^{s\psi}\alpha^{r(\varphi-\psi)} + \ldots + A^{(\iota)}\alpha^{r\varphi} = 0,$$

ou bien, en posant $\beta^s = \alpha^r x$,

$$(2) \qquad A^{(\eta)}x^{\varphi} + A^{(\theta)}x^{\psi} + \ldots + A^{(\iota)} = 0.$$

Cette équation détermine pour x un nombre φ de valeurs toutes différentes de zéro, que nous désignerons par $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$, et que nous supposerons d'abord toutes inégales. Si nous prenons $x = h_1$, et que nous fassions, comme ci-dessus, $\alpha = \rho e^{\tau\sqrt{-1}}$, la relation $\beta^s = \alpha^r x$ nous donnera pour β les s valeurs suivantes :

$$(3) \begin{cases} \beta_1 = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r\tau}{s}\sqrt{-1}}, & \beta_2 = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+2\pi)}{s}\sqrt{-1}}, \\ \beta_3 = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+4\pi)}{s}\sqrt{-1}}, \ldots, & \beta_s = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r[\tau+2(s-1)\pi]}{s}\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

où $(h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}}$ désigne une quelconque des valeurs de $\sqrt[s]{h_1\rho^r}$. En remplaçant successivement dans ces valeurs h_1 par $h_2, h_3, \ldots, h_\varphi$, nous aurons toutes les valeurs approchées de β au nombre de $s\varphi = p - p_\eta$, qui correspondent à l'équation

$$G_2 = 0.$$

Lorsque le point Z, après une révolution dans le sens direct autour du point A, revient à sa position initiale C, ρ est redevenu le même sans avoir passé par zéro, et, par conséquent, le facteur $(h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}}$ a repris sa valeur initiale. Mais l'angle τ a augmenté de 2π : chacune des s valeurs de β qui composent la suite (3) est donc devenue égale à la valeur initiale de celle qui la suit. Cette conclusion est rigoureuse, bien que les expressions (3) ne soient qu'approchées; en d'autres termes, si l'on appelle β_k et β_{k+1} les valeurs exactes des deux fonctions de α qui ont pour valeurs approchées

$$(h_1 \rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+(2k-2)\pi)}{s}\sqrt{-1}}, \quad (h_1 \rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+2k\pi)}{s}\sqrt{-1}},$$

je dis qu'après une révolution de Z sur le contour très-petit CLMC, *fig.* 9, la valeur finale de β_k sera exactement égale à la valeur initiale de β_{k+1}.

En effet, le système de toutes les valeurs de β doit se retrouver le même après une révolution de Z, et, par conséquent, la valeur finale de β_k doit être égale à la valeur initiale de quelque autre racine β' de l'équation (1). On voit d'abord que β' doit, comme β_k, se réduire à zéro avec α, et qu'ainsi elle doit être donnée approximativement par une des équations

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \ldots, \quad G_\omega = 0;$$

de plus elle doit être, comme β_k, un infiniment petit de l'ordre $\frac{r}{s} = \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$; il faut donc qu'elle réponde à l'équation

$$G_2 = 0,$$

puisque les racines qui répondent aux équations

$$G_1 = 0, \quad G_3 = 0, \ldots, \quad G_\omega = 0,$$

sont, ainsi qu'on l'a vu, d'ordres différents. Maintenant, dans les formules (3), les erreurs commises sont des infiniment petits d'un ordre supérieur à $\frac{r}{s}$; la fonction β' ne peut donc être que β_{k+1}, sans quoi sa valeur initiale, qui doit être égale à la valeur finale de β_k, en différerait par une quantité de l'ordre $\frac{r}{s}$.

On voit par ce qui précède que les valeurs infiniment petites de β données par l'équation

$$G_2 = 0,$$

se partagent en φ groupes correspondants aux racines $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$ de l'équation (2), et que les s fonctions qui composent un même groupe peuvent être rangées circulairement dans un ordre tel, que chacune d'elles devienne égale, après une révolution de Z, à la valeur initiale de la suivante. En d'autres termes, chacun de ces groupes est un système circulaire, n° **18**.

On peut appliquer la même méthode à toutes les équations

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \ldots, \quad G_\omega = 0.$$

Nommons φ_1 le plus grand commun diviseur de $p - p_\eta$ et de q_η, φ_2 celui de $p_\eta - p_\iota$ et de $q_\iota - q_\eta$, φ_3 celui de $p_\iota - p_\lambda$ et de $q_\lambda - q_\iota$, et ainsi de suite; enfin, φ_ω celui de p_ϖ et de $q_\iota - q_\varpi$: appelons $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_\omega$ les nombres entiers $\frac{p - p_\eta}{\varphi_1}, \frac{p_\eta - p_\iota}{\varphi_2}, \frac{p_\iota - p_\lambda}{\varphi_3}, \ldots, \frac{p_\varpi}{\varphi_\omega}$. Nous trouverons que les valeurs infiniment petites de β données par l'équation

$$G_1 = 0$$

se partagent en φ_1 systèmes circulaires composés chacun de s_1 termes : de même, les valeurs données par l'équation

$$G_2 = 0$$

se partagent en φ_2 systèmes circulaires de s_2 termes, et ainsi de suite jusqu'aux valeurs données par l'équation

$$G_\omega = 0,$$

lesquelles se partagent en φ_ω systèmes circulaires de s_ω termes.

Rappelons-nous maintenant qu'en vertu des relations

$$z = a + \alpha, \quad u = b + \beta,$$

les valeurs de β qui s'annulent avec α correspondent aux fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de z qui se réduisent à b pour $z = a$, et nous en conclurons que les fonctions de z désignées ci-dessus par u_1, u_2, u_p peuvent toujours être partagées en un certain nombre de systèmes circulaires relativement au point A. Observons que le nombre de ces systèmes peut se réduire à l'unité : s'il y en a plusieurs, le nombre des termes qui les composent peut varier d'un système à l'autre; enfin il peut y avoir des systèmes qui ne soient composés que d'un seul terme.

Ajoutons qu'il est permis de comprendre dans l'énoncé précédent non-seulement les fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_p$ dont les valeurs initiales diffèrent infiniment peu de b, mais encore les autres fonctions u_{p+1}, u_{p+2}, etc., dont les valeurs initiales sont très-peu différentes des racines simples de l'équation

$$f(u, a) = 0.$$

Car chacune de ces dernières, reprenant sa valeur initiale après une révolution du point Z sur le contour CLMC, peut être regardée comme formant un système circulaire composé d'un seul terme. Nous arrivons donc à la proposition suivante :

Les diverses fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_m$ qui satisfont à l'équation

$$f(u, z) = 0$$

peuvent toujours se partager, relativement au point A, *en un certain nombre de systèmes circulaires.*

26. On a admis dans la démonstration précédente que l'équation (2) et les autres équations pareilles qui correspondent aux polynômes G_1, $G_2, \ldots, G_\omega$ avaient toutes leurs racines inégales. Supposons à présent que l'équation (2) ait t racines égales à h_1; alors chacune des formules de la suite (3) donne à la fois l'expression approchée de t valeurs de β, et pour les distinguer, il faut recourir à des expressions plus approchées des st valeurs de β correspondantes à la racine h_1.

Pour cela, on posera

$$\alpha = \alpha'^s, \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^r + \beta';$$

on substituera ces valeurs dans l'équation (1), et l'on obtiendra entre α' et β' une équation (1'), qui devra fournir st valeurs de β' infiniment petites, d'un ordre supérieur au nombre r, α' étant regardé maintenant comme du premier ordre. On appliquera à l'équation (1') la même méthode dont on s'est servi pour distinguer, dans l'équation (1), les termes de l'ordre le moins élevé; on trouvera ainsi, pour déterminer approximativement β', des équations analogues aux équations

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \text{ etc.},$$

et l'on ne conservera que celles qui donnent pour β' des valeurs d'un ordre supérieur à r.

Soit $G' = 0$ une de ces équations; on pourra trouver deux nombres entiers r' et s' tels, qu'en faisant $\beta'^{s'} = \alpha'^{r'} x'$, l'équation $G' = 0$ prenne la forme

$$(2') \qquad A' x'^{\varphi'} + B' x'^{\psi'} + \ldots = 0,$$

analogue à l'équation (2). Admettons que l'équation (2′) n'ait pas de racines égales, et soit h' une de ses racines. Parmi les st valeurs de β dont nous nous occupons, il y en aura ss' qui seront données, approximativement, par les formules

$$\alpha'^{s} = \alpha, \quad \beta'^{s'} = \alpha'^{r'} h', \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^{r} + \beta',$$

ou, ce qui est la même chose, par l'équation

$$\beta = h_1^{\frac{1}{s}} \rho^{\frac{r}{s}} e^{\frac{r(\tau + 2k\pi)}{s}\sqrt{-1}} + h' \rho^{\frac{r'}{ss'}} e^{\frac{r'\left(\frac{\tau + 2k\pi}{s} + 2k'\pi\right)}{s'}\sqrt{-1}},$$

k désignant un des nombres $0, 1, 2, \ldots, s-1$, et k' un des nombres $0, 1, 2, \ldots, s'-1$.

Représentons le second membre par $\beta_{k,k'}$; les ss' valeurs dont il est susceptible pourront être rangées circulairement dans l'ordre suivant :

$$(3') \left\{ \begin{array}{l} \beta_{0,0}, \ \beta_{1,0}, \ \beta_{2,0}, \ldots, \ \beta_{s-1,0}, \ \beta_{0,1}, \ \beta_{1,1}, \ \beta_{2,1}, \ldots, \ \beta_{s-1,1}, \ \beta_{0,2}, \ldots, \\ \beta_{0,s'-1}, \ \beta_{1,s'-1}, \ \beta_{2,s'-1}, \ldots, \ \beta_{s-1,s'-1}. \end{array} \right.$$

Si maintenant nous supposons que le point Z fasse une révolution dans le sens direct sur le contour CLMC, *fig.* 9, l'angle τ croîtra de 2π, et chacune des valeurs de β comprises dans la suite qu'on vient d'écrire deviendra égale à la valeur initiale de la suivante : elles forment donc un système circulaire. Aux diverses racines h' de l'équation (2′) répondront de semblables systèmes de valeurs de β, et, par conséquent, la proposition énoncée à la fin du n° **19** ne cesse pas d'être vraie dans le cas qui nous occupe.

Si l'équation (2′) avait elle-même des racines multiples, par exemple t' racines égales à h', il répondrait à cette racine $ss't'$ valeurs de β, et chacune des expressions de la suite (3′) serait la valeur approchée de

t' d'entre elles. Alors on ferait

$$\alpha = \alpha'^{s} = \alpha''^{ss'}, \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha''^{rs'} + h'^{\frac{1}{s'}} \alpha''^{r'} + \beta'';$$

on substituerait ces valeurs dans l'équation (1) et l'on obtiendrait, entre α'' et β'', une équation (1″) qui devrait fournir, pour β'', $ss't'$ valeurs infiniment petites d'un ordre supérieur à r', α'' étant regardé comme du premier ordre. On continuera l'application de cette méthode, jusqu'à ce qu'on ait des expressions approchées distinctes pour toutes les valeurs infiniment petites de β, et cela arrivera nécessairement, sans quoi il y aurait des valeurs de β égales entre elles, quel que fût α, c'est-à-dire des valeurs de u égales entre elles, quel que fût z, et l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ne serait pas irréductible. On voit en même temps, par la forme de ces expressions approchées, que les valeurs de β se partageront toujours en systèmes circulaires; nous pouvons donc conclure enfin que la proposition du n° **19** est vraie dans tous les cas.

21. Nous venons de prouver que les fonctions de z désignées par $u_1, u_2, \ldots, u_p$, se partagent toujours en un certain nombre de systèmes circulaires; nous avons donné, de plus, une méthode pour effectuer ce partage. Il ne sera pas inutile de faire voir que la même méthode fournit les expressions de ces fonctions en séries convergentes ordonnées suivant les puissances fractionnaires de $z - a$.

Lorsque le nombre p se réduit à l'unité, on retombe sur le cas déjà traité au n° **14**, où la fonction u_1 se développe suivant les puissances entières de $z - a$. Passons au cas du n° **18**, où le nombre p étant quelconque, la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ est supposée ne pas s'annuler pour $u = b$, $z = a$.

Conservons les notations de ce numéro; seulement, mettons l'équation (1) sous la forme

$$A\beta^p + B\alpha + \sum C\beta^q\alpha^r = 0,$$

où r ne peut être nul, à moins que q ne soit plus grand que p, et où q ne peut être nul, à moins que r ne soit plus grand que 1. Faisons $\alpha = \alpha'^p$, α' désignant une nouvelle variable; les p valeurs infiniment petites de β seront du même ordre que α': si donc on pose $\beta = \alpha' v$, les p valeurs correspondantes de v seront finies. L'équation (1) devient alors, en la divisant par α'^p,

$$\mathrm{A}\, v^p + \mathrm{B} + \sum \mathrm{C}\, v^q \alpha'^{(r-1)p+q} = 0, \tag{4}$$

où l'exposant $(r-1)p+q$ est au moins l'unité : on voit bien que pour $\alpha' = 0$, elle donne p valeurs de v finies et inégales que nous appellerons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ et qui sont les diverses valeurs de $\sqrt[p]{-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}}$. Si maintenant nous appelons v_n la fonction continue de α' qui, satisfaisant à l'équation (4), se réduit à γ_n pour $\alpha' = 0$, nous conclurons du n° **14** qu'elle peut se développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières de α', tant que le module de α' reste inférieur au plus petit des modules des valeurs de α' différentes de zéro qui font acquérir à l'équation (4) des racines égales ou infinies. Nous pouvons donc poser, dans ces limites,

$$v_n = \gamma_n + a_n \alpha' + b_n \alpha'^2 + c_n \alpha'^3 + \ldots,$$

où les coefficients a_n, b_n, c_n, etc., sont des fonctions rationnelles de γ_n et des coefficients de l'équation (4) et s'obtiennent sans difficulté par le théorème de Taylor. Nous aurons, par conséquent, en appelant β_n la valeur correspondante de β,

$$\beta_n = \gamma_n \alpha' + a_n \alpha'^2 + b_n \alpha'^3 + c_n \alpha'^4 + \ldots,$$

ou bien

$$\beta_n = \gamma_n \alpha^{\frac{1}{p}} + a_n \alpha^{\frac{2}{p}} + b_n \alpha^{\frac{3}{p}} + c_n \alpha^{\frac{4}{p}} + \ldots.$$

Comme le module de α augmente ou diminue en même temps que celui de α', cette formule sera applicable tant que le module de α sera inférieur au plus petit des modules des valeurs de α autres que zéro, qui font acquérir des racines égales à l'équation (1). En d'autres termes, tant que le point Z sera renfermé dans le cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA′, AA″, etc., pour rayon, on aura l'équation

$$u_n = \gamma_n (z-a)^{\frac{1}{p}} + a_n (z-a)^{\frac{2}{p}} + b_n (z-a)^{\frac{3}{p}} + c_n (z-a)^{\frac{4}{p}} + \ldots.$$

En y remplaçant successivement l'indice n par chacun des nombres $1, 2, \ldots, p$, on obtiendra les expressions des p fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ en séries convergentes ordonnées suivant les puissances fractionnaires de $z-a$.

22. Supposons maintenant, comme au n° **19**, que la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ s'annule pour $u=a$, $z=b$, de sorte que le terme $B\alpha$ manque dans l'équation (1). Considérons, en particulier, les $s\varphi$ valeurs infiniment petites de β qui sont données approximativement par l'équation

$$G_2 = 0,$$

et observons que l'équation (1), à laquelle elles satisfont exactement, peut se mettre sous la forme

$$G_2 + \sum C\beta^k \alpha^l = 0,$$

les termes de la somme $\sum$ étant d'un ordre plus élevé que ceux de G_2, quand on regarde α comme du premier ordre et β comme de l'ordre $\mu = \frac{r}{s}$: cela revient à dire qu'on aura

$$\frac{r}{s} k + l > \frac{r}{s} p_\eta + q_\eta,$$

ou bien

$$r(k - p_\eta) + s(l - q_\eta) > 0,$$

le signe $>$ excluant l'égalité.

Faisons maintenant $\alpha = \alpha'^s$; les valeurs de β dont nous occupons seront du même ordre que α'^r, et si nous posons $\beta = \alpha'^r v$, les $s\varphi$ valeurs correspondantes de v seront finies. L'équation (1) devient alors, en la divisant par $\alpha'^{rp_\eta + sq_\eta}$,

$$A^{(\eta)} v^{p_\eta} + A^{(\theta)} v^{p_\theta} + \ldots + A^{(\iota)} v^{p_\iota} + \sum C v^k \alpha'^{r(k-p_\eta)+s(l-q_\eta)} = 0,$$

ou bien, en désignant par σ un nombre entier au moins égal à 1,

$$(5) \qquad \nu^{p_\iota}\left(\mathrm{A}^{(\eta)}\nu^{s\varphi} + \mathrm{A}^{(\theta)}\nu^{s\psi} + \ldots + \mathrm{A}^{(\iota)}\right) + \sum \mathrm{C}\nu^k \alpha'^\sigma = 0.$$

On voit, en effet, que, pour $\alpha' = 0$, cette équation se réduisant à

$$(6) \qquad \mathrm{A}^{(\eta)}\nu^{s\varphi} + \mathrm{A}^{(\theta)}\nu^{s\psi} + \ldots + \mathrm{A}^{(\iota)} = 0,$$

donne pour ν un nombre $s\varphi$ de valeurs finies et différentes de zéro : en désignant comme ci-dessus par $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$ les racines de l'équation (2), celles de l'équation (6), que nous appellerons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{s\varphi}$, ne seront autre chose que les diverses valeurs des radicaux $\sqrt[s]{h_1}$, $\sqrt[s]{h_2}, \ldots, \sqrt[s]{h_\varphi}$; elles seront donc toutes inégales, si l'équation (2) a elle-même toutes ses racines inégales, ce que nous supposerons d'abord.

Nommons ν_n la fonction continue de α' qui, satisfaisant à l'équation (5), se réduit à γ_n pour $\alpha' = 0$; on pourra, d'après le n° **14**, la développer suivant les puissances entières de α', tant que le module de α' restera inférieur au plus petit des modules des valeurs de α' autres que zéro qui font acquérir à l'équation (5) des racines égales ou infinies. Soit donc, dans ces limites,

$$\nu_n = \gamma_n + a_n\alpha' + b_n\alpha'^2 + \ldots;$$

il s'ensuivra, en appelant β_n la valeur correspondante de β,

$$\beta_n = \gamma_n\alpha'^r + a_n\alpha'^{r+1} + b_n\alpha'^{r+2} + \ldots,$$

ou bien

$$\beta_n = \gamma_n\alpha^{\frac{r}{s}} + a_n\alpha^{\frac{r+1}{s}} + b_n\alpha^{\frac{r+2}{s}} + \ldots.$$

Par conséquent, celles des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ qui sont déterminées approximativement par l'équation

$$\mathrm{G}_2 = 0$$

seront exprimées par la série

$$\gamma_n(z-a)^{\frac{r}{s}} + a_n(z-a)^{\frac{r+1}{s}} + b_n(z-a)^{\frac{r+2}{s}} + \ldots,$$

où l'indice n doit être remplacé successivement par les nombres 1, 2,..., n, et les formules ainsi obtenues seront applicables, tant que le point Z sera renfermé dans le cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA', AA'', etc., pour rayon.

23. Admettons ensuite, comme au n° **20**, que l'équation (2) ait t racines égales à h_1, mais que l'équation (2') ait toutes ses racines inégales. En conservant les notations de ce numéro, et posant

$$\alpha' = \alpha''^{s'}, \quad \beta' = \alpha''^{r'} v,$$

on verra, comme tout à l'heure, que les fonctions v qui répondent aux valeurs de β' déterminées approximativement par l'équation

$$G' = 0,$$

ont, pour $\alpha'' = 0$, des valeurs finies inégales et peuvent être développées suivant les puissances entières de α''. Les valeurs correspondantes de β seront donc exprimées par des séries de la forme

$$h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^{r} + \gamma_n \alpha''^{r'} + a_n \alpha''^{r'+1} + b_n \alpha''^{r'+2} + \ldots$$
$$= h_1^{\frac{1}{s}} \alpha''^{rs'} + \gamma_n \alpha''^{r'} + a_n \alpha''^{r'+1} + b_n \alpha''^{r'+2} + \ldots,$$

et, par conséquent, celles des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$, qui répondent à l'équation

$$G' = 0,$$

pourront se développer sous la forme

$$h_1^{\frac{1}{s}} (z-a)^{\frac{rs'}{ss'}} + \gamma_n (z-a)^{\frac{r'}{ss'}} + a_n (z-a)^{\frac{r'+1}{ss'}} + b_n (z-a)^{\frac{r'+2}{ss'}} + \ldots.$$

Si l'équation (2') avait elle-même des racines égales, on continuerait l'application de cette méthode, jusqu'à ce qu'on arrivât à une équation analogue aux équations (2) et (2') qui n'eût plus de racines égales. De cette manière, on trouvera pour toutes les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$, des expressions en séries ordonnées suivant les puissances fractionnaires de $z - a$, et ces développements resteront exacts, tant que le point Z restera dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA', AA'', etc., pour rayon.

On voit que si l'on appelle μ le nombre des termes du système circulaire auquel la fonction u_n appartient relativement au point A, cette fonction pourra toujours être développée en série convergente suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ dans les limites qu'on vient d'indiquer : en d'autres termes, le dénominateur des exposants fractionnaires de $z-a$, dans ce développement, sera égal au nombre des révolutions que le point Z doit accomplir sur un très-petit contour renfermant le point A, pour que la fonction u_n reprenne sa valeur initiale. Ajoutons d'ailleurs que si l'on se borne à déterminer ce dénominateur par la méthode expliquée précédemment, on pourra ensuite se servir de la méthode des coefficients indéterminés pour calculer les coefficients des séries dont il s'agit.

24. Appliquons maintenant cette théorie à quelques exemples, et d'abord considérons l'équation binôme

$$u^m-(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots=0,$$

où les quantités a, a', a'', etc., sont supposées toutes inégales. Pour $z=a$, les m valeurs de u qu'on en tire sont toutes nulles, et comme la dérivée $\frac{df(z,u)}{dz}$ se réduit ici, pour $u=0$, $z=a$, à la quantité $-(a-a')(a-a'')$ etc., qui n'est pas nulle, on tombe sur le cas du n° **18**. On en conclut que les m valeurs de u forment autour du point A un seul système circulaire, et qu'elles peuvent être exprimées par des séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{m}}$, tant que le point Z est renfermé dans un cercle qui a pour centre le point A et pour rayon la plus petite des distances AA', AA'', etc.

