JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-G.-J. JACOBI

Notice sur A. Göpel

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 357-362.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__357_0>

NOTICE SUR A. GÖPEL;

Par M. C.-G.-J. JACOBI.

(Journal de M. Crelle, tome XXXV, page 313. — Traduit de l'allemand.)

M. Adolphe Göpel, docteur en Philosophie, et l'un des employés de la bibliothèque royale de Berlin, a succombé à une maladie courte, mais douloureuse, peu de semaines après avoir livré à la publication un remarquable Mémoire intitulé : *Theoriæ transcendentium abelianarum primi ordinis adumbratio levis*. Dans les heures de loisir que lui laissait son emploi, il se livrait à de profondes recherches mathématiques, et si quelquefois il cherchait d'autres distractions, c'était à la musique qu'il les demandait, art dans lequel il avait un talent distingué. Vivant dans la retraite la plus complète, il paraissait fuir la société des savants de son ordre, qui ne connurent guère le génie qui était au milieu d'eux qu'en apprenant la perte qu'ils venaient d'en faire. Moi-même je n'ai jamais vu Göpel.

Göpel nous apprend les phases de sa jeunesse dans l'appendice, *Curriculum vitæ,* qu'il a joint à sa dissertation pour le doctorat. Son père, originaire de Saxe, était maître de musique de Rostock, où Göpel naquit en septembre 1812. Son oncle maternel, qui était consul anglais en Corse, le prit avec lui à l'âge de dix ans et l'emmena en Italie. Pendant ses divers séjours dans plusieurs villes italiennes, il s'instruisit, par les soins de son oncle, dans les principes des sciences. A Pise, durant deux années, il suivit les Cours des professeurs *Pieraccioli, Poletti, Gerbi* et *Gatteschi* sur l'Algèbre, le Calcul différentiel, la Statique et la Mécanique analytique, et enfin la Physique expérimentale et théorique. En 1827, il retourna à Rostock, sa ville natale, et fréquenta les classes élevées du Gymnase de ce lieu. De là il vint à l'Université de Berlin. Il s'empressa de profiter des ressources qu'on y trouve pour la culture de l'esprit, et outre les Cours de mathématiques, de physique et de chimie, il suivit encore les leçons de philosophie, de philologie, d'histoire et d'esthétique. Après avoir terminé ses études universitaires, il s'adonna spécialement aux mathématiques, et, comme beaucoup de ceux qui sont propres aux recherches de mathématiques pures, il se sentit attiré surtout vers la théorie des nombres. Dans sa thèse : *De æquationibus secundi gradus indeterminatis*, soutenue à l'Université de Berlin pour le grade de docteur, laquelle comprend une feuille et demie, il montra de quelle grande perspicacité il était doué pour l'étude des nombres et de quelle aptitude pour les profondes recherches. Cette dissertation remarquable n'étant pas connue du public, je vais donner ici un aperçu des résultats qu'elle contient.

Quand on réduit la racine carrée d'un nombre premier A de la forme $4n+1$ en fraction continue, la période symétrique des dénominateurs contient, comme on sait, *deux termes moyens égaux*. Soient

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

les quotients complets qui y correspondent; Legendre a démontré que

$$D = D', \quad A = I'^2 + D^2,$$

en sorte que l'on arrive, par la réduction de la racine carrée du nombre premier A en fraction continue, à sa décomposition en une somme de deux carrés. Ce résultat remarquable était jusqu'ici unique dans son genre. Par des considérations plus avancées, Göpel a trouvé que A étant un nombre premier $4n+3$ ou le double d'un tel nombre, la décomposition de A sous la forme $\varphi^2 \pm 2\psi^2$ s'effectue aussi par le développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue. En effet, supposons d'abord A un nombre premier de la forme $8n+3$, ou le double d'un tel nombre, on arrive toujours, par le développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue, à trois quotients complets consécutifs

$$\frac{\sqrt{A}+I^0}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

tels que l'on ait

$$D = \frac{1}{2}D^0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}D' \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(D^0 + D');$$

dans les deux premiers cas on a

$$A = I^2 + 2D^2,$$

et dans le troisième

$$A = \frac{1}{4}(I - I')^2 + 2D^2 = \frac{1}{16}(D^o - D')^2 + 2D^2,$$

où $I - I'$ est divisible par 2, et $D^o - D'$ divisible par 4.

