JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 332-350.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__332_0>

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. J. BERTRAND.

On sait que les normales à une même surface jouissent de propriétés nombreuses et indépendantes de la surface particulière que l'on considère. Ces propriétés constituent une partie importante de la théorie des surfaces. Je cherche, dans ce Mémoire, à caractériser d'une manière analogue les normales principales d'une même courbe. Ces droites jouissent, comme je le fais voir, de propriétés très-précises et indépendantes de la courbe particulière que l'on considère. En d'autres termes, une surface gauche étant donnée, ses génératrices ne sont pas toujours les normales principales d'une même courbe. Les surfaces réglées peuvent être, sous ce point de vue, partagées en quatre classes :

1°. Les surfaces dont les génératrices ne sont les normales principales d'aucune courbe;

2°. Les surfaces qui ont pour génératrices les normales principales d'une seule courbe;

3°. Les surfaces dont les génératrices sont, à la fois, normales principales de deux courbes distinctes;

4°. Enfin, les surfaces dont les génératrices sont normales principales d'un nombre infini de courbes distinctes : cette dernière classe ne contient que les héliçoïdes à plan directeur.

Une surface étant donnée, j'indique le moyen de déterminer la classe à laquelle elle appartient.

Parmi les résultats particuliers auxquels je suis parvenu, je citerai les suivants :

Les normales principales d'une courbe ne peuvent jamais former une surface du second degré.

Pour que les normales principales d'une courbe soient, en même temps, normales principales d'une autre courbe, il faut et il suffit qu'il existe, entre les deux courbures de cette courbe, une relation linéaire.

I.

Si les génératrices d'une surface réglée sont les rayons de courbure d'une ligne tracée sur cette surface, cette ligne a, en chaque point, son plan osculateur tangent à la surface.

On sait, en effet, que le plan osculateur d'une courbe passe par la tangente à cette courbe et par la normale principale. Or ces deux lignes sont ici la tangente à une ligne tracée sur la surface réglée et la génératrice même de la surface. Elles déterminent, par conséquent, le plan tangent qui coïncide, par suite, avec le plan osculateur de la courbe.

Si les génératrices d'une surface réglée sont les normales principales d'une ligne tracée sur cette surface, en chaque point de cette ligne, la section faite dans la surface par un plan normal à la génératrice a un rayon de courbure infini.

On sait, en effet, par le théorème de Meunier, que le rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface est le produit du rayon de la section normale menée suivant la même tangente, par le cosinus de l'angle que fait le plan de cette section avec le plan osculateur de la première courbe. Or la courbe dont les normales principales sont les génératrices de la surface a, d'après ce qui précède, son plan osculateur tangent à la surface, et le cosinus de l'angle formé par ce plan avec celui de la section normale correspondante est, par suite. égal à zéro. Il faut, par conséquent, pour que le produit ne soit pas nul, que l'autre facteur, c'est-à-dire le rayon de la section normale. soit infini.

En chaque point de la courbe dont les normales principales sont *les génératrices d'une surface gauche, les rayons de courbure de la surface sont égaux et de signes contraires.*

La somme des courbures principales d'une surface quelconque est égale, en effet, à la somme des courbures de deux sections normales faites, en un même point, perpendiculairement l'une à l'autre. Or, d'après ce qui précède, si l'on fait, en chaque point de la courbe considérée, deux sections normales, l'une suivant la génératrice, l'autre normalement à la génératrice, ces deux sections (dont la première est une ligne droite) ont l'une et l'autre une courbure nulle; la somme de ces deux courbures, et, par suite, la somme des courbures de la surface est donc égale à zéro.

II.