25. Prenons pour second exemple l'équation

$$u^m-(z-a)^l(z-a')^{l'}(z-a'')^{l''}\ldots=0,$$

où les quantités a, a', a'', etc., sont toujours supposées inégales, et où l'exposant l surpasse l'unité. Les m valeurs de u qu'on en tire se réduisent à zéro pour $z = a$, et comme la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ s'annule aussi pour $z = a$, on se trouve dans le cas du n° **19**. Faisons

$$z = a + \alpha, \quad u = \beta;$$

l'équation proposée devient

$$\beta^m - \alpha^l (a - a' + \alpha)^{l'} (a - a'' + \alpha)^{l''} \ldots = 0,$$

où le polynôme A du n° **19** est simplement $\beta^m - B\alpha^l$, en posant, pour abréger,

$$(a - a')^{l'} (a - a'')^{l''} \ldots = B;$$

les groupes G_1, G_2, etc., se réduisent donc à un seul qui est $\beta^m - B\alpha^l$. Appelons φ le plus grand commun diviseur de m et de l, et s le quotient $\frac{m}{\varphi}$: l'équation (2) du même numéro sera ici

$$x^\varphi - B = 0.$$

Comme elle n'a pas de racines égales, on en conclut que les m valeurs de u se partagent relativement au point A en φ systèmes circulaires composés chacun de s termes. De plus, ces diverses valeurs de u peuvent être développées suivant les puissances entières de $(z - a)^{\frac{1}{s}}$, tant que le point Z reste dans l'intérieur d'un cercle défini comme au numéro précédent.

26. Considérons, en troisième lieu, l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

qui, pour $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, a une racine double égale à $+\frac{1}{\sqrt{3}}$, et une racine simple égale à $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Soit A le point qui répond à $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, prenons un point infiniment voisin C pour point de départ de Z, et désignons par u_1, u_2, u_3, trois fonctions satisfaisant à l'équation proposée, dont les deux premières aient des valeurs initiales très-peu différentes de $+\frac{1}{\sqrt{3}}$, la valeur initiale de la troisième différant très-peu de $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. La fonction u_3 reprendra sa valeur initiale après une révolution de Z sur le contour très-petit CLMC, *fig.* 9, qui entoure le point A, nº **7**; pour savoir ce qui arrive aux deux autres, il suffit d'observer que, la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ étant égale à $+1$, on est ici dans le cas du nº **18**, et qu'ainsi les fonctions u_1 et u_2 forment un système circulaire, c'est-à-dire que chacune d'elles prend la valeur initiale de l'autre après une révolution du point Z.

Ces deux fonctions pourront donc, nº **21**, être développées en séries suivant les puissances entières de $\left(z-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; pour effectuer ces développements, on fera dans l'équation proposée, conformément à la méthode expliquée ci-dessus,

$$z=\frac{2}{3\sqrt{3}}+\alpha,\quad u=\frac{1}{\sqrt{3}}+\beta;$$

il viendra

$$\sqrt{3}\beta^2+\beta^3+\alpha=0,$$

ou bien, en posant $\alpha=\alpha'^2$, $\beta=\alpha' v$,

$$\sqrt{3}v^2+1+\alpha' v^3=0.$$

Soient v_1 et v_2 les valeurs de v tirées de cette équation qui, pour $\alpha'=0$, se réduisent respectivement aux quantités finies $+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}$, $-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}$; pour développer v_1 suivant les puissances entières de α', il suffira de faire dans l'équation précédente

$$v=+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}+A\alpha'+B\alpha'^2+C\alpha'^3+\dots,$$

puis d'égaler à zéro les coefficients des diverses puissances de α'. On aura ainsi les valeurs des coefficients A, B, C, etc., et l'on trouvera

$$v_1 = +\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{6}\alpha' - \frac{5\sqrt{-1}}{24\left(\sqrt[4]{3}\right)^3}\alpha'^2 - \frac{1}{9\sqrt{3}}\alpha'^3 + \frac{77\sqrt{-1}}{1152\sqrt[4]{3}}\alpha'^4 + \frac{7}{162}\alpha'^5 + \ldots;$$

la fonction v_2 s'en déduira en changeant le signe de $\sqrt{-1}$. On conclut de là

$$\begin{aligned} u_1 = {} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \\ & - \frac{5\sqrt{-1}}{24\left(\sqrt[4]{3}\right)^3}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 \\ & + \frac{77\sqrt{-1}}{1152\sqrt[4]{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{162}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3 + \ldots, \end{aligned}$$

et en changeant le signe de $\sqrt{-1}$, on aura u_2.

D'ailleurs l'équation proposée n'acquiert de racines multiples que pour les valeurs $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$: le module de la différence de ces deux nombres, ou la distance des points correspondants A et A' étant $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, la formule précédente sera applicable, tant que le module de $z - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ sera moindre que $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, ou bien tant que le point Z restera dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec un rayon égal à $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Dans les mêmes limites, la fonction u_3 pourra se développer suivant les puissances entières de $z - \frac{2}{3\sqrt{3}}$, et l'on trouvera sans peine

$$\begin{aligned} u_3 = {} & -\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{9\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 \\ & - \frac{7}{81}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{10}{81\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^4 + \ldots. \end{aligned}$$

27. Pour dernier exemple, nous traiterons encore l'équation

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}(u-b)^7+\mathrm{B}(u-b)^5(z-a)+\mathrm{C}(u-b)^4(z-a)^4\\+&\mathrm{D}(u-b)^2(z-a)^5+\mathrm{E}(u-b)(z-a)^7+\mathrm{F}(z-a)^9\\+&\mathrm{G}(u-b)^8+\mathrm{H}(u-b)^4(z-a)^5+\mathrm{I}(z-a)^{10}=0,\end{aligned}$$

où les coefficients A, B, C, D, E, F sont supposés différents de zéro, et qui a, pour $z=a$, sept racines égales à b.

Le point de départ C de Z étant supposé très-voisin du point A qui répond à $z=a$, il y aura sept fonctions de z satisfaisant à l'équation proposée et ayant des valeurs initiales très-peu différentes de b. Il s'agit de savoir comment les valeurs de ces fonctions s'échangent les unes dans les autres après une révolution de Z sur un contour fermé très-petit CLMC, *fig.* 9, tracé autour du point A.

La dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ s'annulant pour $z=a$, $u=b$, faisons, comme au nº **19**,

$$z=a+\alpha,\quad u=b+\beta;$$

l'équation proposée deviendra

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}\beta^7+\mathrm{B}\beta^5\alpha+\mathrm{C}\beta^4\alpha^4+\mathrm{D}\beta^2\alpha^5+\mathrm{E}\beta\alpha^7+\mathrm{F}\alpha^9\\&\quad+\mathrm{G}\beta^8+\mathrm{H}\beta^4\alpha^5+\mathrm{I}\alpha^{10}=0.\end{aligned}$$

Le polynôme Λ est ici

$$\mathrm{A}\beta^7+\mathrm{B}\beta^5\alpha+\mathrm{C}\beta^4\alpha^4+\mathrm{D}\beta^2\alpha^5+\mathrm{E}\beta\alpha^7+\mathrm{F}\alpha^9:$$

construisons les points M_0, $\mathrm{M}_1, \ldots$, M_5 correspondants aux différents termes de Λ et qui ont pour coordonnées

$$\begin{aligned}&x_0=7,\quad y_0=0;\quad x_1=5,\quad y_1=1;\quad x_2=4,\quad y_2=4;\\&x_3=2,\quad y_3=5;\quad x_4=1,\quad y_4=7;\quad x_5=0,\quad y_5=0.\end{aligned}$$

Cela fait, nous verrons aisément que la droite $\mathrm{M}_0\mathrm{O}$ étant supposée tourner autour du point M_0 de manière à couper la partie positive de l'axe des y, rencontrera d'abord le point M_1; que cette même droite, tournant ensuite autour de M_1, rencontrera le point M_3 avant tous les autres; et, enfin, que cette droite, en tournant autour de M_3, arrivera à contenir à la fois les points M_4 et M_5. Les groupes G seront donc au nombre de trois, savoir :

$$G_1 = A\beta^7 + B\beta^2\alpha^5,$$
$$G_2 = B\beta^5\alpha + D\beta^2\alpha^5,$$
$$G_3 = D\beta^2\alpha^5 + E\beta\alpha^7 + F\alpha^9.$$

Pour le premier, on a

$$s = 2, \quad \varphi = 1,$$

et l'équation (2) du n° **19** est

$$Ax + B = 0 :$$

à ce groupe répondent, par conséquent, deux fonctions de u et de z qui forment un système circulaire autour du point A, et qui, dans certaines limites, se développent en séries convergentes suivant les puissances entières de $(z - a)^{\frac{1}{2}}$.

Pour le deuxième groupe, on a

$$s = 3, \quad \varphi = 1,$$

et l'équation (2) est

$$Bx + D = 0 :$$

à ce groupe répond donc un système circulaire composé de trois fonctions qui se développent suivant les puissances entières de $(z - a)^{\frac{1}{3}}$.

Pour le troisième, on a

$$s = 1, \quad \varphi = 2,$$

et l'équation (2) est

$$Dx^2 + Ex + F = 0.$$

Admettons d'abord que cette équation ait ses racines inégales; alors à ce groupe répondront deux systèmes circulaires d'un seul terme chacun, c'est-à-dire deux fonctions de z dont chacune reprend sa propre valeur initiale après une révolution de Z, et qui peuvent se développer suivant les puissances entières de $z - a$. Admettons ensuite que l'équation (2) ait ses racines égales, de sorte qu'on ait à la fois

$$Dh^2 + Eh + F = 0, \quad 2Dh + E = 0.$$

C'est ici le cas du nº **20**; comme on a

$$r = 2, \quad s = 1,$$

on fera

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = h\alpha'^2 + \beta':$$

en substituant ces valeurs dans l'équation entre α et β mise sous la forme

$$\alpha^5(D\beta^2 + E\beta\alpha^2 + F\alpha^4) + A\beta^7 + B\beta^5\alpha + C\beta^4\alpha^4$$
$$+ G\beta^8 + H\beta^4\alpha^5 + I\alpha^{10} = 0,$$

il viendra, en laissant la lettre α au lieu de α',

$$D\beta'^2\alpha^5 + A(h^7\alpha^{14} + \ldots) + B(h^5\alpha^{11} + \ldots) + C(h^4\alpha^{12} + \ldots)$$
$$+ G(h^8\alpha^{16} + \ldots) + H(h^4\alpha^{13} + \ldots) + I\alpha^{10} = 0.$$

Dans chaque parenthèse, les termes non écrits sont d'un ordre plus élevé que le terme conservé, attendu que β' est d'un ordre supérieur à celui de α^2. On voit que les groupes G' se réduiront à un seul, qui sera

$$D\beta'^2\alpha^5 + I\alpha^{10},$$

en supposant que I ne soit pas nul. On aura alors

$$r' = 5, \quad s' = 2, \quad \varphi' = 1,$$

et l'équation (2') sera

$$Dx' + I = 0.$$

Comme elle n'a pas de racines égales, puisqu'elle est du premier degré, et qu'on a

$$ss' = 2,$$

on voit que les deux valeurs de u qui correspondent au groupe G_3 forment un seul système circulaire, et que chacune d'elles est développable en série suivant les puissances entières de $(z - a)^{\frac{1}{2}}$. Mais si le coefficient I était nul, le groupe G' serait

$$D\beta'^2\alpha^5 + Bh^5\alpha^{14}:$$

on aurait alors

$$r' = 3, \quad s' = 1, \quad \varphi' = 2,$$

et l'équation (2') serait

$$Dx'^2 + Bh^5 = 0.$$

Comme elle a ses racines inégales et que le produit ss' se réduit à l'unité, on voit que, dans ce cas, chacune des valeurs de u qui répondent au groupe G_3 reprend sa propre valeur initiale après une révolution de Z, et que ces deux valeurs peuvent être développées en séries suivant les puissances entières de $z - a$.

28. Nous avons cherché, dans ce qui précède, comment s'échangent entre elles les valeurs des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_p$, lorsque le point Z décrit autour du point A un contour infiniment petit; il y a encore un autre cas qu'il est à propos d'examiner spécialement.

Prenons pour point de départ de Z un point C correspondant à une valeur quelconque c de z, avec la condition, toutefois, que l'équation

$$f(u, c) = 0$$

n'ait pas de racines égales; soient toujours A, A', A'', etc., les points correspondants aux valeurs a, a', a'', etc., de z qui font acquérir des racines multiples à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et supposons que l'équation

$$f(u, a) = 0$$

ait p racines égales à b. Joignons le point C au point A par une ligne CDA, *fig.* 12, tracée arbitrairememt, mais de manière à ne passer par aucun des points A, A', A'', etc.; puis désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les p fonctions de z qui, satisfaisant à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et ayant au point C les valeurs initiales $b_1, b_2, \ldots, b_p$, acquièrent en A la valeur commune b, lorsque Z y arrive par le chemin CDA. Prenons sur cette ligne un point D infiniment voisin de A, et imaginons un contour fermé infiniment petit DNPD qui entoure le point A, en ne faisant autour de ce point qu'une circonvolution. Cela posé, nous donnerons le nom de *contour élémentaire* au contour qui se compose de la ligne CD, du contour infiniment petit DNP, et, enfin, de la ligne DC, de sorte que le point Z, en le parcourant, décrit deux fois la ligne CD, mais dans des sens contraires.

Voyons maintenant ce que deviennent les fonctions u_1, u_2,..., u_p après une révolution de Z sur un pareil contour : soient d'abord β_1, β_2,..., β_p les valeurs qu'elles acquièrent, lorsque Z arrive pour la première fois en D. Le point mobile parcourt ensuite le contour infiniment petit DNPD; or on a prouvé que les fonctions u_1, u_2,..., u_p pouvaient se partager, relativement au point A, en un certain nombre de systèmes circulaires: soit u_1, u_2,..., u_{n-1}, u_n un de ces systèmes, de façon qu'après une révolution de Z sur DNPD, les fonctions qui le composent aient acquis respectivement les valeurs β_2, β_3,... β_n, β_1. Lorsqu'ensuite le point Z, achevant de décrire le contour élémentaire, ira de D en C, la fonction u_1, qui avait en D la valeur β_2, prendra en C la valeur b_2; car autrement, si Z revenait en arrière au point D, u_1 ne reprendrait pas la valeur β_2 : de même les fonctions u_2,..., u_{n-1}, u_n acquerront en C les valeurs b_3,..., b_n, b_1. Par conséquent, les fonctions u_1, u_2,..., u_p jouiront, par rapport au contour élémentaire CDNPDC, des mêmes propriétés qui ont été démontrées pour le contour infiniment petit DNPD. Les systèmes circulaires seront dans les deux cas en même nombre et composés des mêmes termes rangés dans le même ordre : on les déterminera toujours en cherchant, par la méthode expliquée ci-dessus, les valeurs approchées des fonctions u_1, u_2, etc., pour une valeur de z infiniment peu différente de a.

Quant aux fonctions u_{p+1}, u_{p+2}, etc., dont les valeurs au point A sont des racines simples de l'équation

$$f(u, a) = 0,$$

il est clair, n° 7, qu'après une révolution de Z sur le contour élémentaire CDNPDC, chacune d'elles reprend simplement sa valeur initiale.

29. Supposons maintenant que le point Z, partant du point C, décrive autour du point A une ligne fermée de forme quelconque, mais qui puisse se réduire au contour élémentaire CDNPDC sans franchir aucun des points A, A', A'', etc. : on conclura du n° 6 que les valeurs des fonctions u_1, u_2, etc., s'échangeront sur cette ligne absolument comme sur le contour élémentaire.

30. Joignons le point C aux différents points A, A', A'', etc., par des lignes CDA, CD'A', CD''A'', etc., *fig.* 12, tracées arbitrairement, sauf la condition que la ligne menée à chacun de ces points ne passe par aucun des autres : soient D, D', D'', etc., des points situés sur ces lignes à des distances infiniment petites des points A, A', A'', etc.; traçons autour de ces derniers les contours fermés infiniment petits DNPD, D'N'P'D', D''N''P''D'', etc., et imaginons les contours élémentaires CDNPDC, CD'N'P'D'C, CD''N''P''D''C, etc., que nous désignerons, pour abréger, par les notations (A), (A'), (A''), etc. Cela posé, étant donné un contour fermé quelconque passant par le point C, on pourra toujours, sans lui faire franchir aucun des points A, A', A'', etc., et sans déplacer le point C, le déformer de façon à le réduire à une suite de contours élémentaires. Cette assertion n'a pas besoin d'être démontrée, et il suffit d'un peu d'attention pour en apercevoir l'exactitude.

Par exemple, le contour CLMC de la *fig.* 13 se réduira au contour élémentaire CDNPDC ou (A). Le contour CLMC de la *fig.* 14 se réduira au contour (A) parcouru deux fois de suite. Le contour CLMC de la *fig.* 15 se réduira aux trois contours (A), (A'), (A''), parcourus successivement. Enfin le contour CLMC de la *fig.* 16 se réduira à la suite des contours élémentaires (A'), (A''), (A'), (A), (A'). Sous ce point de vue, un contour fermé quelconque passant par le point C sera caractérisé par la série des contours élémentaires auxquels on peut le réduire.

Toutefois il importe d'indiquer dans quel sens chaque contour élémentaire est parcouru : pour cela nous représenterons le contour (A) par (+ A) ou par (— A), suivant que le point Z sera supposé le parcourir dans le sens direct ou dans le sens inverse, n° **18**, et nous ne conserverons la notation (A) que pour le cas où il sera inutile d'indiquer dans quel sens ce contour est décrit. Ainsi le contour CLMC de la *fig.* 13 se réduira à (+ A) ou à (— A), suivant que le point Z le parcourra dans le sens CLMC ou dans le sens CMLC : de même, le contour CLMC de la *fig.* 16 se réduira à la suite $(+A')$, $(+A'')$, $(-A')$, $(-A)$, $(+A')$, s'il est parcouru dans le sens CLMC, et à la suite $(-A')$, $(+A)$, $(+A')$, $(-A'')$, $(-A')$, s'il est parcouru en sens contraire. (On peut observer que pour déduire cette seconde suite de la première, il suffit de renverser l'ordre des termes et de changer leurs signes : cette remarque est générale.)

Ces notations adoptées, un contour fermé passant par le point C et parcouru dans un sens déterminé, pourra, quelle que soit sa forme [*], être représenté par la suite des contours élémentaires auxquels on le réduit en le déformant : cette suite, dont chaque terme doit être affecté d'un signe convenable, ainsi qu'on vient de l'expliquer, est ce que nous appellerons la *caractéristique du contour.* Ainsi les contours CLMC des *fig.* 13, 14, 15, 16 étant supposés parcourus dans le sens CLMC, auront pour caractéristiques respectives

$$(+A),\quad (+A)(+A),\quad (+A)(+A')(+A''),$$
$$(+A')(+A'')(-A')(-A)(+A'),$$

et, s'ils sont parcourus dans le sens contraire, leurs caractéristiques seront

$$(-A),\quad (-A)(-A),\quad (-A'')(-A')(-A),$$
$$(-A')(+A)(+A')(-A'')(-A').$$

Dans le cas où un contour fermé pourra se réduire au seul point C sans franchir aucun des points A, A′, A″, etc., nous lui donnerons (o) pour caractéristique : il est clair qu'on est libre d'introduire ou de supprimer dans la caractéristique d'un contour des termes (o) en tel nombre et à telles places qu'on voudra.

On voit facilement que les points A, A′, A″, etc., restant les mêmes ainsi que le point C et les lignes CDA, CD′A′, CD″A″, etc., un même contour, parcouru dans un même sens, n'est susceptible que d'une seule caractéristique (sauf les termes (o) qu'on peut toujours supprimer). Deux contours qui ont la même caractéristique peuvent toujours se réduire l'un à l'autre sans franchir aucun des points A, A′,

[*] On exclut toujours le cas où ce contour passerait par quelqu'un des points A, A′, A″, etc.

A″, etc.; et, au contraire, deux contours qui, dans quelque sens qu'on les suppose parcourus, ont des caractéristiques différentes, ne peuvent pas se réduire l'un à l'autre. Observons encore que si les lignes CDA, CD′A′, CD″A″, etc., viennent à changer de forme, la caractéristique d'un contour donné restera la même, tant que ces lignes ne franchiront aucun des points A, A′, A″, etc.

31. De ce qu'on vient de dire et de la proposition énoncée au n° **6**, on conclut que si deux contours fermés passant par le point C ont la même caractéristique, la fonction u_1 de z, déterminée par l'équation

$$f(u, z) = 0$$

et par une valeur initiale b_1 choisie parmi les racines de l'équation

$$f(u, c) = 0,$$

acquerra une seule et même valeur, lorsque le point Z, parti de la position C, y reviendra après avoir parcouru l'un ou l'autre de ces deux contours, ou bien encore la suite des contours élémentaires représentés par leur caractéristique commune.

Si donc on appelle $u_1, u_2, \ldots, u_m$ les m fonctions de z déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et ayant respectivement pour valeurs initiales les m racines $b_1, b_2, \ldots, b_m$ de l'équation

$$f(u, c) = 0,$$

il sera facile de savoir quelle valeur prend chacune de ces fonctions, lorsque le point Z revient en C après avoir parcouru un contour fermé dont la caractéristique est donnée.

En effet, substituons au contour proposé la série des contours élémentaires représentés par les différents termes de la caractéristique : après que le point Z aura parcouru le premier de ces contours, la fonction u_n aura acquis une valeur b_p qu'on saura déterminer, n° **28** ; il suffira pour cela de savoir quelle est la fonction qui suit ou qui précède u_n dans le système circulaire dont elle fait partie relativement à celui des points A, A′, etc., qui est renfermé dans le contour élémentaire. Soit maintenant b_q la valeur que prend la fonction u_p après une révolution de Z sur le deuxième contour élémentaire; il est clair que u_n acquerra cette même valeur b_q, lorsque Z aura décrit les deux premiers. Pareillement, sachant quelle est la valeur b_r que prend u_q après une révolution de Z sur le troisième contour élémentaire, on en conclura que u_n acquiert cette même valeur b_r après que Z a décrit les trois premiers contours. En continuant ainsi, on trouvera la valeur que prend la fonction u_n, quand le point Z a parcouru tous les contours élémentaires dont se compose la caractéristique, ou, ce qui est la même chose, quand ce point a parcouru le contour proposé.