Quand, au contraire, A est un nombre premier de la forme $8n + 7$, ou le double d'un tel nombre, on arrive toujours, par le développement de A en fraction continue périodique, à deux quotients complets consécutifs

$$\frac{\sqrt{A} + I^o}{D^o}, \quad \frac{\sqrt{A} + I}{D}.$$

pour lesquels

$$D + D^o = 2I,$$

ce qui donne

$$A = 2I^2 - \frac{1}{4}(D - D^o)^2,$$

où $D - D^o$ est toujours un nombre pair.

J'ai construit, avec l'aide des Tables de Degen, la Table suivante, qui montre pour les nombres premiers de la forme $8n+3$ ou leurs doubles lequel a lieu des trois cas distingués par Göpel, $D = \frac{1}{2}D^o$, $D = \frac{1}{2}D'$, $D = \frac{1}{2}(D^o + D')$:

$D = \frac{1}{2}D^o$; 3, 6, 11, 22, 38, 43, 59, 83, 131, 139, 179, 211, 214, 227, 262, 278, 283, 326, 379, 419, 443, 467, 491, 502, 547, 619, 659, 683, 694, 739, 787, 811, 827, 838, 971, 998;

$D = \frac{1}{2}D'$; 67, 86, 118, 307, 331, 358, 422, 523, 563, 566, 571, 614, 643, 662, 691, 859, 934, 947;

$D = \frac{1}{2}(D^o + D')$; 19, 107, 134, 163, 166, 251, 347, 454, 499, 587, 758, 883, 886, 907, 982.

Il est à remarquer qu'au moins parmi ces nombres tous au-dessous de 1000, la plus grande partie est comprise dans le premier cas. En effet, sur soixante-neuf, trente-six sont dans le premier cas, dix-huit dans le deuxième, quinze dans le troisième. Pour les nombres premiers de la forme $8n+7$ et leurs doubles, il faut distinguer de même les deux cas de $D^o > D$ et de $D > D^o$.

Après ce premier travail, Göpel n'a rien publié dans un espace de douze ans, à l'exception de plusieurs opuscules moins importants, mais encore remarquables, qu'il écrivit à l'occasion de la correction du Journal de mathématiques édité par Grunert, à Greifswald. Dans l'un d'eux, il prouve que, dans une équation

$$\left(\frac{x+\sqrt{y}}{p}\right)^n = P + \sqrt{Q},$$

où x, y, p, n, P, Q représentent des nombres entiers, p étant différent de 1, et x, y, p n'ayant pas de communs diviseurs, toujours on a $p=2$, $n=3$ ou un multiple de 3, x impair, et y de la forme $8n+5$.

Ces compositions montrent que Göpel était parfaitement habile dans l'emploi des méthodes synthétiques de Steiner; et l'on doit présumer que, parmi les papiers qu'il a laissés, on trouvera d'autres Mémoires, plus ou moins ébauchés, d'une étendue plus considérable.

Le Mémoire dont nous avons parlé précédemment, et qu'il termina peu de temps avant sa mort, aborde une partie élevée et abstraite de l'analyse, et donne la solution d'un des plus beaux problèmes que les mathématiques actuelles aient posés : *Donner une expression des fonctions inverses des intégrales abéliennes de première espèce.* Par une heureuse inspiration, Göpel généralise d'une manière naturelle les séries simples Θ, auxquelles j'ai ramené les fonctions elliptiques, et il trouve que ces séries généralisées donnent les coefficients de l'équation quadratique dont les deux racines dans ma théorie des fonctions ultra-elliptiques sont les fonctions inverses simultanées de deux sommes d'intégrales. Le moyen simple qui l'amène à ce résultat est la multiplication de deux séries généralisées, procédé que j'ai employé moi-même pour les fonctions Θ (tome III du *Journal de Mathématiques,* page 305). Enfin, on reconnaît la main d'un maître quand

Göpel met, par une substitution convenable, sans être effrayé de leur complication, les équations différentielles auxquelles il arrive sous la forme que j'ai donnée aux systèmes d'équations différentielles ultra-elliptiques, et complète ainsi la solution du problème proposé.