Le dernier des théorèmes démontrés dans le paragraphe précédent permet de décider si une surface réglée peut être considérée comme le lieu des normales principales d'une courbe. Il faut, en effet, pour cela, qu'il existe sur la surface donnée une série de points pour lesquels les rayons de courbure soient égaux et de sens contraire, et que, de plus, ces points forment une courbe normale aux génératrices. On peut voir facilement que cette condition nécessaire est en même temps suffisante. Si, en effet, elle est remplie; la section normale à la surface faite perpendiculairement à la génératrice en chacun des points de la courbe considérée, doit avoir un rayon de courbure infini. Il faut donc que le plan osculateur de cette ligne soit tangent à la surface; car, sans cela, le cosinus de l'angle qu'il forme avec le plan normal de la surface n'étant pas nul, le rayon de courbure de la courbe devrait aussi être infini, ce qui, évidemment, ne peut avoir lieu qu'en des points particuliers. Nous sommes donc conduits à nous proposer ce premier problème :

Quels sont les points sur une surface gauche pour lesquels la somme des rayons de courbure de la surface est égale à zéro?

Considérons une surface gauche représentée par les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = z\varphi(\alpha) + \alpha, \\ y = z\psi(\alpha) + F(\alpha), \end{cases}$$

et, sur cette surface, une génératrice que, pour plus de simplicité, nous supposerons confondue avec l'axe des z. Admettons, en outre, pour simplifier les calculs, que l'on ait pris pour origine le point de cette génératrice le plus rapproché de la génératrice infiniment voisine, et que le plan des ZX soit tangent à la surface à l'origine; on aura évidemment alors

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\mathrm{o}) = \mathrm{o}, \quad \psi(\mathrm{o}) = \mathrm{o}, \quad \mathrm{F}(\mathrm{o}) = \mathrm{o}, \\ \varphi'(\mathrm{o}) = \mathrm{o}, \quad \mathrm{F}'(\mathrm{o}) = \mathrm{o}. \end{array} \right.$$

Cherchons les points de l'axe des z pour lesquels la somme des courbures principales est nulle. Ces points sont ceux pour lesquels la courbure de la section parallèle au plan des XY est infinie. Il faut donc, pour les déterminer, écrire que la courbe représentée par les deux équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = z\varphi(\alpha) + \alpha, \\ x = z\psi(\alpha) + \mathrm{F}(\alpha), \end{array} \right.$$

dans lesquelles on regarde z comme une constante, a un rayon de courbure infini pour $\alpha = \mathrm{o}$. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait pour cette valeur de α,

$$(4) \qquad dx\, d^2 y - dy\, d^2 z = \mathrm{o}.$$

Or on déduit immédiatement des équations (3),

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} dx = [z\varphi'(\alpha) + 1]\, d\alpha, & dy = [z\psi'(\alpha) + \mathrm{F}'(\alpha)]\, d\alpha, \\ d^2 x = z\varphi''(\alpha)\, d\alpha^2, & d^2 y = [z\psi''(\alpha) + \mathrm{F}''(\alpha)]\, d\alpha^2, \end{array} \right.$$

et l'équation (4) devient, en ayant égard aux conditions (2),

$$(6) \qquad z^2 \varphi''(\mathrm{o})\,\psi'(\mathrm{o}) - z\psi''(\mathrm{o}) - \mathrm{F}''(\mathrm{o}) = 1.$$

Cette équation est du second degré. Il y a donc, sur chaque génératrice, deux points, au plus, pour lesquels les rayons de courbure sont égaux et de signes contraires. Le lieu des points qui, sur la surface, jouissent de cette propriété est donc composé de deux courbes distinctes qui peuvent se confondre ou disparaître si les racines sont égales ou imaginaires. Si l'équation (6) est satisfaite identiquement, tous les points de la génératrice satisfont à la condition demandée.

Avant d'aller plus loin, nous exprimerons les coefficients de l'équation (6) en fonction des éléments qui pourraient servir de définition à la surface gauche.