32. Prenons pour exemple l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

dont nous nous sommes déjà occupés. Les valeurs de z qui lui font acquérir des racines égales sont $+\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et correspondent à deux points A et A′ situés sur l'axe des x à une distance $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ de l'origine des coordonnées et de part et d'autre. Choisissons cette origine C pour point de départ de Z et nommons u_1, u_2, u_3 les trois fonctions de z qui satisfont à l'équation proposée, et dont les valeurs initiales sont respectivement 0, $+1$, -1. Prenons les droites CA, CA′ pour les lignes avec lesquelles les contours élémentaires (A) et (A′) se confondent sensiblement, n° **28** : lorsque Z va de C en A par la droite CA, les trois valeurs de u restent réelles, et de l'équation

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{1 - 3u^2},$$

on conclut que u_1 augmente, tandis que u_2 et u_3 vont en diminuant. Au point A, on a

$$u_1 = u_2,$$

et, ainsi qu'on l'a vu plus haut, n° **26**, ces deux fonctions forment autour de ce point un système circulaire; par conséquent, après une révolution de Z sur le contour élémentaire ($\pm$ A), chacune des fonctions u_1, u_2, a pris la valeur initiale de l'autre, tandis que u_3 a repris sa propre valeur initiale. On trouve de même, après une révolution de Z sur le contour élémentaire $(\pm A')$, que chacune des fonctions u_1, u_3 a pris la valeur initiale de l'autre, tandis que u_2 a repris sa propre valeur initiale. De là on conclut sur-le-champ la valeur que prend une quelconque de ces fonctions après une révolution de Z sur un contour fermé dont on connaît la caractéristique.

Ainsi, proposons-nous de trouver la valeur de u_1 après une révolution de Z sur le contour

$$(\pm A)(\pm A')(\pm A)(\pm A)(\pm A)(\pm A'):$$

ici, comme dans tous les cas où les systèmes circulaires n'ont qu'un ou deux termes, le signe $+$ ou le signe $-$, qui accompagne la caractéristique de chaque contour élémentaire, est indifférent. Après une révolution sur le contour $(\pm A)$, u_1, qui était d'abord égale à zéro, a pris la valeur initiale $+1$ de u_2; la fonction garde cette même valeur après que Z a décrit le contour $(\pm A')$; ensuite les trois révolutions sur le contour $(\pm A)$ lui font acquérir successivement les valeurs 0, $+1$, 0; enfin la révolution de Z sur le contour $(\pm A')$ fait prendre à la fonction la valeur -1.

33. Considérons encore l'équation

$$u^3 - (z-a)(z-a')^2 = 0,$$

dont les racines deviennent égales pour $z = a$ et pour $z = a'$. Appelons g une des trois valeurs du radical $\sqrt[3]{-aa'^2}$; les trois valeurs de u pour $z = 0$ seront

$$g,\quad ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, prenons pour point de départ de Z l'origine C des coordonnées; puis nommons u_1, u_1, u_3 les trois fonctions de z qui satisfont à l'équation précédente, et qui ont respectivement pour valeurs initiales

$$g,\quad ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}.$$

On voit sans peine que ces fonctions u_1, u_2, u_3 formeront un système circulaire relativement au point A, et que les mêmes fonctions rangées dans l'ordre u_1, u_3, u_2, en formeront un relativement au point A'.

Si, maintenant, on veut savoir ce que devient u_1, après que Z a décrit un contour fermé quelconque, par exemple celui qui a pour caractéristique

$$(-\text{A})(+\text{A}')(+\text{A})(+\text{A}')(-\text{A})(-\text{A})(-\text{A}'),$$

il suffira d'observer qu'après que Z a décrit successivement chacun des contours élémentaires indiqués par la caractéristique, u_1, qui avait d'abord la valeur g, a pris les valeurs

$$ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad g,\quad ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad g;$$

ainsi la fonction u_1 se trouve avoir repris sa valeur primitive.

34. Après avoir montré ce que devient la fonction u_1, lorsque le point Z revient à sa position initiale après avoir décrit un contour fermé quelconque, il nous faut examiner maintenant quelles valeurs acquiert cette fonction, suivant que le point Z va de son point de départ C à un autre point déterminé K, *fig.* 17, par un chemin ou par un autre. Nous excluons toujours les chemins qui passeraient par quelqu'un des points A, A', A'', etc.

Les valeurs initiales des fonctions u_1, u_2,..., u_m, étant toujours désignées par b_1, b_2,..., b_m, appelons h_1, h_2,..., h_m les valeurs qu'elles acquièrent, lorsque Z va de C en K par un chemin déterminé CMK; il s'agit de trouver quelles valeurs acquièrent ces mêmes fonctions, lorsque Z va de C en K par un autre chemin quelconque CLK.

Pour cela, observons que les deux chemins CLK, CMK, réunis, composent un contour fermé CLMC, dont la caractéristique, que nous représenterons par (Γ), sera connue dès que ces deux chemins seront donnés. Or la fonction u_1 acquerra la même valeur au point K, soit que le point Z y aille par le chemin CLK, soit qu'il y aille en décrivant d'abord le contour fermé CLMC, puis la ligne CMK; car le second chemin se réduit au premier sans franchir aucun des points A, A', A'', etc. Mais on saura, par ce qui précède, quelle est la fonction u_j dont u_i prend la valeur initiale b_j après une révolution de Z sur le contour fermé CLMC; on en conclura donc que la fonction u_i acquiert au point K la valeur h_j, quand le point Z y arrive par le chemin CLMC + CMK, ou, ce qui est la même chose, par le chemin CLK : c'est la réponse à la question que nous voulions résoudre.

A ce point de vue, le chemin CLK sera suffisamment désigné par la notation (Γ) + CMK, dont nous nous servirons par la suite, et que nous appellerons la caractéristique de ce chemin. Quand, par le procédé du n° **16**, on aura déterminé les valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_m$ que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ acquièrent au point K, lorsque Z y va par le chemin CMK, on voit qu'il ne sera pas nécessaire de recommencer ce calcul pour un autre chemin quelconque (Γ) + CMK. Il suffira d'avoir effectué le partage des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$, en systèmes circulaires relativement à chacun des points A, A', A'', etc., et alors on pourra assigner immédiatement quelle est celle des quantités $h_1, h_2, \ldots, h_m$, à laquelle la fonction u_i devient égale, lorsque Z a parcouru le chemin (Γ) + CMK.

Par exemple, reprenons l'équation

$$u^3 - u + z = 0;$$

les fonctions u_1, u_2, u_3 étant définies comme au n° **32**, appelons h_1, h_2, h_3 les valeurs qu'elles acquièrent, lorsque le point Z va de C en K par un chemin déterminé CMK. Ces quantités une fois calculées, si l'on veut savoir quelles valeurs prennent nos trois fonctions, lorsque Z va de C en K par le chemin $(\pm A)(\pm A')$ + CMK, il suffit d'observer qu'après une révolution de Z sur le contour fermé $(\pm A)(\pm A')$, u_1, u_2, u_3 ont acquis respectivement les valeurs initiales de u_2, u_3, u_1; on en conclut que les valeurs demandées sont h_2, h_3, h_1.

33. On peut rendre plus sensible la marche de la fonction u, en imaginant un point U dont l'abscisse et l'ordonnée soient la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la valeur de u. En même temps que Z décrit une ligne continue, U en décrit une aussi qui est parfaitement déterminée, si Z ne passe par aucun des points A, A', A'', etc.

Concevons que Z aille de C en K par plusieurs chemins différents : la fonction u pourra acquérir des valeurs différentes, et parmi les valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_m$ qu'elle peut avoir pour $z = k$, on a appris à distinguer celle qu'elle prend, suivant que Z a suivi tel ou tel chemin. Par conséquent, le point U pourra arriver à différentes positions dans ces différents cas, et, parmi les points H_1, $H_2, \ldots$, H_m, qui correspondent aux quantités h_1, $h_2, \ldots$, h_m, on saura distinguer celui avec lequel U vient coïncider, lorsqu'on connaîtra le chemin suivi par Z.

Par exemple, si Z décrit un contour fermé de façon à revenir à son point de départ C, il pourra arriver que la fonction u reprenne ou ne reprenne pas sa valeur initiale : dans le premier cas, le point U aura décrit lui-même un contour fermé; mais, dans le second, il ne sera pas revenu à sa position primitive.

36. Nous avons toujours supposé jusqu'ici que Z ne passait par aucun des points pour lesquels la fonction u devient une racine multiple de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Admettons maintenant que Z vienne à passer par un point A, pour lequel les p fonctions u_1, $u_2, \ldots$, u_p acquièrent une même valeur b. Avant que Z arrivât en A, ces fonctions avaient pour valeurs p quantités inégales très-peu différentes de b; lorsqu'ensuite Z a dépassé le point A, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

fournit encore p valeurs de u inégales et très-voisines de b; mais il n'y a pas de raison d'attribuer chacune de ces valeurs à l'une plutôt qu'à l'autre des fonctions u_1, $u_2, \ldots$, u_p. Ainsi, au delà du point A, on trouve bien encore p fonctions distinctes de z comme avant; mais la question de savoir laquelle de ces fonctions doit être regardée comme la continuation d'une fonction particulière u_1, reste tout à fait indéterminée.

L'exemple suivant rendra plus sensible ce genre d'indétermination. Faisons décrire à Z, à partir du point C et dans le sens direct, un cercle CLAMC, *fig.* 18, passant par le point A, pour lequel les fonctions u_1 et u_2 deviennent égales entre elles, et supposons que ces fonctions ne puissent devenir égales pour aucun autre point situé sur la circonférence ou dans son intérieur. Soit b leur valeur commune au point A, de sorte que pour $z = a$, $u = b$, on ait

$$f(u, z) = 0, \quad \frac{df(u, z)}{du} = 0;$$

mais admettons que, pour les mêmes valeurs de z et de u, les dérivées $\frac{d^2 f(u, z)}{du^2}$, $\frac{df(u, z)}{dz}$ se réduisent à des quantités A et B différentes de zéro. Si l'on fait

$$z = a + \rho e^{\tau\sqrt{-1}}, \quad u_1 = b + \beta_1, \quad u_2 = b + \beta_2,$$

les quantités β_1 et β_2 s'annuleront en même temps que ρ, et se confondront sensiblement, pour de petites valeurs de ρ, avec les deux racines de l'équation du second degré

$$A\beta^2 + B\rho e^{\tau\sqrt{-1}} = 0,$$

ou

$$\beta^2 = h\rho e^{\tau\sqrt{-1}},$$

en faisant

$$-\frac{B}{A} = h.$$

On en conclut

$$u_1 = b + (h\rho)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau}{2}\sqrt{-1}}, \quad u_2 = b + (h\rho)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau + 2\pi}{2}\sqrt{-1}},$$

et si l'on pose

$$(h\rho)^{\frac{1}{2}} = \gamma e^{\delta\sqrt{-1}},$$

γ désignant un nombre positif et δ un angle réel, puis

$$\delta + \frac{\tau}{2} = \nu_1, \quad \delta + \frac{\tau + 2\pi}{2} = \nu_2,$$

on aura approximativement, dans les environs du point A,

$$u_1 = b + \gamma e^{\nu_1\sqrt{-1}}, \quad u_2 = b + \gamma e^{\nu_2\sqrt{-1}}.$$

Prenons maintenant sur la circonférence CLMC deux points L et M très-voisins de A, et situés de part et d'autre de ce point. Soit B le point correspondant à la valeur commune b que prennent les deux fonctions u_1, u_2, quand le point Z arrive en A; lorsque Z est en L, ces mêmes fonctions ont des valeurs inégales correspondantes à des points N et P voisins de B, et tels, que les directions BN, BP soient sensiblement dans le prolongement l'une de l'autre, attendu qu'on a

$$\nu_2 = \nu_1 + \pi.$$

Lorsqu'ensuite le point Z est en M, les points Q et R, correspondants aux valeurs des deux fonctions, sont encore très-voisins du point B, et tels aussi, que les directions BQ, BR soient sensiblement dans le prolongement l'une de l'autre. Mais comme, en passant du point L au point M, on fait varier τ de $\pm\pi$, et qu'ainsi chacun des angles ν_1, ν_2 varie de $\pm\frac{\pi}{2}$, les directions BQ, BR seront sensiblement perpendiculaires aux directions BN, BP.

Concevons à présent que Z aille de L en M en passant par le point A; les points U_1, U_2, correspondants aux fonctions u_1, u_2, et situés d'abord en N et P, se rapprocheront l'un de l'autre, se confondront en B, lorsque Z arrivera en A, puis se sépareront pour venir en Q et R; mais si l'on attribue le point N à la fonction u_1, et le point P à la fonction u_2, il n'y aura pas de raison d'attribuer chacun des points Q et R à une de ces fonctions plutôt qu'à l'autre.

En effet, déformons infiniment peu le chemin par lequel Z va de L en M, de façon qu'il ne passe plus par le point A; selon que le point A sera en dehors ou en dedans du contour fermé CLMC, il arrivera ou que le point U_1 ira de N en Q, et le point U_2 de P en R, ou que le point U_1 ira de N en R et le point U_2 de P en Q.

Pour le voir, supposons d'abord, *fig.* 19, le point A extérieur au contour CLMC, mais très-voisin de ce contour : prenons sur celui-ci les deux points L et M très-voisins de A, de façon toutefois que les directions AL, AM fassent un angle très-voisin de 180 degrés. Alors, quand le point Z ira de L en M, τ diminuera sensiblement de π, et, par suite, ν_1 et ν_2 diminueront sensiblement de $\frac{\pi}{2}$: le point U_1 ira donc de N en Q par la ligne NFQ, et le point U_2 de P en R par la ligne PGR.

Si, au contraire, le point A est intérieur, *fig.* 20, les points L et M étant pris comme tout à l'heure, l'angle τ augmentera sensiblement de π, lorsque Z ira de L en M; par suite, ν_1 et ν_2 augmenteront de $\frac{\pi}{2}$:

U_1 ira donc de N en R par le chemin NFR, tandis que U_2 ira de P en Q par le chemin PGQ.

Les *fig.* 18, 19 et 20 montrent comment se modifient les lignes décrites par les points U_1 et U_2, lorsque le contour CLMC, en se déformant, vient à franchir le point A. Tant qu'il ne le renferme pas, chacun des points U_1, U_2 décrit une ligne fermée, *fig.* 19, l'un la ligne SNFQS, l'autre la ligne TGPRT; ces deux lignes passent très-près du point B et présentent dans cette région comme deux angles droits opposés.

Lorsque le contour CLMC vient à passer au point A, *fig.* 18, ces deux lignes se réunissent en une seule pour laquelle le point B est un point multiple; les branches qui y aboutissent s'y coupent à angles droits. Les points U_1 et U_2 arrivent en B en décrivant les lignes NB, PB; mais ensuite, comme on l'a déjà dit, on peut regarder l'un des deux à volonté comme décrivant la ligne BQ et l'autre comme traçant la ligne BR.

Enfin, lorsque le contour CLMC vient à renfermer le point A, *fig.* 20, les lignes décrites par les points U_1 et U_2 deviennent les deux parties d'un même contour fermé. Ce contour présente un étranglement aux environs du point B, et les parties qui avoisinent cette région forment encore comme deux angles droits opposés. Si S et T sont les positions initiales de U_1 et de U_2, pendant que Z décrira le contour CLMC, le point U_1 tracera l'arc SNFRT, et le point U_2 l'arc TPGQS; ce n'est qu'après deux révolutions de Z que les points U_1 et U_2 reprendraient leurs positions initiales S et T [*].

On verra de même ce qui arrive, lorsque le contour CLMC franchit un point A pour lequel trois fonctions u_1, u_2, u_3 acquièrent une valeur commune b. Si l'on suppose que les dérivées $\frac{d^3 f(u, z)}{du^3}$, $\frac{df(u, z)}{dz}$ ne s'annulent pour $z = a$, $u = b$, les valeurs approchées de ces fonc-

---

[*] Si le contour CLMC avait un point saillant, que ce point coïncidât avec le point A, et que les deux portions de contour aboutissant en A fissent un angle égal à θ, la ligne décrite par les points U_1, U_2 offrirait encore en B un point multiple; mais l'angle des branches qui se coupent en B, au lieu d'être droit comme dans la *fig.* 18, serait égal à $\frac{\theta}{2}$.

tions pour des valeurs de z voisines de a seront

$$u_1 = b + (h\rho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau}{3}\sqrt{-1}},$$
$$u_2 = b + (h\rho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau+2\pi}{3}\sqrt{-1}},$$
$$u_3 = b + (h\rho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau-4\pi}{3}\sqrt{-1}}.$$

On en conclura, en raisonnant comme on vient de le faire, que si le point A est hors du contour CLMC, mais très-près, chacun des points U_1, U_2, U_3 décrira une courbe fermée, *fig.* 21, passant très-près du point B. Si le contour vient à passer par le point A, ces trois courbes se réunissent en une seule, *fig.* 22, ayant en B un point multiple où passent trois branches qui s'y coupent sous des angles de 60 degrés. Enfin, si le point A devient intérieur au contour, cette ligne unique ne passe plus au point B; mais elle a aux environs de ce point la forme qu'indique la *fig.* 23 : pendant une révolution de Z sur le contour CLMC, chacun des points U_1, U_2, U_3 décrit une portion de la ligne dont il s'agit, de façon que ces trois portions composent la ligne entière; ce n'est qu'après trois révolutions de Z que ces points reviennent à leurs positions initiales.

37. Nous avons supposé, à partir du n° **18**, que le coefficient de la plus haute puissance de u dans le polynôme entier $f(u, z)$ était indépendant de z : mais il est aisé d'étendre la théorie précédente au cas où ce coefficient est une fonction entière quelconque de z. Considérons, en effet, l'équation irréductible

$$\mathrm{N}v^m + \mathrm{P}v^{m-1} + \mathrm{Q}v^{m-2} + \ldots + \mathrm{S}v + \mathrm{T} = 0,$$

où N, P, Q,..., T désignent des polynômes entiers en z, et proposons-nous, comme nous l'avons fait pour la fonction u, de distinguer les diverses valeurs que la fonction v peut acquérir, suivant que le point Z va par tel ou tel chemin de sa position initiale C à une autre position K.

On ramènera sur-le-champ ce cas à celui que nous avons traité, en posant

$$v = \frac{u}{\mathrm{N}}:$$

en effet, l'équation proposée deviendra

$$u^m + Pu^{m-1} + NQu^{m-2} + \ldots + N^{m-2}Su + N^{m-1}T = 0,$$

où le coefficient de u^m est l'unité. Le polynôme N n'ayant qu'une seule valeur pour chaque valeur de z, aux diverses valeurs dont la fonction u est susceptible correspondront autant de valeurs de v qui s'en déduiront par la formule

$$v = \frac{u}{N}.$$

Tout se réduira donc, comme ci-dessus, à déterminer les caractéristiques des divers chemins par lesquels on peut aller de C en K, et, pour les connaître, il n'y aura qu'à construire les points A, A′, A″, etc., correspondants aux valeurs de z qui font acquérir des racines multiples à l'équation

$$u^m + Pu^{m-1} + \ldots + N^{m-1}T = 0.$$

Observons qu'il ne serait pas exact de déterminer ces points en cherchant les valeurs de z pour lesquelles l'équation en v acquiert des racines égales : car, bien qu'en général ces valeurs de z soient les mêmes, il peut en être autrement de celles qui annulent N; pour ces valeurs, l'équation en u a $m-1$ racines égales à zéro, tandis que l'équation en v a ordinairement une racine infinie et $m-1$ racines finies et inégales. Mais on trouvera toujours tous les points A, A′, A″, etc., en joignant aux valeurs de z qui font acquérir à l'équation en v des racines égales celles qui lui donnent des racines infinies.

38. On a vu que les diverses fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ qui satisfont à l'équation

$$u^m + Pu^{m-1} + NQu^{m-2} + \ldots = 0,$$

se partagent, relativement au point A, en un certain nombre de systèmes circulaires; les fonctions correspondantes

$$v_1 = \frac{u_1}{N}, \quad v_2 = \frac{u_2}{N}, \ldots, \quad v_m = \frac{u_m}{N},$$

formeront évidemment des systèmes circulaires correspondants et en même nombre. Appelons ν la puissance de $z-a$ par laquelle le polynôme N est divisible, l'exposant entier ν pouvant être zéro, et faisons

$$\mathrm{N} = (z-a)^{\nu} N;$$

nous aurons, en désignant par v_n une des fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_m$,

$$v_n = \frac{u_n}{(z-a)^{\nu} N},$$

d'où

$$(z-a)^{\nu} v_n = \frac{1}{N} \cdot u_n.$$

Or, tant que le point Z reste dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA′, AA″, etc., pour rayon, on peut développer $\frac{1}{N}$ en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z-a$; on a vu d'ailleurs, n° **23**, que μ étant le nombre des termes du système circulaire dont u_n fait partie, cette fonction u_n peut, dans les mêmes limites, être développée suivant les puissances entières et positives de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$. En multipliant ces deux séries, on aura le développement de $\frac{1}{N} \cdot u_n$ suivant les puissances entières et positives de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$: nous pouvons donc écrire

$$\frac{1}{N} \cdot u_n = (z-a)^{\nu} v_n = \mathrm{A} + \mathrm{B}(z-a)^{\frac{1}{\mu}} + \mathrm{C}(z-a)^{\frac{2}{\mu}} + \ldots,$$

A, B, C, etc., désignant des coefficients indépendants de z, et, par conséquent,

$$v_n = \mathrm{A}(z-a)^{-\nu} + \mathrm{B}(z-a)^{\frac{1}{\mu}-\nu} + \mathrm{C}(z-a)^{\frac{2}{\mu}-\nu} + \ldots.$$

Ainsi la fonction v_n se développe comme u_n, suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$; mais, tandis que le développement de u_n ne contient que des puissances positives de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$, celui de v_n peut commencer par un nombre limité de puissances négatives.