Mais Göpel n'est pas le seul qui se soit occupé avec succès de cette belle question. Dicté par une même inspiration heureuse, un autre travail plus étendu que le sien conduit, quoique par un chemin différent, et peut-être plus simple, aux mêmes résultats. Ce Mémoire est déposé, je crois, depuis le mois d'octobre de l'année dernière dans une célèbre Académie [*]. La substance m'en a été communiquée il y a trois ans par l'auteur, et depuis par moi-même à plusieurs de mes honorables amis.

Je remarque encore que les considérations de Göpel sur les secondes différentielles, tout à fait superflues pour le but actuel de ce traité, ainsi que ces paroles expresses, page 297 : *Quas ad secundam speciem nostrarum fonctionum facere* INFRA *videbis,* et page 268 : *Quam* INFRA *ad tertiam speciem functionum quadrupliciter periodicarum pertinere videbis,* font allusion à des recherches qui devaient se trouver plus loin dans son Mémoire, mais qu'on regrette de ne pas y rencontrer. Peut-être ses papiers les contiennent-ils, et peut-être aussi y trouvera-t-on la preuve de cette assertion, qui paraît hasardée, savoir, qu'une pareille méthode s'applique à toutes les transcendantes qui ressortent de l'intégration des quantités algébriques. Il serait donc possible, comme le pense l'auteur, d'étendre ses résultats aux intégrales dans lesquelles la fonction sous le radical carré dépasse le sixième degré, et où le nombre des constantes contenues dans les séries ne concorde plus, comme dans les fonctions elliptiques et abéliennes de première espèce, avec le nombre des modules.

Bien qu'il ne fût plus dans la première jeunesse, comme Galois et Abel, A. Göpel a été frappé par la mort beaucoup trop tôt. Ce talent remarquable a été arrêté au milieu de ses nobles travaux, et cepen-

[*] M. Jacobi fait sans aucun doute allusion ici au Mémoire de M. G. Rosenhain, de Breslau, adressé en 1846 à notre Académie à l'occasion du grand prix pour la question des fonctions abéliennes que M. Rosenhain a en effet obtenu. (J. L.)

dant nous devons nous réjouir qu'il nous en soit resté un beau et durable monument. Avec l'habitude des Allemands de mûrir si longtemps leurs idées, et de n'oser qu'avec timidité les mettre au jour, il était à craindre que nous ne fussions privés entièrement du fruit des veilles de Göpel. Quelle cause l'a déterminé à hâter la publication de son Traité? Peut-être la Lettre que M. Hermite m'adressa, et dont il est parlé dans la préface; peut-être un sombre pressentiment du malheur qui le menaçait et que ces mots laissent apercevoir : *Quum magis quam optabam festinandum fuisset*.

Berlin, le 22 septembre 1847.

A la suite de cette Notice, M. Crelle ajoute quelques mots. Il montre combien dans A. Göpel l'homme, le savant et l'artiste étaient dignes d'estime. Il regrette de n'avoir pas été en mesure, à cause de l'abondance des matières, d'insérer plus tôt dans son Journal le travail que ce géomètre, peu de temps avant sa mort, avait bien voulu lui transmettre. Tout eût été sacrifié à cette publication, dit-il, si la moindre prévision de ce déplorable événement eût été possible. Il promet d'imprimer prochainement la dissertation dont M. Jacobi vient de donner un aperçu, et de l'accompagner d'un fac-simile de l'auteur. Enfin il annonce qu'il a l'espoir de trouver dans les papiers de Göpel d'autres travaux qui méritent l'attention des savants.