Remarquons d'abord qu'en faisant $z = 0$ dans les équations (1), on obtient

$$x = \alpha,$$
$$y = F(\alpha),$$

d'où l'on déduit

$$y = F(x), \tag{7}$$

pour équation de la section faite dans la surface par le plan des XY. Si l'on remarque que $F'(0) = 0$, on voit que $F''(0)$ est la courbure de cette section, et, par suite, la somme des courbures de la surface gauche au point de la génératrice le plus rapproché de la génératrice voisine, c'est-à-dire au point où l'axe des z perce la ligne que les géomètres appellent quelquefois *ligne de striction de la surface*.

Si nous désignons cette somme par $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, nous aurons

$$F''(0) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \tag{8}$$

la génératrice infiniment voisine de l'axe des z a pour équations, si l'on a égard aux conditions (2),

$$x = d\alpha,$$
$$y = z\psi'(\alpha)\,d\alpha.$$

Sa plus courte distance à l'axe des z est $d\alpha$, l'angle qu'elle fait avec cet axe est $\psi'(0)\,d\alpha$; en sorte que $\psi'(0)$ est le rapport de l'angle de deux génératrices infiniment voisines à leur plus courte distance. Mais on démontre facilement que ce rapport est l'inverse de la racine carrée du produit des rayons de courbure principaux de la surface à l'origine des coordonnées; on a donc

$$\psi'(0) = \frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}}. \tag{9}$$

Pour calculer $\psi''(0)$, qui figure aussi dans l'équation (6), nous allons chercher la dérivée de la fonction $\frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}}$ par rapport à l'arc de la ligne de striction. Commençons par calculer la valeur de cette fonction $\frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}}$ pour un point quelconque de la ligne de striction.

Soit une génératrice ayant pour équations

$$y = z\psi(\alpha) + F(\alpha),$$
$$x = z\varphi(\alpha) + \alpha;$$

les équations de la génératrice infiniment voisine sont

$$y = z\psi(\alpha) + F(\alpha) + z\psi'(\alpha)\,d\alpha + F'(\alpha)\,d\alpha,$$
$$x = z\varphi(\alpha) + \alpha + z\varphi'(\alpha)\,d\alpha + d\alpha.$$

$\frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}}$ est égal, comme nous l'avons dit plus haut, au rapport de l'angle de ces génératrices à leur plus courte distance. Or, en indiquant leur angle par θ, on trouve sans difficulté

$$\theta^2 = \frac{\psi'^2 + \varphi'^2 + (\varphi\psi' - \psi\varphi')^2}{(1 + \varphi^2 + \psi^2)^2}\,d\alpha^2.$$

Quant à la plus courte distance ε, sa valeur est

$$\varepsilon = \frac{d\alpha(\psi' - F'\varphi')}{\sqrt{\psi'^2 + \varphi'^2 + (\varphi\psi' - \psi\varphi')}};$$

on a donc

$$-\frac{1}{RR_1} = \frac{\theta^2}{\varepsilon^2} = \frac{[\psi'^2 + \varphi'^2 + (\varphi\psi' - \psi\varphi')^2]^2}{(1 + \varphi^2 + \psi^2)^2(\psi' - F\varphi')^2}.$$

Pour avoir la dérivée de $-\frac{1}{RR_1}$ par rapport à α, il faut retrancher de cette expression la valeur $\psi'(0)^2$, qui correspond à $\alpha = 0$, et diviser la différence par $d\alpha$, après avoir supposé α infiniment petit et égal lui-même à $d\alpha$. Or on a évidemment, en négligeant les infiniment petits du second ordre, et à cause des équations (2),

$$\psi(d\alpha) = \psi'(0)\,d\alpha,$$
$$\psi'(d\alpha) = \psi'(0) + \psi''(0)\,d\alpha,$$
$$\varphi(d\alpha) = 0,$$
$$\varphi'(d\alpha) = \varphi''(0)\,d\alpha,$$
$$F'(d\alpha) = F''(0)\,d\alpha,$$

et il vient par suite, en négligeant les infiniment petits du second ordre, et pour la valeur $d\alpha$ attribuée à α,