39. Appliquons ce qui vient d'être dit à l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots\ v^m-1=0,$$

où les quantités a, a', a'', etc., sont supposées toutes inégales; si l'on pose

$$v=\frac{u}{(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots},$$

il viendra

$$u^m-(z-a)^{m-1}(z-a')^{m-1}(z-a'')^{m-1}\ldots=0.$$

Les points A, A′, A″, etc., pour lesquels cette équation acquiert des racines multiples, sont précisément ceux qui répondent aux valeurs a, a', a'', etc., de z.

Appelons $u_1, u_2,\ldots, u_m$ les m fonctions qui satisfont à l'équation en u, et qui ont respectivement pour valeurs initiales

$$g,\quad ge^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}},\quad ge^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}},\ldots,\quad ge^{-\frac{(2m-2)\pi}{m}\sqrt{-1}},$$

g désignant une des valeurs du radical

$$\sqrt{(c-a)^{m-1}(c-a')^{m-1}(c-a'')^{m-1}\ldots}.$$

On déduit facilement des principes établis plus haut, que chacune de ces fonctions acquiert la valeur initiale de la suivante après une révolution de Z sur un quelconque des contours élémentaires $(+\mathrm{A})$, $(+\mathrm{A}')$, etc. Si donc on pose

$$v_1=\frac{u_1}{(z-a)(z-a')\ldots},\quad v_2=\frac{u_2}{(z-a)(z-a')\ldots},\ldots,$$

il en sera de même des fonctions v_1, v_2, etc.

D'après cela, si l'on appelle $h_1, h_2,\ldots, h_m$ les valeurs que les fonctions $v_1, v_2,\ldots, v_m$ acquièrent au point K, lorsque Z y arrive par le chemin CMK, et si l'on demande les valeurs qu'obtiennent ces mêmes fonctions, lorsque Z arrive en K par le chemin $(+\mathrm{A})(+\mathrm{A}')+\mathrm{CMK}$, on trouvera que v_1 prend la valeur h_3, v_2 la valeur h_4, et ainsi de suite jusqu'à v_{m-1} et v_m, qui prenne les valeurs h_1 et h_2. De même, si Z arrivait en K par le chemin $(-\mathrm{A})+\mathrm{CMK}$, $v_1, v_2,\ldots, v_m$ acquerraient respectivement les valeurs $h_m, h_1,\ldots, h_{m-1}$.

Ajoutons que les fonctions v_1, $v_2, \ldots, v_m$ seront développables en séries convergentes suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{m}}$, tant que le point Z restera dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA′, AA″, etc., pour rayon, et que ces développements renfermeront la puissance négative $(z-a)^{-\frac{1}{m}}$.

40. Nous n'avons parlé, dans tout ce qui précède, que des équations algébriques; mais les propositions que nous avons établies s'appliquent à l'équation transcendante

$$f(u, z) = 0,$$

pourvu que le premier membre $f(u, z)$ et ses dérivées partielles des divers ordres, prises par rapport à u et à z, soient des fonctions continues de u et de z, et n'aient pour chaque système de valeurs de ces variables qu'une seule valeur finie et déterminée. En effet, M. Cauchy a établi (*Nouveaux Exercices de Mathématiques*, tome II, page 109) que les valeurs de u, tirées d'une telle équation, varient d'une manière continue lorsque z varie d'une manière continue. Or c'est là, avec les conditions qu'on vient d'énoncer, la seule chose que suppose notre théorie.

41. On peut encore la généraliser en supposant, non plus

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

mais

$$z = \varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1};$$

nous désignons ici par $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ deux fonctions continues qui n'ont pour chaque système de valeurs de x et de y, ou, si l'on veut, pour chaque point du plan xy, qu'une valeur réelle finie et déterminée. Pour chaque point du plan, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

fournira encore des valeurs de u généralement inégales, et l'on pourra se demander ce que devient chacune d'elles en variant d'une manière continue, tandis que le point qui a pour coordonnées x et y passe d'une position initiale C à une autre position K.

Dans ce but, on déterminera d'abord les points correspondants aux valeurs de z qui font acquérir des racines infinies ou multiples à l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Si $f + g\sqrt{-1}$ désigne une pareille valeur, les coordonnées des points correspondants seront fournies par le système des deux équations

$$\varphi(x, y) = f, \quad \psi(x, y) = g.$$

Si maintenant on suppose que le point (x, y) aille de C en K par un chemin déterminé, la valeur que la fonction u acquiert au point K restera la même, lorsqu'on viendra à déformer le chemin parcouru, tant que ce chemin ne franchira aucun point pour lequel la fonction u devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation proposée. La démonstration est exactement la même que celle qui a été donnée plus haut pour le cas de $z = x + y\sqrt{-1}$.

Ensuite, si en un point A un certain nombre des fonctions de z déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0$$

deviennent égales entre elles, on prouvera encore, comme précédemment, que ces fonctions se partagent en un certain nombre de systèmes circulaires, c'est-à-dire que les fonctions qui composent un de ces systèmes étant disposées convenablement sur un cercle, chacune d'elles acquiert la valeur initiale de la suivante après une révolution du point (x, y) sur un contour infiniment petit tracé autour du point A.

Les conséquences tirées ci-dessus de ces principes subsisteront donc dans l'hypothèse plus générale dont nous parlons.

TROISIÈME PARTIE.

42. Appliquons maintenant la théorie qui précède à la recherche des valeurs multiples des intégrales définies. Considérons l'équation algébrique

$$f(u, z) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction entière quelconque de u et de z, et, comme au n° **5**, appelons u_1 une fonction de z qui satisfasse à cette équation et se réduise à b_1, lorsque le point Z, correspondant à $z = x + y\sqrt{-1}$, part de sa position initiale C. Comme l'a remarqué M. Cauchy, la notation $\int_c^k u_1\,dz$ n'offre un sens déterminé qu'autant qu'on donne, outre les limites c et k, le chemin CMK par lequel le point mobile Z est supposé aller de C en K. A la vérité, tant que le chemin CMK, en se déformant, ne franchit aucun des points A, A', A'', etc., pour lesquels l'équation

$$f(u, z) = 0$$

a des racines égales ou infinies, l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ conserve la même valeur, n° **9**; mais s'il vient à franchir quelques-uns de ces points, l'intégrale pourra changer et acquérir un nombre limité ou illimité de valeurs différentes.

Montrons d'abord comment, à l'aide des principes établis dans la première partie, on pourra calculer avec telle approximation qu'on voudra la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ relative à un chemin donné CMK; nous supposons, bien entendu, que ce chemin ne passe par aucun des points A, A', A'', etc., sans quoi l'intégrale pourrait être indéterminée. Répétons la construction expliquée au n° **16** et par laquelle la ligne CMK est partagée en un certain nombre de parties CMC', C'M'C'', C''M''C''', etc., *fig.* 7 : le long de la ligne CMC', on a, n° **15**,

$$u_1 = b_1 + F_1(b_1, c).(z - c) + F_2(b_1, c).(z - c)^2 + \ldots,$$

où le second membre est une série convergente; si donc on appelle V l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long du chemin CMC', V s'exprimera par une série convergente qu'on obtiendra en intégrant chaque terme de la précédente entre les limites $z = c$, $z = c'$: on trouvera ainsi

$$V = b_1(c' - c) + F_1(b_1, c)\cdot\frac{(c' - c)^2}{2} + F_2(b_1, c)\cdot\frac{(c' - c)^3}{2} + \ldots$$

En appelant V′, V″, etc., les valeurs des intégrales $\int_{c'}^{c''} u_1\,dz$. $\int_{c''}^{c'''} u_1\,dz$, etc., prises respectivement le long des chemins C′M′C″, C″M″C‴, etc., on aura de même

$$V' = b'_1(c''-c') + F_1(b'_1, c')\cdot\frac{(c''-c')^2}{2} + F_2(b'_1, c')\cdot\frac{(c''-c')^3}{3} + \ldots,$$

$$V'' = b''_1(c'''-c'') + F_1(b''_1, c'')\cdot\frac{(c'''-c'')^2}{2} + F_2(b''_1, c'')\cdot\frac{(c'''-c'')^3}{3} + \ldots,$$

etc.

Ces quantités V, V′, V″, etc., seront en nombre limité, et en les ajoutant, on aura la valeur demandée de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$: on pourra souvent faciliter ce calcul en profitant de la faculté qu'on a de déformer le chemin CMK, sans toutefois lui faire franchir aucun des points A, A′, A″, etc.

La même méthode peut servir à calculer la valeur de l'intégrale $\int u_1\,dz$ prise tout le long d'un contour élémentaire quelconque, du contour (+ A), par exemple, qui se compose de la ligne CD, *fig.* 24, du contour infiniment petit DNPD et de la ligne DC. En effet, du centre A, avec un rayon moindre d'une quantité finie que la plus petite des distances AC, AA′, AA″, AA‴, etc., décrivons une circonférence EQR qui coupe la ligne CD en E. Nous pourrons, sans changer l'intégrale, substituer au contour élémentaire (+ A) un autre contour formé de la ligne CE, de la circonférence EQRE et de la ligne EC. Comme ce dernier a tous ses points à des distances finies des points A, A′, A″, etc., rien n'empêchera de calculer la valeur de l'intégrale $\int u_1\,dz$ relative à ce contour par la méthode qui vient d'être exposée.

43. Soient maintenant $u_1, u_2, \ldots, u_m$ les m fonctions de z déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Appelons A_1, A_{-1}, A'_1, A'_{-1}, etc., les valeurs de l'intégrale $\int u_1\,dz$ prise tout le long de chacun des contours élémentaires (+ A), (− A),

$(+A')$, $(-A')$, etc.; appelons de même A_2, A_{-2}, A'_2, A'_{-2}, etc., les valeurs relatives à ces contours de l'intégrale $\int u_2 dz$, et ainsi de suite, de sorte que généralement $A^{(i)}_{\pm n}$ désigne la valeur de l'intégrale $\int u_n dz$ prise le long du contour élémentaire $(\pm A^{(i)})$. Ces quantités, que nous nommerons *intégrales élémentaires*, et qu'on pourra calculer comme il a été dit au numéro précédent, étant regardées comme connues, proposons-nous d'avoir l'expression de l'intégrale $\int u_1 dz$ prise à partir du point C le long d'une ligne fermée quelconque CLMC, *fig.* 4.

Soit, pour fixer les idées,

$$(+A)(-A')(+A'')(-A)$$

la caractéristique de cette ligne : il suit du n° **10** que l'intégrale $\int u_1 dz$ restera la même, si au contour CLMC on substitue la série des contours élémentaires $(+A)$, $(-A')$, $(+A'')$, $(-A)$. D'un autre côté, les fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_m$ étant partagées relativement aux différents points A, A', A'', etc., en systèmes circulaires, on saura quelle est la fonction dont u_1 acquiert la valeur initiale après une révolution de Z sur le contour $(+A)$; supposons que ce soit u_3 : on saura de même qu'après une révolution de Z sur $(-A')$, u_3 acquiert la valeur initiale de u_4, par exemple : enfin, admettons que u_4 acquière la valeur initiale de u_2 après une révolution de Z sur $(+A'')$. Cela posé, la partie relative au contour $(+A)$ de l'intégrale demandée sera A_1 ; la partie relative au contour $(-A')$ sera A'_{-3}, et les parties relatives aux contours $(+A'')$ et $(-A)$ seront respectivement A''_4 et A_{-2}. L'intégrale $\int u_1 dz$ prise le long de la ligne fermée CLMC sera donc

$$A_1 + A'_{-3} + A''_4 + A_{-2}.$$

En général, on voit que la valeur de cette intégrale, prise le long d'un contour fermé passant par le point C, s'exprimera toujours par la somme d'un certain nombre des intégrales élémentaires A_1, A_{-1}, $A'_1, \ldots$, A_2, etc.

44. Cette première question résolue, cherchons à présent les valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ pour les divers chemins par lesquels on peut aller de C en K. Soit CMK, *fig.* 17, un premier chemin tracé à volonté entre ces deux points : appelons $v_1, v_2, \ldots, v_m$ les valeurs des intégrales $\int_c^k u_1\,dz$, $\int_c^k u_2\,dz, \ldots, \int_c^k u_m\,dz$ prises le long de cette ligne, et proposons-nous de trouver la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ relativement à un autre chemin quelconque CLK.

Soit, pour fixer les idées,

$$(+\,A)(-\,A')(+\,A'')(-\,A) + \mathrm{CMK}$$

la caractéristique de ce chemin : conservons les hypothèses du numéro précédent, et supposons de plus qu'après une révolution de Z sur $(-\,A)$, u_2 acquière, par exemple, la valeur initiale de u_5. On pourra, n° **9**, substituer à la ligne CLK la série des chemins représentés par les différents termes de la caractéristique : alors on trouvera immédiatement pour l'intégrale demandée l'expression

$$A_1 + A'_{-3} + A''_4 + A_{-2} + v_5.$$

On voit par là que les valeurs autres que v_1 de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ s'obtiendront en ajoutant à l'une des quantités $v_1, v_2, \ldots, v_m$ une ou plusieurs des intégrales élémentaires A_1, A_{-1}, $A'_1, \ldots$, A_2, etc., la même intégrale élémentaire pouvant être répétée plusieurs fois dans cette somme. Observons toutefois qu'on n'aurait pas, en général, une valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ en ajoutant à une des quantités $v_1, v_2, \ldots$, v_m les produits d'un certain nombre des quantités A_1, A_{-1}, $A'_1, \ldots$, A_2, etc., par des nombres entiers pris au hasard.

45. Les intégrales élémentaires A_1, A_{-1}, etc., jouissent de quelques propriétés qu'il est bon de remarquer. Soit u_j la fonction dont u_i acquiert la valeur initiale après une révolution de Z sur le contour élémentaire $(+\,A)$; réciproquement, u_j acquerra la valeur initiale de

u_i après une révolution de Z sur le contour $(-\mathrm{A})$. Les intégrales désignées par A_i et A_{-j} ont donc leurs éléments deux à deux égaux et de signes contraires, et, par conséquent, on a

$$\mathrm{A}_{-j} = -\mathrm{A}_i;$$

ainsi chacune des intégrales $\mathrm{A}_{-1}, \mathrm{A}_{-2}, \ldots, \mathrm{A}_{-m}$, relatives au contour $(-\mathrm{A})$, est égale et de signe contraire à quelqu'une des intégrales A_1, $\mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_m$, relatives au contour $(+\mathrm{A})$, et *vice versâ*.

46. Supposons en particulier que la fonction u_i reprenne sa valeur initiale après une révolution de Z sur le contour $(+\mathrm{A})$; il en sera de même sur le contour $(-\mathrm{A})$, et l'équation précédente deviendra

$$\mathrm{A}_{-i} = -\mathrm{A}_i.$$

Dans ce cas, il suit du nº **11** que la quantité A_i est indépendante de la position initiale C du point mobile Z, c'est-à-dire qu'elle reste la même si l'on déplace le point C, et qu'en même temps le contour élémentaire (A) se déforme sans franchir aucun des points A, A′, A″, etc. On peut donc regarder A_i comme la valeur de l'intégrale $\int u_i dz$ prise le long d'un contour infiniment petit tracé autour du point A, par où l'on voit que si la fonction u_i conserve une valeur finie au point A, l'intégrale A_i se réduit à zéro.

En effet, prenons pour le contour infiniment petit dont il vient d'être question, une circonférence décrite du point A comme centre avec le rayon très-petit ρ. Pour un point de cette circonférence, on aura

$$z = a + \rho e^{\tau\sqrt{-1}},$$

τ désignant un angle réel; d'où

$$dz = \sqrt{-1}\,\rho e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau,$$

et, par suite,

$$\mathrm{A}_i = \sqrt{-1}\,\rho \int_0^{2\pi} u_i e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau.$$

Mais u_i conservant une valeur finie pour de très-petites valeurs de ρ, il en est de même de l'intégrale $\int_0^{2\pi} u_i e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau$: l'expression de A_i

se réduit donc à zéro en même temps que ρ; et comme l'intégrale A_i est indépendante de ρ, on en conclut

$$A_i = o.$$

47. Il y a un cas remarquable dans lequel on peut trouver entre les intégrales élémentaires des relations dont nous tirerons parti dans la suite. C'est celui où, après une révolution de Z sur un contour Δ passant par le point C et renfermant tous les points A, A', A'', etc., dans son intérieur, quelques-unes des fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_m$ reprennent leurs valeurs initiales.

Soit u_i une des fonctions qui remplissent cette condition : la caractéristique (Δ) du contour Δ parcouru dans le sens direct se composera des termes $(+ A)$, $(+ A')$, $(+ A'')$, etc., rangés dans un certain ordre, chacun de ces termes s'y trouvant une fois et pas davantage. Il est permis de supposer les points A, A', A'', etc., nommés dans un ordre tel, qu'on ait précisément

$$(\Delta) = (+ A)(+ A')(+ A'')\ldots;$$

admettons ensuite qu'après que Z a parcouru les lignes fermés qui ont pour caractéristiques $(+ A)$, $(+ A)$, $(+ A')$, $(+ A)$, $(+ A')$, $(+ A'')$, etc., la fonction u_i ait acquis respectivement les valeurs initiales de $u_{i'}$, $u_{i''}$, $u_{i'''}$, etc. La valeur de l'intégrale $\int u_i dz$, prise le long du contour Δ, sera

$$A_i + A'_{i'} + A''_{i''} + A'''_{i'''} + \ldots.$$

De l'origine O des coordonnées, décrivons maintenant une circonférence Θ, dont le rayon R soit plus grand que la plus grande des distances OA, OA', OA'', etc. Il est clair qu'on peut déformer le contour Δ de manière à le faire coïncider avec cette circonférence sans lui faire franchir aucun des points A, A', A'', etc. La valeur de l'intégrale $\int u_i dz$, prise le long de la circonférence Θ, est donc encore égale à la somme

$$A_i + A'_{i'} + A''_{i''} + A'''_{i'''} + \ldots.$$

Mais nous pouvons en trouver une autre expression : en effet, posons $z = \frac{1}{z'}$, z' désignant une nouvelle variable, et concevons un point mobile Z' dont les coordonnées, rapportées à deux nouveaux axes $O'x'$, $O'y'$, soient la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans z'. Les fonctions de z désignées par $u_1, u_2, \ldots, u_m$, deviendront alors des fonctions de z', qui satisferont à l'équation algébrique

$$f\left(u, \frac{1}{z'}\right) = 0;$$

et comme au delà de la circonférence Θ il n'y a pas, à une distance finie de l'origine O, de position du point Z pour laquelle l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ait des racines égales ou infinies, de même en dedans du cercle Θ', dont le centre est O' et dont le rayon est $\frac{1}{R}$, il n'y aura pas de position du point Z' autre que l'origine O', pour laquelle l'équation

$$f\left(u, \frac{1}{z'}\right) = 0$$

ait des racines égales ou infinies. D'ailleurs la fonction u_i reprend, par hypothèse, sa valeur initiale après une révolution de Z sur la circonférence Θ; par conséquent, elle reprendra aussi sa valeur initiale après une révolution de Z' sur la circonférence Θ'. Le système circulaire dont u_i fait partie relativement au point O', ne se compose donc que du seul terme u_i, et, par suite, dans l'intérieur du cercle Θ', cette fonction est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de z', cette série pouvant commencer par un nombre limité de puissances négatives, n° 58. On aura donc, pour un module de z' égal ou inférieur à $\frac{1}{R}$,

$$u_i = \alpha_i z'^{-f} + \beta_i z'^{-f+1} + \ldots + \varkappa_i + \lambda_i z' + \mu_i z'^2 + \ldots,$$

f désignant un nombre entier et positif, et $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \varkappa_i, \lambda_i, \mu_i$, etc., des coefficients indépendants de z' : on en conclut que, pour un module de z égal ou supérieur à R, on a

$$u_i = \alpha_i z^f + \beta_i z^{f-1} + \ldots + \varkappa_i + \frac{\lambda_i}{z} + \frac{\mu_i}{z^2} + \ldots.$$

Si maintenant on veut avoir l'intégrale $\int u_i\,dz$ prise le long du cercle Θ, il suffit de faire

$$z = \mathrm{R}e^{\tau\sqrt{-1}},$$

d'où

$$dz = \sqrt{-1}\,\mathrm{R}e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau,$$

et, par conséquent,

$$\int u_i\,dz = \sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} \alpha_i\mathrm{R}^{f-1}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(f+1)\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ +\,\beta_i\mathrm{R}^f\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{f\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \\ +\,\varkappa_i\mathrm{R}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \lambda_i\int_0^{2\pi} d\tau \\ +\,\dfrac{\mu_i}{\mathrm{R}}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \end{array}\right\} = 2\pi\lambda_i\sqrt{-1}.$$

Nous avons donc l'équation

$$\mathrm{A}_i + \mathrm{A}'_{i'} + \mathrm{A}''_{i''} + \mathrm{A}'''_{i'''} + \ldots = 2\pi\lambda_i\sqrt{-1},$$

où λ_i désigne le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de u_i suivant les puissances descendantes de z, et nous aurons une équation semblable pour chaque fonction u_i qui reprend sa valeur initiale après une révolution de Z sur le contour fermé Δ qui renferme dans son intérieur tous les points A, A′, A″, etc.

48. Nous avons dit plus haut, n° **44**, qu'on n'aurait pas, en général, une valeur de $\int_c^k u_1\,dz$ en ajoutant à une des quantités v_1, $v_2, \ldots, v_m$ des multiples entiers pris au hasard des intégrales élémentaires. Mais il existe certains groupes de ces intégrales qui jouissent d'une propriété remarquable : c'est que la somme des intégrales élémentaires composant un de ces groupes, somme qui est indépendante de c, peut être ajoutée ou retranchée autant de fois qu'on voudra à une valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, sans qu'on cesse d'avoir une valeur de la même intégrale.

En effet, soit w la valeur de $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long du chemin $(\Gamma) + \mathrm{CMK}$, en désignant par (Γ) la caractéristique d'un contour fermé passant par le point C. Séparons d'une manière quelconque les termes de (Γ) en deux groupes (Γ') et (Γ'') [l'un de ces groupes pouvant être (o)], de sorte que la caractéristique $(\Gamma) + \mathrm{CMK}$ puisse se mettre sous la forme $(\Gamma')(\Gamma'') + \mathrm{CMK}$. Soit maintenant u_n la fonction dont u_1 acquiert la valeur initiale après une révolution du point Z sur le contour fermé (Γ'); on pourra tracer de plusieurs manières un contour fermé passant par le point C tel, qu'après une révolution de Z sur ce contour, la fonction u_n reprenne sa valeur initiale. Appelons (Φ) et $(-\Phi)$ les caractéristiques d'un pareil contour, selon qu'il est supposé parcouru dans un sens ou dans le sens contraire. Soit, de plus, p la valeur de l'intégrale $\int u_n\,dz$ prise le long du contour (Φ); cette quantité p pourra s'exprimer, n° **43**, par la somme d'un certain nombre d'intégrales élémentaires, et il suit du n° **12** qu'elle est indépendante de la position du point C.

