JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FAA DE BRUNO

Note sur une nouveau procédé pour reconnaître immédiatement, dans certains cas, l'existence de racines imaginaires dans une équation numérique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 363-364.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__363_0>

NOTE

Sur une nouveau procédé pour reconnaître immédiatement, dans certains cas, l'existence de racines imaginaires dans une équation numérique;

PAR M. FAA DE BRUNO.

THÉORÈME. *L'équation*

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Rx^2 + Sx + T = 0, \tag{1}$$

dont les coefficients sont numériquement donnés, admet des racines imaginaires si

$$P^2 - 2Q < m\sqrt[m]{T^2}. \tag{2}$$

On sait, en effet, que A, B, C,... étant des quantités positives et m leur nombre, on a

$$A + B + C + \ldots > m\sqrt[m]{ABC\ldots},$$

c'est-à-dire que la moyenne arithmétique entre plusieurs quantités est supérieure à leur moyenne géométrique [*]. Si donc les racines de l'équation (1) sont toutes réelles, et qu'on prenne pour A, B, C,... leurs carrés, ce qui donne

$$A + B + C + \ldots = P^2 - 2Q, \quad ABC\ldots = T^2,$$

on en conclura

$$P^2 - 2Q > m\sqrt[m]{T^2}.$$

L'inégalité (2) n'a donc jamais lieu quand l'équation (1) a toutes ses

---

[*] *Voyez* le *Cours d'Analyse* de M. Cauchy.

racines réelles, et si cette inégalité est vérifiée, on peut être assuré qu'il y a des racines imaginaires dans l'équation proposée.

S'il arrive que $P^2 - 2Q$ soit plus grand que $m\sqrt[m]{T^2}$, on devra appliquer encore le même principe aux coefficients correspondants dans l'équation aux racines réciproques, et l'on trouvera quelquefois

$$\frac{S^2}{T^2} - 2\frac{R}{T} < m\sqrt[m]{\frac{1}{T^2}}, \tag{3}$$

ce qui rendra évidente l'existence de racines imaginaires, qui n'était point révélée par les coefficients P et Q. Lorsque les inégalités (2) et (3) n'auront pas lieu, on ne pourra rien conclure sur la réalité ou la non-réalité des racines. Mais cet indice nouveau, combiné avec d'autres que l'on connaît déjà ou que l'on pourrait encore trouver en développant le principe indiqué ci-dessus, suffira, dans un grand nombre de cas, pour constater immédiatement et d'une manière très-simple la présence de racines imaginaires dans une équation.