$$\frac{-1}{R_1 R_2} = \frac{[\psi'(0)^2 + 2\psi'(0)\psi''(0)\,d\alpha]^2}{[\psi'(0) + \psi''(0)\,d\alpha]^2};$$

et si nous retranchons de cette expression $\psi'(0)^2$, et que nous divisions par $d\alpha$, nous obtiendrons sans difficulté

$$-\frac{d\dfrac{1}{R_1 R_2}}{d\alpha} = 2\psi'(0)\psi''(0);$$

on en conclut, en remplaçant $\psi'(0)$ par $\dfrac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}}$,

$$(10) \qquad \psi''(0) = -\frac{1}{2}\frac{d\dfrac{1}{R_1 R_2}}{d\alpha}\sqrt{-R_1 R_2}.$$

Si, enfin, nous nommons φ l'angle de la ligne de striction avec la plus courte distance $d\alpha$ de deux génératrices consécutives, et ds l'arc de cette ligne de striction compris entre les génératrices considérées, on aura

$$d\alpha = ds\cos\varphi,$$

et, par suite, l'équation (10) équivaut à

$$(11) \qquad \psi''(0) = -\frac{1}{2\cos\varphi}\frac{d\dfrac{1}{R_1 R_2}}{ds}\sqrt{-R_1 R_2}.$$

Il nous reste à calculer $\varphi''(0)$. Pour cela, nous chercherons à déterminer l'angle que nous venons de désigner par φ et que forme la ligne de striction avec la plus courte distance des deux génératrices. Pour y parvenir, remarquons que la ligne de striction coupe la génératrice qui se confond avec l'axe des z, à l'origine même des coordonnées. Si donc nous cherchons l'ordonnée du point où elle rencontre la génératrice infiniment voisine, le rapport de cette ordonnée à la plus courte distance $d\alpha$ sera la tangente de l'angle φ.

Cherchons donc le point où une génératrice quelconque

$$x = z\varphi(\alpha) + \alpha,$$
$$y = z\psi(\alpha) + F(\alpha),$$

est coupée par la ligne de striction, c'est-à-dire l'extrémité de sa plus courte distance à la génératrice infiniment voisine,

$$x = z\varphi(\alpha) + \alpha + z\varphi'(\alpha)\,d\alpha + d\alpha,$$
$$y = z\psi(\alpha) + \mathrm{F}(\alpha) + z\psi'(\alpha)\,d\alpha + \mathrm{F}'(\alpha)\,d\alpha.$$

Or, en cherchant le point où la plus courte distance de ces droites perce la première, on trouve, en employant les formules connues de la géométrie analytique à trois dimensions,

$$z = \frac{\varphi' - \psi\varphi\psi' + \psi^2\varphi' + \mathrm{F}'\psi' + \mathrm{F}'\varphi^2\psi' - \mathrm{F}'\varphi\psi\varphi}{-\varphi'^2 + 2\varphi'\psi\varphi\psi' - \varphi'^2\psi^2 - \psi'^2 - \psi'^2\varphi^2}.$$

C'est cette valeur de z qu'il faut diviser par $d\alpha$, après y avoir supposé à α la valeur infiniment petite $d\alpha$. Or, en ayant égard aux équations (2), et procédant comme nous l'avons fait plus haut, on trouve

$$\lim \frac{z}{d\alpha} = \operatorname{tang}\varphi = \frac{\varphi''(0) + \psi'(0)\,\mathrm{F}''(0)}{-\psi'(0)^2},$$

d'où l'on déduit

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi''(0) &= -\psi'(0)^2 \operatorname{tang}\varphi - \psi'(0)\,\mathrm{F}''(0) \\ &= \frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\operatorname{tang}\varphi - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right). \end{aligned}\right.$$

En substituant dans l'équation (6) les valeurs fournies par les formules (8), (9), (11), (12) pour ses différents coefficients, elle devient