Cela posé, il est clair que l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long des chemins

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma')(\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK},\\
&(\Gamma')(\Phi)(\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK},\\
&(\Gamma')(\Phi)(\Phi)(\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK}, \quad \text{etc.},\\
&(\Gamma')(-\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK},\\
&(\Gamma')(-\Phi)(-\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK}, \quad \text{etc.},
\end{aligned}
$$

aura respectivement pour valeurs

$$
\begin{aligned}
&p + w, \qquad 2p + w, \quad 3p + w, \quad \text{etc.},\\
-&p + w, \quad -2p + w, \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

On voit donc que si à la valeur w de $\int_c^k u_1\,dz$ on ajoute un multiple entier quelconque de p, on aura encore une valeur de la même intégrale : nous dirons pour cette raison que p est une *période* de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$.

Voici maintenant quelques-unes des questions qui se présentent :

1°. Trouver toutes les périodes *distinctes* qui appartiennent à une valeur de $\int_c^k u_1\,dz$: nous entendons que des périodes sont distinctes, quand aucune ne peut s'obtenir en ajoutant des multiples entiers des autres; ainsi $2p$ ne sera pas une période distincte de p, ni $p+q$ une période distincte de p et de q.

2°. Reconnaître si chaque période p appartient à toutes les valeurs de l'intégale $\int_c^k u_1\,dz$ ou seulement à une partie d'entre elles.

3°. Déterminer les valeurs de $\int_c^k u_1\,dz$ qui restent distinctes lorsqu'on fait abstraction des multiples entiers des périodes.

La solution de ces questions dans plusieurs cas étendus fait l'objet de la suite de ce Mémoire.

49. Le cas le plus simple est celui où la fonction u est rationnelle; alors l'équation

$$f(u, z) = 0$$

est du premier degré, et, par conséquent, ne peut avoir de racines égales; mais la valeur de u peut devenir infinie pour un certain nombre de valeurs de z. Soient a, a', a'', etc., ces valeurs, et A, A', A'', etc., les points correspondants; il sera toujours possible de mettre u sous la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{E}{z-a}+\frac{E_1}{(z-a)^2}+\frac{E_2}{(z-a)^3}+\ldots+\frac{E_{m-1}}{(z-a)^m}\\
&+\frac{E'}{z-a'}+\frac{E'_1}{(z-a')^2}+\ldots+\frac{E'_{m'-1}}{(z-a')^{m'}}\\
&+\frac{E''}{z-a''}+\frac{E''_1}{(z-a'')^2}+\ldots+\frac{E''_{m''-1}}{(z-a'')^{m''}}+\ldots+\varpi(z),
\end{aligned}$$

E, E_1, E_2,..., E'_1, E'_2, etc., désignant des constantes, et $\varpi(z)$ une fonction entière de z.

Les intégrales élémentaires relatives aux contours $(+A)$, $(-A)$, $(+A')$, $(-A')$, $(+A'')$, $(-A'')$, etc., seront ici indépendantes de la position du point C, et auront respectivement pour valeurs

$$+2\pi E\sqrt{-1},\quad -2\pi E\sqrt{-1},\quad +2\pi E'\sqrt{-1},$$
$$-2\pi E'\sqrt{-1},\quad +2\pi E''\sqrt{-1},\quad -2\pi E''\sqrt{-1},\ldots.$$

Si donc on appelle v la valeur de l'intégrale $\int_c^k u\,dz$ relative à un chemin déterminé CMK, toutes les valeurs de cette intégrale seront données par la formule

$$v + 2\pi\sqrt{-1}\,(nE + n'E' + n''E'' + \ldots),$$

n, n', n'', etc., désignant des nombres entiers quelconques positifs, négatifs ou nuls.

Les périodes $2\pi E\sqrt{-1}$, $2\pi E'\sqrt{-1}$, $2\pi E''\sqrt{-1}$, etc., seront généralement distinctes et en même nombre que les valeurs de z qui rendent la fonction u infinie; mais il n'en serait plus de même si un ou plusieurs des nombres E, E', E'', etc., pouvaient s'obtenir en ajoutant des multiples entiers des autres. D'ailleurs les valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ seront toujours en nombre infini, à moins que les nombres E, E', E'', etc., ne soient tous nuls, auquel cas l'intégrale n'aurait que la valeur v.

Ce qu'on vient de dire de la fonction rationnelle u s'appliquerait également à toute fonction transcendante susceptible d'être mise sous la forme

$$\frac{E}{z-a} + \frac{E_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{E_{m-1}}{(z-a)^m} + \frac{E'}{z-a'} + \ldots + \frac{E'_{m-1}}{(z-a')^{m'}} + \ldots + \varpi(z),$$

$\varpi(z)$ désignant une fonction qui n'a qu'une seule valeur et qui reste finie et continue pour toute valeur finie de z. Les constantes E, E', etc., sont ce que M. Cauchy appelle les résidus de la fonction u relatifs aux valeurs a, a', etc., de z, et les périodes qu'on trouve dans ce cas pour l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ sont bien celles qui ont été indiquées par cet illustre géomètre. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, année 1846.)

Cherchons en particulier les périodes de l'intégrale $\int_0^k \frac{dz}{1+z^2}$: les quantités E, E', etc., sont ici au nombre de deux et ont pour valeurs $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, d'où résultent, pour l'intégrale, les deux périodes $+\pi$ et $-\pi$; comme elles sont égales et de signes contraires, ces deux périodes se réduisent à une seule $+\pi$. On sait, en effet, que les valeurs de l'intégrale $\int_0^k \frac{dz}{1+z^2}$ sont les différents arcs qui ont k pour tangente, et que ces arcs sont tous compris dans la formule $v+n\pi$, v désignant l'un d'entre eux.

50. Lorsque l'équation

$$f(u, z) = 0$$

est du second degré en u, les deux valeurs de u peuvent être mises sous la forme

$$u = \frac{P}{Q} \pm \frac{R}{S}\sqrt{\frac{T}{U}},$$

P, Q, R, S, T, U désignant des polynômes entiers. Supposons, ce qui est permis, que T et U n'aient pas de facteurs multiples, que R soit premier avec S et U, que T le soit aussi, et, enfin, que P et Q soient premiers entre eux; les valeurs de z qui annuleront un des polynômes Q, R, S, T, U, seront celles qui feront acquérir à l'équation

$$f(u, z) = 0$$

des racines égales ou infinies.

Appelons A, A', A'', etc., les points correspondants aux valeurs de z qui annulent T ou U, et $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc., les points correspondants aux valeurs de z qui annulent un des polynômes Q, R, S, sans annuler T ni U. Désignons par $(\pm A)$, $(\pm A')$, etc., les contours élémentaires qui renferment les points A, A', etc., et par $(\pm \mathcal{A})$, $(\pm \mathcal{A}')$, etc., ceux qui renferment les points $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. Enfin, nommons $A_{\pm 1}$, $A_{\pm 2}$, $A'_{\pm 1}$, $A'_{\pm 2}$, etc., les intégrales élémentaires relatives aux contours $(\pm A)$, $(\pm A')$, etc., et $\mathcal{A}_{\pm 1}$, $\mathcal{A}_{\pm 2}$, $\mathcal{A}'_{\pm 1}$, $\mathcal{A}'_{\pm 2}$, etc., les intégrales élémentaires relatives aux contours $(\pm \mathcal{A})$ $(\pm \mathcal{A}')$, etc.

On voit sans peine que, relativement à chacun des points A, A', A″, etc., les deux fonctions u_1 et u_2 forment un système circulaire; si donc $\mathrm{A}^{(i)}$ désigne un quelconque de ces points, on aura, n° **45**,

$$\mathrm{A}^{(i)}_{-1} = -\mathrm{A}^{(i)}_{2},\quad \mathrm{A}^{(i)}_{-2} = -\mathrm{A}^{(i)}_{1}.$$

Mais si l'on appelle $A^{(i)}$ un des points A, A', A''', etc., comme, après une révolution de Z sur un contour infiniment petit tracé autour de $A^{(i)}$, chacune des fonctions u_1, u_2 reprend sa propre valeur initiale, on aura, n° **46**,

$$A^{(i)}_{-1} = -A^{(i)}_{1},\quad A^{(i)}_{-2} = -A^{(i)}_{2}.$$

En regardant ces intégrales élémentaires comme connues, ainsi que les valeurs v_1, v_2 des intégrales $\int_c^k u_1\,dz$, $\int_c^k u_2\,dz$ prises le long d'un chemin déterminé CMK, nous saurons trouver la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long d'un autre chemin quelconque CLK, dont la caractéristique sera donnée. Proposons-nous maintenant de former des expressions générales qui comprennent les valeurs de $\int_c^k u_1\,dz$ relatives à tous les chemins CLK par lesquels on peut aller de C en K.

Appelons (Λ) la caractéristique du chemin CLK; soit $[\pm A^{(i)}]$ un terme de cette caractéristique et n le nombre des termes qui le précèdent. Lorsque le point Z aura parcouru les contours élémentaires représentés par les n premiers termes de (Λ), la fonction u_1 aura repris sa valeur initiale, ou bien aura acquis la valeur initiale de u_2. Dans le premier cas, la portion de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, qui est prise le long du contour élémentaire $[\pm A^{(i)}]$, sera $A^{(i)}_{\pm 1}$; dans le second cas, cette portion sera $A^{(i)}_{\pm 2}$. D'ailleurs la fonction u_1 reprendra, après que Z aura parcouru ce $n+1^{ième}$ contour élémentaire, la valeur qu'elle avait après les n premiers. On peut donc supprimer, dans la caractéristique (Λ), tous les termes de la forme $[\pm A^{(i)}]$, et se borner à calculer la valeur de $\int_c^k u_1\,dz$ pour le chemin représenté par la caractéristique ainsi simplifiée, pourvu qu'on ajoute à cette valeur une quantité de la forme

$$\begin{aligned}F = {} & l_1 A_1 + l'_1 A'_1 + l''_1 A''_1 + \ldots \\ & + l_{-1} A_{-1} + l'_{-1} A'_{-1} + l''_{-1} A''_{-1} + \ldots \\ & + l_2 A_2 + l'_2 A'_2 + \ldots + l_{-2} A_{-2} + l'_{-2} A'_{-2} + \ldots;\end{aligned}$$

$l_1, l'_1, l''_1, \ldots, l_{-1}, l'_{-1}, \ldots, l_2, l'_2$, etc., désignant des nombres entiers positifs, nuls, et même, si l'on veut, négatifs, puisqu'on a

$$l^{(i)}_{-1} A^{(i)}_{-1} = - l^{(i)}_{-1} A^{(i)}_1, \quad l^{(i)}_{-2} A^{(i)}_{-2} = - l^{(i)}_{-2} A^{(i)}_2.$$

Il est clair d'ailleurs qu'en disposant convenablement du chemin CLK, on fera acquérir à ces nombres telles valeurs entières qu'on voudra; il suffira, pour cela, d'introduire dans la caractéristique (A) des termes de la forme $[\pm A^{(i)}]$

Cette caractéristique étant débarrassée des termes de la forme $[\pm A^{(i)}]$, n'en contiendra plus que de la forme $[\pm \mathrm{A}^{(i)}]$, outre le dernier qui est $+$ CMK. Soit

$$(\mathrm{A}') = [\pm \mathrm{A}^{(e)}][\pm \mathrm{A}^{(f)}][\pm \mathrm{A}^{(g)}][\pm \mathrm{A}^{(h)}]\ldots[\pm \mathrm{A}^{(i)}] + \mathrm{CMK}$$

la caractéristique ainsi modifiée : à mesure que Z achèvera de décrire chacun des contours élémentaires qui la composent, il arrivera alternativement ou que la fonction u_1 acquerra la valeur initiale de u_2, ou qu'elle reprendra sa propre valeur initiale. Si donc le nombre des contours élémentaires qui entrent dans (A') est pair, la valeur de $\int_c^k u_1\,dz$, prise le long du chemin (A'), sera

$$\mathrm{V}_1 = \mathrm{A}^{(e)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(f)}_{\pm 2} + \mathrm{A}^{(g)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(h)}_{\pm 2} + \ldots + \mathrm{A}^{(i)}_{\pm 2} + v_1,$$

et si le nombre dont on vient de parler est impair, la valeur de l'intégrale sera

$$\mathrm{V}_2 = \mathrm{A}^{(e)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(f)}_{\pm 2} + \mathrm{A}^{(g)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(h)}_{\pm 2} + \ldots + \mathrm{A}^{(i)}_{\pm 1} + v_2.$$

Appelons B, $\mathrm{B}_{,}$, $\mathrm{B}_{,,}$, $\mathrm{B}_{,,,}$, etc., tous les résultats qu'on obtient en ajoutant une des quantités $\mathrm{A}_{\pm 2}$, $\mathrm{A}'_{\pm 2}$, $\mathrm{A}''_{\pm 2}$, etc., à l'une des quantités $\mathrm{A}_{\pm 1}$, $\mathrm{A}'_{\pm 1}$, $\mathrm{A}''_{\pm 1}$, etc.; chacune des expressions V_1, V_2 sera, sauf son dernier ou ses deux derniers termes, la somme d'un certain nombre des quantités B, $B_{,}$, $B_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime\prime}$, etc., la même pouvant être répétée plusieurs fois. Ainsi on aura

$$V_1 = mB + m_{,}B_{,} + m_{\prime\prime}B_{\prime\prime} + \ldots + v_1,$$
$$V_2 = mB + m_{,}B_{,} + m_{\prime\prime}B_{\prime\prime} + \ldots + A_{\pm 1}^{(i)} + v_2,$$

m, $m_{,}$, $m_{\prime\prime}$, etc., désignant des nombres entiers quelconques, lesquels peuvent être positifs, nuls, ou même négatifs, puisque les quantités B, $B_{,}$, $B_{\prime\prime}$ sont deux à deux égales et de signes contraires. Observons qu'on a

$$A_1 + A_{-2} = 0,$$

et, par conséquent,

$$A_{\pm 1}^{(i)} = A_{\pm 1}^{(i)} + A_{-2} + A_1,$$

où la somme $A_{\pm 1}^{(i)} + A_{-2}$ est une des quantités B, $B_{,}$, $B_{\prime\prime}$, etc. : l'intégrale désignée par V_2 peut donc aussi se mettre sous la forme

$$V_2 = mB + m_{,}B_{,} + m_{\prime\prime}B_{\prime\prime} + \ldots + A_1 + v_2.$$

Pour avoir maintenant la valeur de $\int_c^k u_1\,dz$ relativement à un chemin quelconque CLK, il suffira d'ajouter la quantité F à l'une des quantités V_1, V_2. Il en résulte que toutes les valeurs de l'intégrale définie $\int_c^k u_1\,dz$ sont comprises dans les deux formules

$$G + v_1, \quad G + A_1 + v_2,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} G = {} & l_1 A_1 + l_1' A_1' + l_1'' A_1'' + \ldots + l_{-1} A_{-1} + l_{-1}' A_{-1}' + l_{-1}'' A_{-1}'' + \ldots \\ & + l_2 A_2 + l_2' A_2' + \ldots + l_{-2} A_{-2} + l_{-2}' A_{-2}' + \ldots \\ & + mB + m_{,}B_{,} + m_{\prime\prime}B_{\prime\prime} + \ldots, \end{aligned}$$

les lettres l_1, l_1',..., l_{-1}, l_{-1}',..., l_2,..., l_{-2},..., m, $m_{,}$, $m_{\prime\prime}$, etc., désignant, comme on l'a déjà dit, des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs et absolument quelconques. En d'autres termes, toutes les valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ peuvent s'obtenir en ajoutant aux deux valeurs v_1 et $A_1 + v_2$ des multiples entiers quelconques des quantités

$$\begin{array}{l} A_1,\quad A'_1,\quad A''_1,\ldots,\quad A_{-1},\quad A'_{-1},\quad A''_{-1},\ldots \\ A_2,\quad A'_2,\ldots,\quad A_{-2},\quad A'_{-2},\ldots, \\ \mathrm{B},\quad \mathrm{B}_{,},\quad \mathrm{B}_{,,},\quad \text{etc.} \end{array}$$

Ces quantités sont donc autant de périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, et toute autre période de la même intégrale est nécessairement composée de celles-là; mais elles ne sont pas toutes distinctes, et, en ayant égard aux équations établies ci-dessus,

$$A_{-1}^{(i)} = -A_1^{(i)},\quad A_{-2}^{(i)} = -A_2^{(i)},\quad \mathrm{A}_{-1}^{(i)} = -\mathrm{A}_2^{(i)},\quad \mathrm{A}_{-2}^{(i)} = -\mathrm{A}_1^{(i)}.$$

on reconnaîtra sans peine qu'elles peuvent être réduites aux suivantes :

$$\begin{array}{l} A_1,\quad A'_1,\quad A''_1,\ldots,\quad A_2,\quad A'_2,\quad A''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2,\quad \mathrm{A}_1+\mathrm{A}'_2,\quad \mathrm{A}_1+\mathrm{A}''_2,\quad \mathrm{A}_1+\mathrm{A}'''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}_2+\mathrm{A}'_1,\quad \mathrm{A}_2+\mathrm{A}''_1,\quad \mathrm{A}_2+\mathrm{A}'''_1,\ldots, \\ \mathrm{A}'_1+\mathrm{A}'_2,\quad \mathrm{A}'_1+\mathrm{A}''_2,\quad \mathrm{A}'_1+\mathrm{A}'''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}'_2+\mathrm{A}''_1,\quad \mathrm{A}'_2+\mathrm{A}'''_1,\ldots, \\ \mathrm{A}''_1+\mathrm{A}''_2,\quad \mathrm{A}''_1+\mathrm{A}'''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}''_2+\mathrm{A}'''_1,\ldots, \\ \quad\text{etc.} \end{array}$$

Ces dernières périodes seront distinctes en général; mais, dans des cas particuliers, elles pourront se réduire à un nombre beaucoup moindre.

Il suit de la remarque faite au n° **46**, qu'une période telle que A_1 ou A_2 est indépendante des limites c et k et peut être regardée comme la valeur de l'intégrale $\int u_1\,dz$ ou $\int u_2\,dz$ prise tout le long d'un contour fermé infiniment petit qui renferme le point A. Une période telle que $\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2$ exprime la valeur de l'intégrale $\int (u_1+u_2)\,dz$ prise tout le long du contour élémentaire $(+\mathrm{A})$; mais, comme la fonction u_1+u_2 reprend sa valeur initiale après une révolution de Z sur ce contour, l'intégrale dont il s'agit est indépendante de la position du point C, n° **11**, et peut être considérée comme prise tout le long d'un contour infiniment petit qui entoure le point A. Enfin, une période telle que $A_1 + A'_2$ est égale à la valeur de l'intégrale $\int u_1\, dz$ prise le long du contour fermé qui a pour caractéristique $(+A)(+A')$; comme après une révolution de Z sur ce contour la fonction u_1 reprend sa valeur initiale, l'intégrale ou, ce qui est la même chose, la période $A_1 + A'_2$ sera indépendante de la position du point C et pourra être considérée comme prise tout le long d'un contour fermé assujetti seulement à renfermer les points A et A', avec cette condition toutefois qu'il puisse se réduire au contour $(+A)(+A')$ sans franchir aucun des points A, A', A'', etc., $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc. On voit donc que toutes les périodes dont le tableau a été donné ci-dessus seront bien indépendantes des limites c et k de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$.

Nous venons de dire que la période $A_1 + A'_2$ était égale à la valeur de l'intégrale $\int u_1\, dz$ prise le long d'un contour fermé qui entoure les deux points A et A'. Soit ADHD'A', *fig.* 25, une ligne tracée entre ces points et avec laquelle le contour dont il s'agit puisse se confondre sensiblement sans franchir aucun des points A, A', A'', etc., de sorte que ce contour puisse être regardé comme formé de la ligne DHD', du contour fermé infiniment petit D'E'F'D', de la ligne D'HD, et enfin du contour infiniment petit DEFD. On voit aisément qu'il y a un cas fort étendu où les portions de l'intégrale $\int u_1\, dz$ relatives aux contours infiniment petits DEFD, D'E'F'D' tendent vers zéro, à mesure que les dimensions de ces contours diminuent elles-mêmes jusqu'à zéro; ce cas est celui où la limite du produit $(z-a)u_1$, pour $z=a$, et la limite du produit $(z-a')u_1$, pour $z=a'$, sont nulles l'une et l'autre. En effet, pour des valeurs très-petites du module de $z-a$, la fonction u_1 est développable suivant les puissances entières négatives et positives de $(z-a)^{\frac{1}{2}}$: si donc le produit $(z-a)u_1$ se réduit à zéro pour $z=a$, le développement de u_1 doit être de la forme

$$u_1 = A(z-a)^{-\frac{1}{2}} + B + C(z-a)^{\frac{1}{2}} + D(z-a) + E(z-a)^{\frac{3}{2}} + \ldots .$$

Mais il est permis de prendre pour le contour DEFD une circonférence décrite du point A comme centre avec un rayon très-petit ρ et de faire sur cette circonférence

$$z = a + \rho e^{\tau\sqrt{-1}},$$

d'où

$$dz = \sqrt{-1}\,\rho e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau :$$

il s'ensuit que la partie de l'intégrale $\int u_1\,dz$ relative au contour DEFD est égale à

$$\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} A\rho^{\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\frac{\tau}{2}\sqrt{-1}}\,d\tau + B\rho\int_0^{2\pi} e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ + C\rho^{\frac{3}{2}}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\frac{3\tau}{2}\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \end{array}\right\}$$

$$= -4\left(A\rho^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}C\rho^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}E\rho^{\frac{5}{2}} + \ldots\right),$$

et l'on voit qu'elle s'annule en même temps que ρ, comme nous l'avions annoncé. On prouvera de même que la portion d'intégrale relative au contour D'E'F'D' se réduit à zéro en même temps que les dimensions de ce contour. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, la période $A_1 + A'_2$ est la limite de la somme des portions d'intégrale relatives aux deux chemins DHD' et D'HD, quand les points D et D' tendent respectivement vers A et A' : mais lorsque le point Z, après avoir parcouru le chemin DHD', revient suivre le chemin D'HD, en faisant le tour du point A', la fonction u_1 ne reprend pas les valeurs par lesquelles elle était passée d'abord, mais acquiert les valeurs qu'aurait eues dans un ordre inverse la fonction u_2, en partant du point D. La somme des portions d'intégrale relatives aux chemins DHD' et D'HD est donc la même chose que l'intégrale $\int (u_1 - u_2)\,dz$ prise le long de la ligne DHD', et en passant à la limite, on en conclut que la période $A_1 + A'_2$ est égale à la valeur de l'intégrale $\int (u_1 - u_2)\,dz$ prise le long de la ligne AHA'.

Ajoutons que, dans le cas que nous venons de considérer, la somme $A_1 + A_2$ se réduit à zéro; car elle exprime la valeur de l'intégrale $\int (u_1 + u_2)\,dz$, prise le long du contour DEFD; or on a, en prenant pour ce contour la circonférence du rayon ρ,

$$u_1 + u_2 = 2B + 2D(z-a) + 2F(z-a)^2 + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\int (u_1 + u_2)\,dz = 2\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} \quad B\rho \int_0^{2\pi} e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ + D\rho^2 \int_0^{2\pi} e^{2\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ + F\rho^3 \int_0^{2\pi} e^{3\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

On voit, de la même manière, que la somme $A'_1 + A'_2$ est aussi nulle; ainsi les périodes $A_1 + A_2$, $A'_1 + A'_2$, disparaissent, tandis que les périodes $A_1 + A'_2$, $A_2 + A'_1$, étant égales et de signes contraires, n'en font plus qu'une seule distincte.

Lorsque le nombre des points A, A', A'', etc., sera un nombre pair $2n$, on pourra appliquer la remarque du n° **47**. Dans ce cas, en effet, chacune des fonctions u_1, u_2 reprendra sa valeur initiale après une révolution du point Z sur le contour Δ qui, passant par le point C, enveloppe tous les points A, A', A'', etc., $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'''$, etc. La caractéristique (Δ) de ce contour contiendra deux sortes de termes qui pourront s'y trouver entremêlés, les uns de la forme $[+A^{(i)}]$, les autres de la forme $[+\mathcal{A}^{(i)}]$. Supposons, ce qui est permis, que les contours élémentaires $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$,..., $[+A^{(2n-2)}]$, $[+A^{(2n-1)}]$, s'y trouvent dans l'ordre où nous venons de les écrire, sauf les termes de la forme $[+\mathcal{A}^{(i)}]$ qui peuvent se trouver entre eux. Appelons $[+\mathcal{A}^{(\mu)}]$, $[+\mathcal{A}^{(\mu')}]$, $[+\mathcal{A}^{(\mu'')}]$, etc., ceux de ces derniers qui, dans la caractéristique (Δ), ont avant eux un nombre pair de termes de la forme $[+A^{(i)}]$, et $[+\mathcal{A}^{(\nu)}]$, $[+\mathcal{A}^{(\nu')}]$, $[+\mathcal{A}^{(\nu'')}]$, etc., ceux qui ont avant eux un nombre impair de termes de la forme $[+A^{(i)}]$. L'équation du n° **47**, appliquée successivement aux deux fonctions u_1 et u_2, nous donnera

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_1^{(\mu)} + \mathcal{A}_1^{(\mu')} + \mathcal{A}_1^{(\mu'')} + \ldots + \mathcal{A}_2^{(\nu)} + \mathcal{A}_2^{(\nu')} + \mathcal{A}_2^{(\nu'')} + \ldots \\ &+ \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_2 + \mathrm{A}''_1 + \mathrm{A}'''_2 + \ldots + \mathrm{A}_1^{(2n-2)} + \mathrm{A}_2^{(2n-1)} = 2\pi\lambda_1\sqrt{-1}, \\ &\mathcal{A}_2^{(\mu)} + \mathcal{A}_2^{(\mu')} + \mathcal{A}_2^{(\mu'')} + \ldots + \mathcal{A}_1^{(\nu)} + \mathcal{A}_1^{(\nu')} + \mathcal{A}_1^{(\nu'')} + \ldots \\ &+ \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_2 + \mathrm{A}'''_1 + \ldots + \mathrm{A}_2^{(2n-2)} + \mathrm{A}_1^{(2n-1)} = 2\pi\lambda_2\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

λ_1 et λ_2 désignant les coefficients de $\frac{1}{z}$ dans les développements de u_1 et de u_2, suivant les puissances décroissantes de z.

Le premier membre de chacune de ces équations est la somme d'une partie des périodes contenues dans le tableau ci-dessus : lorsque λ_1 et λ_2 seront nuls, on tirera de là les valeurs de deux de ces périodes exprimées chacune par la somme prise en signe contraire de plusieurs autres, ce qui permettra de réduire de deux unités le nombre des périodes distinctes.

51. Faisons maintenant quelques applications de ce qui vient d'être dit dans le numéro précédent, et, d'abord, supposons que l'équation entre u et z soit

$$(z-a)\,u^2 = h^2,$$

h désignant une constante. Appelons A le point qui répond à $z = a$, et autour duquel les fonctions u_1, u_2 forment un système circulaire : l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ n'aura qu'une seule période $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$, qui exprime l'intégrale $\int (u_1 + u_2)\,dz$, prise sur le contour élémentaire $(+\mathrm{A})$. Mais, dans l'exemple dont il s'agit, on a

$$u_1 + u_2 = 0;$$

il en résulte

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = 0.$$

La période est donc nulle, et l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ n'a que les deux valeurs v_1 et $\mathrm{A}_1 + v_2$.

On arriverait à la même conclusion en considérant l'équation

$$u^2 = h^2(z-a).$$

52. Prenons ensuite l'équation

$$(z-a)(z-a')u^2 = h^2:$$

appelons A et A′ les points correspondants à $z=a$ et à $z=a'$; relativement à chacun d'eux, les fonctions u_1 et u_2 forment un système circulaire. Les expressions générales des périodes données au n° **50** se réduisent ici aux quatre quantités

$$A_1 + A_2,\quad A_1 + A'_2,\quad A_2 + A'_1,\quad A'_1 + A'_2;$$

mais, de la relation $u_1 + u_2 = 0$, on conclut

$$A_1 + A_2 = 0,\quad A'_1 + A'_2 = 0,$$

et, par suite,

$$A_2 + A'_1 = -(A_1 + A'_2).$$

Ainsi les quatre périodes se ramènent à une seule distincte $A_1 + A'_2$; comme le produit $(z-a)u_1$ se réduit à zéro pour $z=a$, et qu'il en est de même du produit $(z-a')u_1$ pour $z=a'$, il suit d'une remarque faite au n° **50**, qu'on peut regarder la période $A_1 + A'_2$ comme exprimant la valeur de l'intégrale

$$\int_a^{a'}(u_1-u_2)\,dz = 2\int_a^{a'}u_1\,dz = 2h\int_a^{a'}\frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-a')}},$$

prise le long de la droite AA′. Pour en trouver la valeur, posons

$$z = \frac{a+a'}{2} + \frac{a-a'}{2}z',$$

z' étant une nouvelle variable à laquelle on peut faire correspondre un point mobile Z′. Les limites de z étant a et a', celles de z' seront -1 et $+1$, et lorsque le point Z décrira la droite AA′, le point Z′ décrira la portion de l'axe des x comprise entre les deux points qui répondent à $z'=-1$, $z'=+1$. On aura donc

$$2h\int_a^{a'}\frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-a')}} = 2h\int_{-1}^{+1}\frac{dz'}{\sqrt{z'^2-1}} = \frac{2h}{\sqrt{-1}}\int_{-1}^{+1}\frac{dz'}{\sqrt{1-z'^2}},$$

en supposant que z' passe de la valeur -1 à la valeur $+1$ par une suite de valeurs réelles et croissantes; mais, sous cette condition, on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{1-z'^2}} = \pi;$$

par conséquent la période unique de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ est $\frac{2\pi h}{\sqrt{-1}}$, ou, si l'on veut, $-\frac{2\pi h}{\sqrt{-1}} = 2\pi h\sqrt{-1}$, car il importe peu qu'on change le signe d'une période.

On peut l'obtenir autrement en observant que les points A, A' sont ici en nombre pair, et qu'ainsi on peut appliquer la remarque qui termine le n° **50**. Les coefficients de $\frac{1}{z}$, dans les développements de u_1 et de u_2, suivant les puissances décroissantes de z, sont $\pm h$ et $\mp h$; les deux équations établies à l'endroit qu'on vient de citer deviennent donc

$$A_1 + A'_2 = \pm 2\pi h\sqrt{-1}, \quad A_2 + A'_1 = \mp 2\pi h\sqrt{-1};$$

on retrouve bien, pour la période $A_1 + A'_2$, la même valeur $\pm 2\pi h\sqrt{-1}$.

Faisons, en particulier,

$$a = +1, \quad a' = -1, \quad h = +\sqrt{-1},$$

de sorte qu'on ait

$$u^2 = \frac{1}{1-z^2},$$

et posons

$$\int_0^z u_1\,dz = v,$$

u_1 désignant celle des valeurs de u dont la valeur initiale est $+1$ pour $z = 0$. Les diverses valeurs de v sont les arcs en nombre infini qui ont z pour sinus; en d'autres termes, on a

$$z = \sin v;$$

la période $\pm 2\pi h\sqrt{-1}$ se réduit ici à 2π, ce qui s'accorde bien avec l'équation connue

$$\sin(v + 2l\pi) = \sin v,$$

où l désigne un nombre entier quelconque.

Si au lieu de l'équation

$$(z-a)(z-a')u^2 = h^2,$$

on eût considéré celle-ci :

$$u^2 = h^2(z-a)(z-a'),$$

on eût trouvé de la même manière, pour la période unique de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, l'expression

$$\frac{\pi h(a'-a)^2}{4}\sqrt{-1}.$$

53. Passons à l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')u^2 = h^2 :$$

la méthode générale fournira pour les périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ les neuf quantités

$$\begin{array}{lllll} A_1 + A_2, & A_1 + A'_2, & A_1 + A''_2, & A_2 + A'_1, & A_2 + A''_1, \\ A'_1 + A'_2, & A'_1 + A''_2, & A'_2 + A''_1, & A''_1 + A''_2. & \end{array}$$

Mais, à cause de la relation

$$u_1 + u_2 = 0,$$

on a

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0, \quad A''_1 + A''_2 = 0;$$

il en résulte

$$\begin{array}{lll} A_1 + A'_2 = A_1 - A'_1, & A_1 + A''_2 = -(A''_1 - A_1), & A_2 + A'_1 = -(A_1 - A'_1), \\ A_2 + A''_1 = A''_1 - A_1, & A'_1 + A''_2 = A'_1 - A''_1, & A'_2 + A''_1 = -(A'_1 - A''_1), \end{array}$$

ce qui réduit les périodes précédentes aux trois suivantes :

$$A_1 - A'_1, \quad A'_1 - A''_1, \quad A''_1 - A_1,$$

et celles-ci à leur tour, ayant zéro pour somme, se réduisent à deux distinctes pour lesquelles on peut prendre

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1,$$

ou, si l'on veut, n° **45**,

$$A_1 + A'_2, \quad A_1 + A''_2.$$

Ces deux périodes peuvent être regardées, n° **50**, comme les valeurs des intégrales $\int_a^{a'} (u_1 - u_2)\, dz$, $\int_a^{a''} (u_1 - u_2)\, dz$ prises le long de certaines lignes AH'A', AH''A'' menées du point A aux points A' et A'', et en disposant convenablement des lignes CDA, CD'A', CD''A'', *fig.* 12, avec lesquelles les contours (A), (A'), (A'') se confondent sensiblement, on peut supposer que les lignes AH'A', AH''A'' sont précisément les droites AA', AA''. Alors, si l'on veut exprimer ces périodes par d'autres intégrales où la variable passe de la limite inférieure à la limite supérieure par une suite de valeurs réelles et croissantes, il suffira de faire dans la première

$$z = \frac{a + a'}{2} + \frac{a' - a}{2} z'.$$

et dans la seconde

$$z = \frac{a + a''}{2} + \frac{a'' - a}{2} z'',$$

z' et z'' désignant deux nouvelles variables. Supprimant ensuite les accents de ces lettres sous le signe intégral, on trouvera que les deux périodes sont

$$2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\left(\frac{a + a'}{2} - a'' + \frac{a' - a}{2} z\right)}},$$

$$2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\left(\frac{a + a''}{2} - a' + \frac{a'' - a}{2} z\right)}}.$$

Si l'on avait, par exemple,

$$a = \frac{a' + a''}{2},$$

l'une de ces périodes serait le produit de l'autre par $\sqrt{-1}$.

54. Supposons maintenant que u soit déterminée par l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')u^2 = h^2;$$

nous trouverons d'abord les seize périodes :

$$\begin{array}{cccc} A_1 + A_2, & A_1 + A'_2, & A_1 + A''_2, & A_1 + A'''_2, \\ A_2 + A'_1, & A_2 + A''_1, & A_2 + A'''_1, & A'_1 + A'_2, \\ A'_1 + A''_2, & A'_1 + A'''_2, & A'_2 + A''_1, & A'_2 + A'''_1, \\ A''_1 + A''_2, & A''_1 + A'''_2, & A''_2 + A'''_1, & A'''_1 + A'''_2. \end{array}$$

A l'aide des équations

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0, \quad A''_1 + A''_2 = 0, \quad A'''_1 + A'''_2 = 0,$$

qui se déduisent de la relation

$$u_1 + u_2 = 0,$$

on réduira ces périodes à six, savoir :

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1, \quad A_1 - A'''_1, \quad A'_1 - A''_1, \quad A'_1 - A'''_1, \quad A''_1 - A'''_1.$$

La quatrième est la différence des deux premières; la cinquième est la différence de la première et de la troisième; enfin la sixième est la différence de la deuxième et de la troisième : de ces six périodes, il n'y a donc lieu de conserver que les trois premières, savoir :

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1, \quad A_1 - A'''_1.$$

Mais les points A, A', A'', A''' étant en nombre pair, on peut appliquer ici la remarque du n° 47. Supposons ces points A, A', A'', A''' nommés dans un ordre tel, que le contour fermé $(+A)(+A')(+A'')(+A''')$ puisse, sans franchir ces points, se réduire à une circonférence ayant l'origine des coordonnées pour centre et les renfermant tous quatre; observons, de plus, que les développements de u_1 et de u_2 suivant les puissances descendantes de z ne contiennent pas de terme en $\frac{1}{z}$; nous obtiendrons les deux équations

$$A_1 + A'_2 + A''_1 + A'''_2 = 0, \quad A_2 + A'_1 + A''_2 + A'''_1 = 0,$$

lesquelles, en vertu des relations

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0, \quad A''_1 + A''_2 = 0, \quad A'''_1 + A'''_2 = 0,$$

se réduisent à l'équation unique

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 0,$$

ou bien

$$A_1 - A'''_1 = A_1 - A''_1 - (A_1 - A'_1).$$

De toutes nos périodes, il n'y en a donc définitivement que deux distinctes, savoir :

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1,$$

ou, si l'on veut,

$$A_1 + A'_2, \quad A_1 + A''_2.$$

On voit, comme au numéro précédent, que ces deux quantités peuvent être regardées comme les valeurs des intégrales $\int_a^{a'} (u_1 - u_2)\,dz$, $\int_a^{a''} (u_1 - u_2)\,dz$, ou ce qui est la même chose, $2\int_a^{a'} u_1\,dz$, $2\int_a^{a''} u_1\,dz$ prises respectivement le long des droites AA', AA''.

Supposons, par exemple, que l'équation en u soit

$$(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)\,u^2 = 1,$$

où k est un nombre positif moindre que 1. Prenons l'origine O des coordonnées pour point de départ de Z; appelons u_1 celles des deux valeurs de z dont la valeur initiale est $+1$, et nommons A, A', A'', A''' les points qui répondent respectivement aux valeurs $+1$, $+\frac{1}{k}$, -1, $-\frac{1}{k}$ de z. Alors, pour périodes de l'intégrale $\int_0^z u_1\,dz$, nous pourrons adopter les deux sommes $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$, ou, ce qui est la même chose, les deux quantités

$$2\int_{+1}^{+\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \qquad 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

ces intégrales étant prises le long des droites AA', AA''.

De ces deux périodes, la seconde est réelle et égale à

$$4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}};$$

l'autre est imaginaire et égale à

$$-2\sqrt{-1}\int_{+1}^{+\frac{1}{k}}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

En posant

$$1-k^2=k'^2,\quad z=\frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2z'^2},$$

on ramènera cette dernière quantité à la forme

$$-2\sqrt{-1}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}.$$

Si donc nous faisons avec M. Jacobi (*Fundamenta nova*, etc.)

$$\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\mathrm{K},\quad \int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}=\mathrm{K}',$$

où z est supposée croître de zéro à l'unité par une suite de valeurs réelles, les deux périodes de l'intégrale $\int_0^z u_1\,dz$ seront $4\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$.

Posons

$$\int_0^z u_1\,dz=v;$$

z sera la fonction de v que M. Jacobi appelle $\sin\mathrm{am}\,v$: il suit de ce qui précède que z conservant la même valeur, on peut ajouter à v des multiples entiers quelconques de $4\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$; en d'autres termes, on aura

$$\sin\mathrm{am}\,(v+4l\mathrm{K}+2l'\mathrm{K}'\sqrt{-1})=\sin\mathrm{am}\,v,$$

l et l' désignant des nombres entiers quelconques. On retrouve ainsi une propriété connue des fonctions elliptiques.

Faisons à présent

$$1-z^2=x^2,$$

x étant une nouvelle variable : cette variable sera précisément la fonction de v représentée par $\cos\mathrm{am}\,v$. Dans l'équation différentielle

$$dv^2=u_1^2\,dz=\frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

introduisons la variable x au lieu de z; il viendra

$$dv^2 = \frac{dx^2}{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)};$$

on aura donc

$$v = \int_1^x u'_1\, dz,$$

u'_1 désignant une fonction de z qui satisfait à l'équation

$$(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)\,u'^2 = 1.$$

Si l'on veut appliquer à cette intégrale la théorie précédente, on prendra pour les points A, A', A'', A''', ceux qui répondent respectivement aux valeurs $+1$, $+\frac{k'}{k}\sqrt{-1}$, -1, $-\frac{k'}{k}\sqrt{-1}$, et les deux périodes seront $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$. La période $A_1 + A'_2$ est égale à l'intégrale $2\int_1^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} u'_1\, dz$ prise le long de la droite AA', ou, ce qui est la même chose, à la somme de l'intégrale $2\int_1^0 u'_1\, dz$ prise le long de la droite AO, et de l'intégrale $2\int_0^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} u'_1\, dz$ prise le long de la droite OA', O étant l'origine des coordonnées; on a donc

$$A_1 + A'_2 = 2\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} + 2\int_0^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}},$$

où les intégrales du second membre sont ce que M. Cauchy appelle des *intégrales rectilignes*. Si l'on fait, dans la première,

$$z = \sqrt{1-z'^2},$$

et qu'ensuite on supprime l'accent, on trouve

$$\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = -\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -K,$$

et si, dans la seconde, on pose

$$z = \frac{k'\sqrt{-1}}{k}\sqrt{1-z'^2},$$

on trouve de même

$$\int_0^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = \sqrt{-1}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = K'\sqrt{-1}:$$

il en résulte

$$A_1 + A'_2 = -2(K - K'\sqrt{-1}).$$

L'autre période $A_1 + A''_2$ est la valeur de l'intégrale $2\int_{+1}^{-1} u'_1\,dz$, prise le long de la droite AA''; on a donc

$$A_1 + A''_1 = 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = 4\int_{+1}^{0} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = -4K.$$

Ainsi, pour les deux périodes de l'intégrale $\int_1^x u'_1\,dz$, on peut prendre les deux quantités

$$4K, \quad 2(K - K'\sqrt{-1}),$$

et, par conséquent, on retrouve la propriété de la fonction $\cos\mathrm{am}\, v$ exprimée par l'équation

$$\cos\mathrm{am}\left[v + 4lK + 2l'(K - K'\sqrt{-1})\right] = \cos\mathrm{am}\, v.$$

Soit enfin

$$1 - k^2z^2 = y^2,$$

y désignant encore une nouvelle variable : cette variable sera la fonction de v représentée par $\Delta\,\mathrm{am}\, v$. L'équation différentielle

$$dv^2 = \frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

deviendra

$$dv^2 = \frac{dy^2}{(1-y^2)(y-k'^2)};$$

on aura donc

$$v = \int_1^y u''_1\,dz,$$

u''_1 désignant une fonction de z qui satisfait à l'équation

$$(1-z^2)(z^2-k'^2)u''^2 = 1.$$

Pour les points A, A', A'', A''', on pourra prendre ici ceux qui répondent respectivement aux valeurs $+k'$, $+1$, $-k'$, -1 de z, et alors on trouvera, pour valeurs des périodes $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$, les intégrales rectilignes

$$2\int_{k'}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}},$$

$$2\int_{k'}^{-k'} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}} = -4\int_0^{k'} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}}.$$

La première est réelle, et en y faisant

$$z = \sqrt{1 - k^2 z'^2},$$

elle devient

$$2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2\mathrm{K};$$

la seconde est imaginaire, et, en posant

$$z = k' z',$$

elle prend la forme

$$4\sqrt{-1}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = 4\mathrm{K}'\sqrt{-1}.$$

L'intégrale $\int_1^y u''_1\,dz$ ayant les deux périodes

$$2\mathrm{K},\quad 4\mathrm{K}'\sqrt{-1},$$

on en conclut l'équation

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(v + 2l\mathrm{K} + 4l'\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = \Delta\,\mathrm{am}\,v,$$

qui est également une formule connue de la théorie des fonctions elliptiques.

On voit que les deux quantités

$$4\mathrm{K},\quad 4\mathrm{K}'\sqrt{-1}$$

sont des périodes communes aux trois fonctions $\sin\mathrm{am}\,v$, $\cos\mathrm{am}\,v$, $\Delta\,\mathrm{am}\,v$; car, pour reconnaître que $4\mathrm{K}'\sqrt{-1}$ est une période de cos am v, il suffit d'observer qu'on a

$$4K - 2(2K - 2K'\sqrt{-1}) = 4K'\sqrt{-1};$$

ainsi, en désignant par $\varphi(v)$ une quelconque de ces fonctions ou une fonction rationnelle des trois, on aura

$$\varphi(v + 4lK + 4l'K'\sqrt{-1}) = \varphi(v).$$

55. Dans le cas du numéro précédent, les trois périodes

$$A_1 - A'_1,\quad A_1 - A''_1,\quad A_1 - A'''_1$$

ont été réduites à deux en vertu de l'équation

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 0;$$

mais cette réduction n'aurait plus lieu, en général, si la fonction u_1 était déterminée par l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')u^2 - H^2 = 0,$$

où H désigne un polynôme entier en z qui n'est divisible par aucun des quatre facteurs $z-a$, $z-a'$, $z-a''$, $z-a'''$. Il sera inutile, dans la recherche des périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, d'avoir égard aux points $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc., correspondants aux valeurs de z qui annulent H; car chacune des fonctions u_1, u_2 reprendra sa valeur initiale après une révolution de Z sur un quelconque des contours élémentaires $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}')$, $(\mathcal{A}'')$, etc., et les intégrales élémentaires correspondantes seront toutes nulles. En désignant par A, A', A'', A''' les points pour lesquels z a respectivement les valeurs a, a', a'', a''', on trouvera, comme au numéro précédent, que l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ admet les trois périodes

$$A_1 - A'_1 = p',\quad A_1 - A''_1 = p'',\quad A_1 - A'''_1 = p'''.$$

Mais la considération de la circonférence décrite de l'origine des coordonnées comme centre et renfermant les points A, A', A'', A''', $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc., nous donnera ici l'équation

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

ou bien

$$p' - p'' + p''' = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

λ désignant le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{H}{\sqrt{(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')}},$$

suivant les puissances descendantes de z. Tant que le polynôme H ne se réduira pas à une constante, le coefficient λ ne sera pas nul, au moins en général; les périodes p', p'', p''' seront donc distinctes et ne se réduiront à deux que dans des cas particuliers.

56. Passons à présent au cas où la fonction u est déterminée par l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots[z-a^{(n-1)}]u^2 - h^2 = 0,$$

h désignant une constante et $a, a', \ldots, a^{(n-1)}$ des quantités toutes inégales. On trouvera sans difficulté que les périodes de l'intégrale $\int_c^\lambda u_1\,dz$ se réduisent aux $n-1$ suivantes :

$$A_1 - A'_1 = p', \quad A_1 - A''_1 = p'', \ldots, \quad A_1 - A_1^{(n-1)} = p^{(n-1)}.$$

Ces périodes seront, en général, distinctes, si le nombre n est impair; mais, s'il est pair, la considération de la circonférence qui renferme tous les points A, A', A'', etc., conduira à l'équation

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 + \ldots + A_1^{(n-2)} - A_1^{(n-1)} = 0,$$

ou bien

$$p' - p'' + p''' - \ldots + p^{(n-1)} = 0,$$

en vertu de laquelle les $n-1$ périodes se réduisent à $n-2$ distinctes, savoir :

$$p', \quad p'', \quad p''', \ldots, \quad p^{(n-2)}.$$

En d'autres termes, le nombre des périodes distinctes est $2n$, lorsque le nombre des quantités a, a', a'', etc., est $2n+1$ ou $2n+2$, sauf le cas où ce dernier nombre étant égal à 2, celui des périodes est 1.

Observons que les périodes p', p'', p''', etc., ne sont autre chose que les valeurs de l'intégrale

$$\int (u_1 - u_2)\,dz = 2\int u_1\,dz,$$

prise le long des droites AA', AA'', AA''', etc.

57. Le nombre n étant supposé pair, considérons encore l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots[z-a^{(n-1)}]\,u^2 - \mathrm{H}^2 = 0,$$

où H désigne un polynôme entier en z qui n'est divisible par aucun des facteurs $z-a$, $z-a'$, $z-a''$, etc. Par les mêmes raisons qu'au n° **55**, il sera inutile de tenir compte des valeurs de z qui annulent H : les périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ seront donc, comme tout à l'heure, les $n-1$ quantités

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1 = p', \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}''_1 = p'', \ldots, \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1^{(n-1)} = p^{(n-1)}.$$

Mais tandis que tout à l'heure on avait l'équation

$$p' - p'' + p''' - \ldots + p^{(n-1)} = 0,$$

qui réduisait à $n-2$ le nombre des périodes distinctes, on aura ici, n° **50**,

$$p' - p'' + p''' - \ldots + p^{(n-1)} = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

λ désignant le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]}},$$

suivant les puissances descendantes de z, et tant que λ ne sera pas nul, les $n-1$ périodes resteront, en général, distinctes.

Le coefficient λ serait nul si le degré du polynôme H était moindre que $\frac{n}{2}-1$; alors le nombre des périodes se réduirait à $n-2$. C'est ce qui arriverait, par exemple, pour l'intégrale

$$\int_c^k \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{\mathrm{P}}},$$

P désignant un polynôme du sixième degré en z; au lieu de cinq périodes distinctes, cette intégrale n'en aura que quatre.

Un autre cas où λ serait nul est celui où les polynômes H et $(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]$ seraient l'un et l'autre des fonctions paires de z, le degré du second étant, en outre, un multiple de 4.

58. Il est aisé de retrouver dans ce qu'on vient de dire les périodes des fonctions de plusieurs variables introduites par M. Jacobi dans la théorie des transcendantes abéliennes. Soient, par exemple, u et u' deux fonctions de z satisfaisant respectivement aux équations du second degré,

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')(z-a^{\text{IV}})u^2-(\alpha+\beta z)^2=0,$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')(z-a^{\text{IV}})u'^2-(\alpha'+\beta' z)^2=0;$$

l'intégrale $\int_c^z u_1\,dz$ ayant, comme on l'a vu précédemment, quatre périodes, on peut, sans changer les limites et en disposant convenablement du chemin parcouru par le point Z, faire prendre à cette intégrale une valeur aussi voisine qu'on voudra d'une quantité donnée quelconque. Si donc on pose

$$\int_c^z u\,dz=v,$$

on ne pourra regarder z comme une fonction de v, puisque, z restant le même, v peut varier par degrés aussi petits qu'on voudra. Mais si l'on fait

$$\int_c^z u\,dz+\int_{c'}^{z'} u\,dz=v,\quad \int_c^z u'\,dz+\int_{c'}^{z'} u'\,dz=v',$$

les intégrales $\int_c^z u\,dz$, $\int_c^z u'\,dz$ étant prises le long d'une même ligne CMZ, et les intégrales $\int_{c'}^{z'} u\,dz$, $\int_{c'}^{z'} u'\,dz$ aussi le long d'une même ligne C'M'Z', on peut prouver, à l'aide du théorème d'Abel, que z et z' sont des fonctions déterminées de v et de v'; nous poserons donc

$$z=\varphi(v,v'),\quad z'=\varphi'(v,v').$$

Concevons maintenant qu'on vienne à changer le chemin CMZ, les points extrêmes C et Z restant les mêmes : si l'on appelle p, q, r, s les périodes trouvées ci-dessus de l'intégrale $\int_c^z u\,dz$, et p', q', r', s' les périodes de l'intégrale $\int_c^z u'\,dz$, les intégrales $\int_c^z u\,dz$, $\int_c^z u'\,dz$ s'accroîtront respectivement des quantités

$$hp + iq + kr + ls, \quad hp' + iq' + kr' + ls',$$

où h, k, i, l désignent quatre nombres entiers quelconques ayant les mêmes valeurs dans les deux formules. En effet, pour les deux fonctions u et u', les points A, A′, A″, A‴, A$^{\text{IV}}$ sont les mêmes; par conséquent, tout contour fermé aura la même caractéristique relativement à ces deux fonctions.

On voit de la même manière que si l'on vient à changer le chemin C′ M′ Z′, les points extrêmes C′ et Z′ restant les mêmes, les deux intégrales $\int_{c'}^{z'} u\,dz$, $\int_{c'}^{z'} u'\,dz$ augmenteront encore respectivement de quantités de la forme

$$hp + iq + kr + ls, \quad hp' + iq' + kr' + ls'.$$

Ainsi les quantités z et z', ou, si l'on veut, les fonctions $\varphi(v, v')$, $\varphi'(v, v')$ gardant les mêmes valeurs, on peut ajouter à la variable v l'expression

$$hp + iq + kr + ls,$$

pourvu qu'en même temps on ajoute à la variable v' l'expression

$$hp' + iq' + kr' + ls'.$$

En d'autres termes, on a les deux équations

$$\varphi(v + hp + iq + kr + ls,\ v' + hp' + iq' + kr' + ls') = \varphi(v, v'),$$
$$\varphi'(v + hp + iq + kr + ls,\ v' + hp' + iq' + kr' + ls') = \varphi'(v, v').$$

On retrouve ainsi pour les fonctions φ et φ' le caractère de quadruple périodicité signalé par M. Jacobi dans un Mémoire qui fait partie du Journal de M. Crelle (tome XIII, page 55) : on voit d'ailleurs ce que sont les périodes $p, q, r, s, p', q', r', s'$. Appelons A, A′, A″, A‴, A$^{\text{IV}}$ les valeurs de l'intégrale $\int u\,dz$ prise respectivement le long des contours élémentaires (+ A), (+ A′), (+ A″), (+ A‴), (+ A$^{\text{IV}}$); soient pareillement $A_{,}$, $A'_{,}$, $A''_{,}$, $A'''_{,}$, $A^{\text{IV}}_{,}$ les valeurs de l'intégrale $\int u'\,dz$ prise le long des mêmes contours; on pourra adopter pour ces périodes les valeurs suivantes :

$$p = A - A', \quad q = A - A'', \quad r = A - A''', \quad s = A - A^{\text{IV}},$$
$$p' = A_{,} - A'_{,}, \quad q' = A_{,} - A''_{,}, \quad r' = A_{,} - A'''_{,}, \quad s' = A_{,} - A^{\text{IV}}_{,}.$$

On peut dire encore que si l'on joint le point A à chacun des points A′, A″, A‴, A$^{\text{IV}}$, les périodes p, q, r, s sont les valeurs de l'intégrale $2\int u\,dz$ prise le long des lignes AA′, AA″, AA‴, AA$^{\text{IV}}$, tandis que les périodes p', q', r', s' sont les valeurs de l'intégrale $2\int u'\,dz$ prise le long de ces mêmes lignes.

La proposition qu'on vient d'expliquer peut être aisément généralisée. Soient a, a', a'', etc., des quantités inégales quelconques au nombre de $2m$ ou $2m-1$: appelons $u, u', \ldots, u^{(m-2)}$ des fonctions de z satisfaisant respectivement aux équations du second degré

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u^2 - (\alpha + \beta z + \ldots + \varepsilon z^{m-2})^2 = 0,$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u'^2 - (\alpha' + \beta' z + \ldots + \varepsilon' z^{m-2})^2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u^{(m-2)^2} - \left[\alpha^{(m-2)} + \beta^{(m-2)} z + \ldots + \varepsilon^{(m-2)} z^{m-2}\right]^2 = 0.$$

Posons

$$\int_c^z u\,dz + \int_{c'}^{z'} u\,dz + \ldots + \int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u\,dz = v,$$
$$\int_c^z u'\,dz + \int_{c'}^{z'} u'\,dz + \ldots + \int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u'\,dz = v',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int_c^z u^{(m-2)}\,dz + \int_{c'}^{z'} u^{(m-2)}\,dz + \ldots + \int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u^{(m-2)}\,dz = v^{(m-2)},$$

les intégrales qui ont pour limites c et z étant toutes prises le long d'une même ligne CMZ, celles qui ont pour limites c' et z' étant également prises le long d'une même ligne C'M'Z', et ainsi de suite. On pourra regarder $z, z', \ldots, z^{(m-2)}$ comme des fonctions de $v, v', \ldots, v^{(m-2)}$, et écrire

$$z = \varphi\left[v, v', \ldots, v^{(m-2)}\right], \quad z' = \varphi'\left[v, v', \ldots, v^{(m-2)}\right], \ldots,$$
$$z^{(m-2)} = \varphi^{(m-2)}\left[v, v', \ldots, v^{(m-2)}\right].$$

Si maintenant on désigne par $p, q, \ldots, t$ les $2m-2$ périodes de l'intégrale $\int_c^z u\,dz$, par $p', q', \ldots, t'$ celles de l'intégrale $\int^z u'dz$, et ainsi de suite, on prouvera, comme tout à l'heure, que l'on a, pour une quelconque des fonctions $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(m-2)}$,

$$\varphi^{(k)}\begin{bmatrix} v + hp + iq + \ldots + lt, \\ v' + hp' + iq' + \ldots + lt', \ldots, \\ v^{(m-2)} + hp^{(m-2)} + iq^{(m-2)} + \ldots + lt^{(m-2)} \end{bmatrix} = \varphi^{(k)}\left[v, v', \ldots, v^{(m-2)}\right],$$

$h, i, \ldots, l$ étant des nombres entiers quelconques. Quant aux périodes $p, q, \ldots, t, p', q'$, etc., on les exprime sans peine à l'aide des notations adoptées précédemment : en effet, soient A, A', A'', etc., les valeurs de l'intégrale $\int u\,dz$ prise le long des contours élémentaires $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, etc.; soient $A_{,}, A'_{,}, A''_{,}$, etc., les valeurs de l'intégrale $\int u'dz$ prise le long des mêmes contours, $A_{,,}, A'_{,,}, A''_{,,}$, etc., celles de l'intégrale $\int u''dz$, et ainsi de suite : on pourra prendre

$$p = A - A', \quad q = A - A'', \ldots, \quad t = A - A^{(2m-2)},$$
$$p' = A_{,} - A'_{,}, \quad q' = A_{,} - A''_{,}, \ldots, \quad t' = A_{,} - A^{(2m-2)}_{,},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A'_{(2m-2)}, \ldots, \quad q^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A''_{(2m-2)}, \ldots,$$
$$t^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A^{(2m-2)}_{(2m-2)}.$$

On peut dire encore que les périodes $p, q, \ldots, t$ sont les valeurs de l'intégrale $2\int u\,dz$ prise le long des lignes AA', AA'',..., $AA^{(2m-2)}$;

pareillement, les périodes p', q',..., t' sont les valeurs de l'intégrale $2\int u'dz$ prise suivant les mêmes lignes, et ainsi de suite.

59. Après avoir montré comment notre théorie fournit le nombre et l'expression des périodes de l'intégrale $\int_c^k u\,dz$, dans le cas où la fonction u dépend d'une équation du second degré, nous allons encore l'appliquer à des fonctions déterminées par des équations d'un degré plus élevé. Prenons, par exemple, l'équation binôme

$$(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]\,u^m - \mathrm{H}^m = 0,$$

où a, a',..., $a^{(n-1)}$ désignent des quantités inégales, et H un polynôme entier qui n'est divisible par aucun des facteurs $z-a$, $z-a'$,..., $z-a^{(n-1)}$. On pourra, dans la recherche des diverses valeurs de $\int_c^k u_1\,dz$, se dispenser d'avoir égard aux points $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc., correspondants aux valeurs de z qui annulent H; car, après une révolution de Z sur le contour élémentaire qui enveloppe un de ces points, chacune des fonctions u_1, u_2, etc., reprend sa valeur initiale, et, de plus, les intégrales élémentaires relatives à un pareil contour sont toutes nulles. Soient maintenant A, A′, A″,..., $\mathrm{A}^{(n-1)}$ les points qui répondent respectivement aux valeurs a, a',..., $a^{(n-1)}$ de z; il nous est permis de les supposer rangés dans un ordre tel, que le contour fermé qui a pour caractéristique

$$(+\mathrm{A})(+\mathrm{A}')(+\mathrm{A}'')\ldots[+\mathrm{A}^{(n-1)}]$$

puisse se réduire, sans franchir aucun de ces points, à une circonférence ayant l'origine des coordonnées pour centre et les renfermant tous.

Pour abréger l'écriture, nous ferons

$$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}'_1=p'_1,\quad \mathrm{A}_2-\mathrm{A}'_2=p'_2,\ldots,\quad \mathrm{A}_m-\mathrm{A}'_m=p'_m,$$
$$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}''_1=p''_1,\quad \mathrm{A}_2-\mathrm{A}''_2=p''_2,\ldots,\quad \mathrm{A}_m-\mathrm{A}''_m=p''_m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_1^{(n-1)}=p_1^{(n-1)},\quad \mathrm{A}_2-\mathrm{A}_2^{(n-1)}=p_2^{(n-1)},\ldots,\quad \mathrm{A}_m-\mathrm{A}_m^{(n-1)}=p_m^{(n-1)},$$

d'où il suit, en appelant q, r, s des nombres entiers,

$$A_s^{(q)} - A_s^{(r)} = p_s^{(r)} - p_s^{(q)}.$$

Nous observerons ensuite que les fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_m$ peuvent être supposées rangées dans un ordre tel, que chacune d'elles acquière la valeur initiale de la suivante après une révolution de Z sur un quelconque des contours $(+A)$, $(+A')$, ..., $[+A^{(n-1)}]$; cela revient à prendre

$$u_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}} u_1, \quad u_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}} u_1, \ldots, \quad u_m = e^{-\frac{(m-1)2\pi}{m}\sqrt{-1}} u_1.$$

Alors aussi chacune de ces fonctions acquerra la valeur initiale de la précédente après une révolution de Z sur un des contours $(-A)$, $(-A')$, ..., $[-A^{(n-1)}]$, et l'on aura par conséquent

$$\overset{(i)}{A}_{-1} = -\overset{(i)}{A}_m, \quad \overset{(i)}{A}_{-2} = -\overset{(i)}{A}_1, \quad \overset{(i)}{A}_{-3} = -\overset{(i)}{A}_2, \ldots, \quad \overset{(i)}{A}_{-m} = -\overset{(i)}{A}_{m-1}.$$

Enfin nous appellerons v_1, $v_2, \ldots, v_m$ les valeurs des intégrales $\int_c^k u_1\,dz$, $\int_c^k u_2\,dz, \ldots, \int_c^k u_m\,dz$, prises le long d'un chemin déterminé CMK.

Cela posé, il s'agit d'obtenir les expressions générales des valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long d'un chemin quelconque CLK.

La caractéristique de ce chemin étant donnée, il sera aisé d'écrire la valeur de l'intégrale : à chaque terme $[+A^{(q)}]$ de la caractéristique répondra, dans l'expression de l'intégrale, un terme de la forme $+A_i^{(q)}$, et, à chaque terme $[-A^{(q)}]$ de la caractéristique, un terme de la forme $-A_i^{(q)}$; au dernier terme CMK de la caractéristique répondra, dans l'intégrale, un terme tel que $+v_j$. Les indices i et j sont des nombres entiers et positifs qui se déterminent comme il suit : l'indice du premier terme de l'intégrale est 1, si ce terme est affecté du signe $+$, m, s'il est affecté du signe $-$; si deux termes consécutifs ont le signe $+$, l'indice du second surpasse d'une unité celui du premier; si ces deux termes ont le signe $-$, c'est au contraire l'indice du premier qui surpasse d'une unité celui du second [*]; enfin, si deux termes consécutifs ont des signes contraires, leurs indices sont égaux.

Admettons, pour fixer les idées, que, dans la caractéristique du chemin CLK, le nombre des termes positifs surpasse celui des termes négatifs ; il en sera de même dans l'expression de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$. Partageons cette expression à partir de la gauche en parties telles, que dans chacune d'elles le nombre des termes positifs surpasse de m unités celui des termes négatifs, sauf la dernière partie où la différence entre ces deux nombres peut être inférieure à m. La valeur d'une quelconque de ces parties, la dernière exceptée, pourra s'obtenir en ajoutant à la somme

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m$$

un certain nombre de différences de la forme $A_q^{(s)} - A_r^{(s)}$; comme d'ailleurs, en vertu de l'équation

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 0,$$

on a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m = 0,$$

la partie dont nous nous occupons se réduit à une somme de différences telles que $A_q^{(s)} - A_r^{(s)}$, et peut se représenter en conséquence par la formule

$$\begin{aligned}\varpi = {} & l'_1 p'_1 + l''_1 p''_1 + \ldots + l_1^{(n-1)} p_1^{(n-1)} \\ & + l'_2 p'_2 + l''_2 p''_2 + \ldots + l_2^{(n-1)} p_2^{(n-1)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + l'_m p'_m + l''_m p''_m + \ldots + l_m^{(n-1)} p_m^{(n-1)},\end{aligned}$$

où les lettres l'_1, $l''_1, \ldots, l_1^{(n-1)}$, l'_2, etc., représentent des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs, et pouvant d'ailleurs avoir des valeurs quelconques. Les autres parties de l'expression de $\int_c^k u_1\,dz$ auront la

[*] Il est à peine nécessaire d'avertir que l'indice m augmenté d'une unité doit être remplacé par 1, et que l'indice 1 diminué d'une unité doit être remplacé par m.

même forme, sauf la dernière : quant à cellé-ci, on voit aisément qu'à une quantité près de la forme ϖ, elle aura toujours une des valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
&v_1,\\
&A_1 + v_2,\\
&A_1 + A_2 + v_3,\\
&A_1 + A_2 + A_3 + v_4\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1} + v_m.
\end{aligned}$$

Par conséquent, toutes les valeurs que l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ peut acquérir, suivant que le point Z va de C en K par tel ou tel chemin, sont comprises dans les m formules

$$\begin{aligned}
&\varpi + v_1,\\
&\varpi + A_1 + v_2,\\
&\varpi + A_1 + A_2 + v_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varpi + A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1} + v_m.
\end{aligned}$$

On a supposé, il est vrai, que dans l'expression de l'intégrale relative au chemin CLK, le nombre des termes positifs surpassait celui des termes négatifs ; si le contraire avait lieu, on ramènerait ce second cas au premier, en ajoutant à l'expression dont il s'agit une ou plusieurs fois la quantité $A_1 + A_2 + \ldots + A_m$ dont la valeur est zéro, et l'on arriverait encore à la même conclusion.

On voit par là que les quantités $p'_1, p''_1, \ldots, p_1^{(n-1)}, p'_2, \ldots, p_1^{(n-1)}$ sont autant de périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, et que toute autre période de la même intégrale doit être composée de celles-là : de plus, toutes les valeurs en nombre infini de $\int_c^k u_1\,dz$ peuvent s'obtenir en ajoutant à m d'entre elles choisies convenablement des multiples entiers quelconques des périodes.

Considérons en particulier la période $p'_i = A_i - A'_i = A_i + A'_{-(i+1)}$; on voit qu'elle est égale à l'intégrale $\int u_i dz$ prise le long du contour fermé $(+A)(-A')$, et comme, après une révolution de Z sur ce contour, la fonction u_i reprend sa valeur initiale, on en conclut que la période p'_i est indépendante de la position du point C, n° **11**. Or, sans faire franchir au contour $(+A)(-A')$ aucun des points A, A', A'', etc., on peut le faire coïncider avec un contour qui se compose de la ligne D'HD, *fig.* 25, du contour fermé infiniment petit DFED parcouru dans le sens direct, de la ligne DHD', et enfin du contour infiniment petit D'F'E'D' parcouru dans le sens inverse : la période p'_i peut donc être regardée comme exprimant la valeur de l'intégrale $\int u_i dz$ relative à ce nouveau contour. Mais le produit $(z-a)u_i$ se réduisant à zéro pour $z=a$, ainsi que le produit $(z-a')u_i$ pour $z=a'$, on prouvera, comme au n° 50, que les portions d'intégrale relatives aux contours infiniment petits DEFD, D'F'E'D' ont zéro pour limites, et l'on en conclura qu'on peut regarder p'_i comme la limite de la somme des portions d'intégrale relatives aux chemins D'HD, DHD' : en d'autres termes, la période p'_i est la valeur de l'intégrale $\int (u_i - u_{i+1})\, dz$ prise le long de la ligne A'HA.

Ce que nous venons de dire de la période p'_i peut s'appliquer à toutes les autres : ainsi chacune d'elles peut être regardée comme la valeur de l'une des intégrales $\int (u_1 - u_2)\, dz$, $\int (u_2 - u_3)\, dz, \ldots,$ $\int (u_m - u_1)\, dz$, prise le long d'une ligne menée de l'un des points $A', A'', \ldots, A^{(n-1)}$ au point A.

Les quantités $p'_1, p''_1, \ldots, p^{(n-1)}_m$ sont au nombre de $m(n-1)$; mais il existe entre elles des relations faciles à obtenir. Comme on l'a déjà remarqué, on a

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 0,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} &A_1 + A_2 + \ldots + A_m = 0,\\ &A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_m = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A^{(n-1)}_1 + A^{(n-1)}_2 + \ldots + A^{(n-1)}_m = 0,\end{aligned}$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_m = 0,$$
$$p''_1 + p''_2 + \ldots + p''_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_1^{(n-1)} + p_2^{(n-1)} + \ldots + p_m^{(n-1)} = 0.$$

On voit que les $n - 1$ périodes $p'_m, p''_m, \ldots, p_m^{(n-1)}$ peuvent s'exprimer chacune par la somme prise en signe contraire de $m - 1$ autres, ce qui réduit à $(m-1)(n-1)$ le nombre des périodes distinctes.

Rappelons-nous maintenant ce qui a été démontré tout à l'heure, que les périodes

$$p'_1,\quad p'_2,\quad p'_3, \ldots,\quad p'_m$$

sont respectivement égales aux intégrales

$$\int (u_1 - u_2)\,dz,\quad \int (u_2 - u_3)\,dz,\quad \int (u_3 - u_4)\,dz, \ldots,\quad \int (u_m - u_1)\,dz,$$

prises le long d'une même ligne menée du point A' au point A, et, d'un autre côté, ayons égard aux équations

$$u_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\,u_1,\quad u_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\,u_1, \ldots,\quad u_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}\sqrt{-1}}\,u_1;$$

nous en conclurons que les périodes

$$p'_1,\quad p'_2,\quad p'_3, \ldots,\quad p'_m,$$

sont respectivement égales aux intégrales

$$\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz,\quad e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz,$$
$$e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz, \ldots,\quad e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}\sqrt{-1}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz,$$

prises le long d'une même ligne A'A; il en résulte sur-le-champ

$$p'_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\,p'_1,\quad p'_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\,p'_1, \ldots,\quad p'_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}\sqrt{-1}}\,p'_1,$$

et l'on trouvera de même

$$p''_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p''_1,\quad p''_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p''_1,\ldots,\quad p''_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}}\, p''_1,$$

. . . .

$$p_2^{(n-1)} = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p_1^{(n-1)},\ p_3^{(n-1)} = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p_1^{(n-1)},\ldots,\ p_m^{(n-1)} = e^{-\frac{(m-2).2\pi}{m}}\, p_1^{(n-1)}.$$

Ces relations comprennent les équations

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_m = 0,$$
$$p''_1 + p''_2 + \ldots + p''_m = 0,$$
etc.,

déjà établies tout à l'heure; on n'en déduit pas d'ailleurs d'autre équation propre à diminuer le nombre des périodes distinctes.

Considérons spécialement le cas où le nombre n des quantités a, a', a'', etc., est un multiple de m; alors chacune des fonctions u_1, u_2,..., u_m reprendra sa valeur initiale après une révolution de Z sur un contour fermé qui entoure tous les points A, A', A'', etc, et il y aura lieu d'appliquer à chacune d'elles la remarque du n° **47**. En appelant λ le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt[m]{(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]}},$$

suivant les puissances descendantes de z, on trouvera les équations

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_2 + \mathrm{A}''_3 + \ldots + \mathrm{A}_m^{(n-1)} = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}'_3 + \mathrm{A}''_4 + \ldots + \mathrm{A}_1^{(n-1)} = 2\pi\lambda\, e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}'_4 + \mathrm{A}''_5 + \ldots + \mathrm{A}_2^{(n-1)} = 2\pi\lambda\, e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

. . . .

$$\mathrm{A}_m + \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_2 + \ldots + \mathrm{A}_{m-1}^{(n-1)} = 2\pi\lambda\, e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$p'_2 + p''_3 + p'''_4 + \ldots + p^{(n-1)}_m = -2\pi\lambda\sqrt{-1},$$
$$p'_3 + p''_4 + p'''_5 + \ldots + p^{(n-1)}_1 = -2\pi\lambda e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$
$$p'_4 + p''_5 + p'''_6 + \ldots + p^{(n-1)}_2 = -2\pi\lambda e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p'_1 + p''_2 + p'''_3 + \ldots + p^{(n-1)}_{m-1} = -2\pi\lambda e^{-\frac{(m-1)2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1}.$$

Ces m équations se réduisent à $m-1$ distinctes en vertu des relations déjà établies entre les périodes; car, en les ajoutant membre à membre, on arrive à l'identité $0 = 0$. Si, de plus, le coefficient λ est nul, on pourra de ces équations tirer $m-1$ périodes exprimées chacune par la somme prise en signe contraire de plusieurs autres, et le nombre des périodes distinctes, qui était $(m-1)(n-1)$, se trouvera réduit à $(m-1)(n-2)$. Cette circonstance se présentera, en particulier, lorsque le degré du polynôme Π sera inférieur au nombre entier $\frac{n}{m} - 1$.

Il est aisé de voir quelles sont dans ces différents cas les périodes qu'on devra regarder comme distinctes. En effet, lorsque n ne sera pas un multiple de m, ou lorsque n étant divisible par m, λ sera quelconque, on pourra, en vertu des équations

$$p'_m = -p'_1 - p'_2 - p'_3 - \ldots,$$
$$p''_1 = -p''_2 - p''_3 - p''_4 - \ldots,$$
$$p'''_2 = -p'''_3 - p'''_4 - p'''_5 - \ldots,$$
$$\text{etc.},$$

exclure les périodes p'_m, p''_1, p'''_2, etc., et les $(m-1)(n-1)$ restantes seront généralement distinctes. Mais si, n étant divisible par m, λ est nul, on aura entre ces périodes restantes les $m-1$ équations

$$p'_1 + p''_2 + p'''_3 + \ldots + p^{(n-1)}_{m-1} = 0,$$
$$p'_2 + p''_3 + p'''_4 + \ldots + p^{(n-1)}_m = 0,$$
$$p'_3 + p''_4 + p'''_5 + \ldots + p^{(n-1)}_1 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p'_{m-1} + p''_m + p'''_1 + \ldots + p^{(n-1)}_{m-3} = 0;$$

d'où l'on tire

$$p'_1 = -p''_2 - p'''_3 - \ldots - p^{(n-1)}_{m-1},$$

$$p'_2 = -p''_3 - p'''_4 - \ldots - p^{(n-1)}_{m},$$

$$p'_3 = -p''_4 - p'''_5 - \ldots - p^{(n-1)}_{1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p'_{m-1} = -p''_m - p'''_1 - \ldots - p^{(n-1)}_{m-3},$$

ce qui permet d'exclure encore les périodes $p'_1, p'_2, \ldots, p'_{m-1}$. Ainsi, dans le cas général où le nombre des périodes distinctes est $(m-1)(n-1)$, on peut prendre pour ces périodes les quantités

$$\begin{array}{llllll}
p'_1, & p'_2, & p'_3, \ldots, & p'_{m-3}, & p'_{m-2}, & p'_{m-1}, \\
p''_2, & p''_3, & p''_4, \ldots, & p''_{m-2}, & p''_{m-1}, & p''_{m}, \\
p'''_1, & p'''_3, & p'''_4, \ldots, & p'''_{m-2}, & p'''_{m-1}, & p'''_{m}, \\
p^{\text{iv}}_1, & p^{\text{iv}}_2, & p^{\text{iv}}_4, \ldots, & p^{\text{iv}}_{m-2}, & p^{\text{iv}}_{m-1}, & p^{\text{iv}}_{m}, \\
\text{etc.,} & & & & &
\end{array}$$

ou bien, en représentant par ω l'exponentielle $e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}$,

$$\begin{array}{llllll}
p'_1, & \omega p'_1, & \omega^2 p'_1, \ldots, & \omega^{m-4} p'_1, & \omega^{m-3} p'_1, & \omega^{m-2} p'_1, \\
\omega p''_1, & \omega^2 p''_1, & \omega^3 p''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p''_1, & \omega^{m-2} p''_1, & \omega^{m-1} p''_1, \\
p'''_1, & \omega^2 p'''_1, & \omega^3 p'''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p'''_1, & \omega^{m-2} p'''_1, & \omega^{m-1} p'''_1, \\
p^{\text{iv}}_1, & \omega p^{\text{iv}}_1, & \omega^3 p^{\text{iv}}_1, \ldots, & \omega^{m-3} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-2} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-1} p^{\text{iv}}_1, \\
\text{etc.} & & & & &
\end{array}$$

Lorsque le nombre n sera divisible par m et que le coefficient λ sera nul, il suffira, pour avoir les $(m-1)(n-2)$ périodes distinctes, de supprimer la première ligne horizontale dans l'un ou l'autre des deux tableaux précédents. Ces périodes seront donc

$$\begin{array}{llllll}
\omega p''_1, & \omega^2 p''_1, & \omega^3 p''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p''_1, & \omega^{m-2} p''_1, & \omega^{m-1} p''_1, \\
p'''_1, & \omega^2 p'''_1, & \omega^3 p'''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p'''_1, & \omega^{m-2} p'''_1, & \omega^{m-1} p'''_1, \\
p^{\text{iv}}_1, & \omega p^{\text{iv}}_1, & \omega^3 p^{\text{iv}}_1, \ldots, & \omega^{m-3} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-2} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-1} p^{\text{iv}}_1, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
p^{(n-1)}_1, & \omega p^{(n-1)}_1, & \omega^2 p^{(n-1)}_1, \ldots, & \omega^{m-4} p^{(n-1)}_1, & \omega^{(m-2)} p^{(n-1)}_1, & \omega^{(m-1)} p^{(n-1)}_1.
\end{array}$$

60. Pour dernière application, considérons l'équation du troisième degré

$$u^3 - u + z = 0.$$

Appelons u_1, u_2, u_3 les trois fonctions déterminées par cette équation, qui, pour la valeur initiale $z = 0$, se réduisent respectivement à 0, $+1$, -1. On a prouvé, n° **32**, que la première et la deuxième deviennent égales lorsque le point Z, parti de l'origine O, arrive au point A qui répond à $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, après avoir suivi la droite OA, et que la première et la troisième deviennent égales, lorsque le point Z, parti de l'origine, arrive par la droite OA' au point A' qui répond à $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$; les points A et A' sont d'ailleurs les seuls pour lesquels l'équation proposée puisse avoir des racines égales. Supposons, ce qui est permis, que les contours élémentaires (A) et (A') se confondent sensiblement avec les droites OA, OA'; nommons v_1, v_2, v_3 les valeurs des intégrales $\int_0^k u_1\,dz$, $\int_0^k u_2\,dz$, $\int_0^k u_3\,dz$ prises le long d'un chemin déterminé OMK, et proposons-nous de trouver toutes les valeurs que l'intégrale $\int_0^k u_1\,dz$ peut acquérir, suivant que le point Z va de O en K par tel ou tel chemin.

On a vu, n° **32**, qu'après une révolution de Z sur le contour (A), les racines u_1 et u_2 échangent leurs valeurs initiales, tandis que u_3 reprend la sienne : la fonction $u_1 + u_2$ reprend donc aussi sa valeur initiale. Par suite, les intégrales $\int u_3\,dz$, $\int (u_1 + u_2)\,dz$, prises le long du contour $(+A)$, ne changeront pas si l'on suppose que ce contour se réduise à une ligne fermée infiniment petite tracée autour du point A; comme, en ce point, les fonctions u_3 et $u_1 + u_2$ conservent des valeurs finies, on en conclut, n° **46**,

$$A_3 = 0, \quad A_1 + A_2 = 0.$$

On reconnaît aisément que les intégrales A_3 et A_{-3} sont composées d'éléments deux à deux égaux et de signes contraires; il en est de même des deux intégrales A_1, A_{-2}, et aussi des deux intégrales A_2, A_{-1}; on a donc

$$A_3 = A_{-3} = 0, \quad A_1 = -A_2 = A_{-1} = -A_{-2};$$

on trouvera pareillement

$$A'_2 = A'_{-2} = 0, \quad A'_1 = -A'_{-3} = A'_{-1} = -A'_{-3}.$$

On conclut d'abord de ces égalités qu'on peut changer le signe d'un terme quelconque de la caractéristique sans altérer la valeur de l'intégrale cherchée : on pourra donc se dispenser de mettre ce signe en évidence. Observons que, sur le contour (A) (A), chacune des fonctions u_1, u_2, u_3 reprend sa valeur initiale après une révolution de Z, et que les intégrales $\int u_1 dz$, $\int u_2 dz$, $\int u_3 dz$, prises le long de ce contour, se réduisent à zéro en vertu des relations précédentes. Par conséquent, si dans la caractéristique du chemin quelconque OLK suivi par Z, on trouve les deux termes consécutifs (A) (A), il sera permis de les supprimer : le même raisonnement s'applique aux deux termes consécutifs (A′) (A′). On peut donc supposer que, dans la caractéristique du chemin OLK, deux termes consécutifs quelconques renferment toujours l'un la lettre A, l'autre la lettre A′.

Alors les trois premiers termes forment nécessairement un des deux groupes suivants :

$$(A)(A')(A), \quad (A')(A)(A');$$

or, après une révolution de Z sur le contour fermé que représente l'un ou l'autre de ces deux groupes, la fonction u_1 reprend sa valeur initiale, et d'ailleurs l'intégrale $\int u_1 dz$ prise le long de ce contour est nulle. On peut donc, sans altérer l'intégrale $\int_0^k u_1 dz$, supprimer les trois premiers termes de la caractéristique du chemin OLK; par la même raison, on pourra supprimer les trois suivants, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la caractéristique soit réduite à une de celles-ci,

$$+\mathrm{OMK}, \quad (A)+\mathrm{OMK}, \quad (A')+\mathrm{OMK}, \quad (A)(A')+\mathrm{OMK}, \quad (A')(A)+\mathrm{OMK}.$$

et les valeurs correspondantes de l'intégrale $\int_0^k u_1 dz$, seront

$$v_1, \quad A_1 + v_2, \quad A'_1 + v_3, \quad A_1 + v_2, \quad A'_1 + v_3.$$

On voit donc que, quel que soit le chemin OLK, cette intégrale n'a que trois valeurs distinctes qu'on peut présenter sous la forme

$$v_1, \quad A_1 + v_2, \quad A_1 + v_3;$$

car de ce que l'équation proposée n'est pas altérée par le changement simultané de u en $-u$ et de z en $-z$, on conclut aisément la relation $A'_1 = A_1$. Le nombre des valeurs de l'intégrale $\int_0^k u_1\,dz$ étant limité, il n'y a pas lieu, dans l'exemple qu'on vient de traiter, à en chercher les périodes.

En général, l'intégrale $\int_c^z u\,dz$ n'aura qu'un nombre limité de valeurs, et, par suite, sera dépourvue de périodes, toutes les fois que l'équation entre u et z sera de la forme

$$f(u) = z,$$

$f(u)$ désignant un polynôme entier en u et indépendant de z. En effet, si l'on pose

$$\int_0^z u\,dz = v,$$

on aura

$$dv = u\,dz = uf'(u)\,du,$$

d'où

$$v = \int uf'(u)\,du = \mathrm{F}(u),$$

$\mathrm{F}(u)$ désignant un polynôme entier en u. Pour chaque valeur de z, le nombre des valeurs de v est donc égal à celui des valeurs de u, lequel est limité en vertu de l'équation algébrique

$$f(u) = z.$$

Je me propose, dans un autre article, d'appliquer à de nouvelles fonctions les principes établis dans celui-ci; mais je crois devoir, en terminant, signaler d'une manière précise les emprunts que j'ai faits aux travaux de M. Cauchy, et notamment aux remarquables Mémoires qui font partie du tome XXIII des *Comptes rendus* (année 1846). On y lit à la page 700 une définition des fonctions continues, identique à celle que je donne au commencement du présent article; mais je ne crois pas que le savant géomètre ait énoncé les théorèmes des nos **6** et **7**, théorèmes qui sont indispensables pour l'étude des fonctions ainsi définies.

C'est à M. Cauchy qu'il appartient d'avoir expliqué la véritable idée qu'on doit se faire d'une intégrale prise entre des limites imaginaires et de ses valeurs multiples : la proposition que je donne à ce sujet, n° **9**, a été démontrée par lui il y a déjà longtemps. (Voir le *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.*) Les théorèmes des n^{os} **10**, **11**, **12**, qui en sont des corollaires, reviennent à ceux qu'énonce M. Cauchy dans le tome déjà cité des *Comptes rendus*, pages 253 et 692; ils acquièrent seulement une signification plus précise lorsqu'on sait, par les théorèmes des n^{os} **6** et **7** et par ceux qui sont établis dans la seconde partie du présent Mémoire, dans quels cas la fonction qu'on intègre le long d'un contour reprend ou ne reprend pas sa valeur initiale après une révolution du point mobile. J'en déduis le développement en série de la fonction u par une méthode qui est due à M. Cauchy et qu'il a plusieurs fois reproduite : lorsque j'ai démontré les propositions que je lui empruntais, c'est que je voulais les appliquer spécialement aux fonctions algébriques, et qu'alors les conditions sous lesquelles elles ont lieu comportent un énoncé plus net.

Dans la seconde partie, j'examine d'abord la manière dont les fonctions u_1, u_2, etc., échangent leurs valeurs autour des points pour lesquels l'équation en u a des racines égales ou infinies, et j'établis à ce sujet, n^{os} **18-27**, des propositions qui me paraissent nouvelles : la possibilité de partager ces fonctions en systèmes circulaires pouvait se déduire d'un théorème de M. Cauchy sur les substitutions (*Journal de l'École Polytechnique*, tome X); mais la méthode que j'ai donnée permet d'effectuer réellement ce partage.

La réduction à un seul chemin et à une série de contours élémentaires de tous les chemins par lesquels on peut aller d'un point à un autre, la notation que j'adopte, et les conséquences que j'en tire relativement aux valeurs que la fonction acquiert par ces divers chemins, me paraissent n'avoir encore été données par personne.

Dans la troisième partie, qui contient les applications au calcul intégral, je commence par réduire une intégrale définie prise le long d'un chemin quelconque à une intégrale prise le long d'un seul chemin, plus une suite d'intégrales élémentaires. Le principe de cette réduction appartient à M. Cauchy, et le calcul indiqué à la page 788 du tome déjà cité des *Comptes rendus* revient à celui de mes intégrales élémentaires. Mais la notation dont je me sers et l'emploi des propositions établies dans la seconde partie me permettent d'aller plus loin dans le cas où la fonction u dépend d'une équation du second degré, ou d'une équation binôme, et encore dans d'autres cas étendus que je traiterai plus tard : je parviens, en effet, n^{os} **50** et **59**, à des formules générales qui comprennent toutes les valeurs d'une intégrale définie prise entre deux limites données et ne comprennent que ces valeurs.

Ces formules sont nécessaires, à mon avis, pour faire connaître toutes les périodes et pour montrer qu'à une valeur quelconque d'une intégrale on peut ajouter des multiples entiers quelconques de toutes les périodes, sans cesser d'avoir une valeur de la même intégrale. Des indications données par M. Cauchy (page 698 du volume cité) on peut bien conclure l'existence d'un certain nombre de périodes, et dans un travail inédit l'illustre analyste retrouve de cette manière les périodes connues des fonctions elliptiques; mais, en suivant cette marche, on n'est pas assuré de les obtenir toutes, et l'on ne voit pas que chacune d'elles appartienne à toutes les valeurs de l'intégrale.

Je dois dire encore que les résultats auxquels je suis arrivé concordent avec ceux qu'a obtenus M. Hermite dans un travail dont l'extrait se trouve au tome XVIII des *Comptes rendus* (séance du 17 juin 1844). Par une heureuse généralisation de la marche qu'a suivie M. Jacobi pour les fonctions abéliennes, l'auteur obtient les expressions des périodes des fonctions inverses des intégrales de différentielles algébriques; mais, pour bien comprendre la signification de ces résultats, il me semble nécessaire de prendre pour point de départ la définition donnée par M. Cauchy des intégrales prises entre des limites imaginaires : c'est à ce point de vue seulement qu'on peut se rendre compte des valeurs multiples de ces intégrales [*].

[*] Je profiterai de cette occasion pour avertir d'une erreur typographique qui se trouve à la page 242 du tome XIV de ce Journal : *au lieu de ces mots,* une démonstration à laquelle j'étais parvenu, *il faut lire* une démonstration plus simple que celle à laquelle j'étais parvenu.