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = &\frac{z^2}{\sqrt{-\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}\left[\frac{-\operatorname{tang}\varphi}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} + \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}} \\ &+ \frac{z\sqrt{-\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{d\dfrac{-1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}{ds}\right) + \frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose $\operatorname{tang}\varphi = 0$, c'est-à-dire si la ligne de striction coupe à angle droit les génératrices, l'équation devient

$$(14)\qquad 0 = -\frac{z^2}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right) - \frac{z\sqrt{-\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}{2}\,\frac{d\dfrac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}{ds} + \frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}.$$

En portant sur chaque génératrice, à partir de la ligne de striction, une longueur égale à l'une des racines de cette équation, on obtiendra la ligne en tous les points de laquelle les courbures de la surface sont égales et de signes contraires. Pour que cette ligne coupe à angle droit les génératrices, il faut, dans le cas où l'angle φ est nul, que la valeur de z soit constante. Si l'on veut qu'il existe sur la surface deux courbes dont les rayons de courbure coïncident avec les génératrices, il faut que les deux racines de l'équation (14) soient constantes, et, par suite, il doit en être de même de leur produit qui, évidemment, est $\frac{-1}{R_1 R_2}$; mais alors $\frac{d\frac{1}{R_1 R_2}}{ds}$ est nul, et l'équation devient

$$\frac{-z^2}{R_1 R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0.$$

Or cette équation est impossible, car, dans une surface gauche, $R_1 R_2$ est négatif et les racines sont, par conséquent, imaginaires. Nous avons donc ce résultat :

Il est impossible qu'une surface dont la ligne de striction coupe à angle droit les génératrices, c'est-à-dire la surface formée par les normales aux plans osculateurs d'une courbe, contienne deux lignes distinctes dont les génératrices soient les normales principales.

La formule (13) peut aussi servir à la démonstration d'un théorème connu :

L'héliçoïde à plan directeur est la seule surface réglée dont les rayons de courbure en chaque point soient égaux et de signes contraires.

Pour qu'une surface jouisse, en effet, de cette propriété, il faut que l'équation (13) soit satisfaite pour toutes les génératrices, quelle que soit la valeur de z. On doit donc avoir, aux différents points de la ligne de striction,

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0, \tag{15}$$

$$\frac{\tang\varphi}{(-R_1 R_2)^{\frac{3}{2}}}=0, \tag{16}$$

$$\sqrt{-R_1 R_2}\,\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{d\frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}}}{ds}=0. \tag{17}$$

L'équation (16) exige que $\tang\varphi$ soit égal à zéro ou $R_1 R_2 = \infty$; mais cette dernière hypothèse n'est pas admissible, car il faudrait pour cela, d'après l'équation (15), que R_1 et R_2 fussent l'un et l'autre infinis en chaque point et la surface se réduirait à un plan. Il faut donc supposer $\varphi = 0$, et, par suite, la ligne de striction coupe les génératrices à angle droit; mais alors $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ désigne, comme on s'en assure facilement, la courbure de cette ligne de striction, et puisque cette somme est nulle en vertu de l'équation (15), la ligne de striction est droite, et, par suite, les génératrices de la surface coupent toutes une même droite à laquelle elles sont perpendiculaires.

D'ailleurs l'équation (17) exige que $R_1 R_2$ soit constant et que, par suite, il existe un rapport constant entre l'angle de deux génératrices infiniment voisines et leur plus courte distance. Les plus courtes distances étant ici toutes comptées sur la même droite et l'angle de deux génératrices quelconques étant la somme des angles formés par deux génératrices intermédiaires, on en conclut qu'il existe un rapport constant entre la distance de deux génératrices quelconques et l'angle qu'elles font entre elles, et que la surface est un héliçoïde.

III.

Une surface gauche étant définie par sa ligne de striction et l'angle que cette ligne forme en chaque point avec la génératrice, l'équation (14) obtenue plus haut permettra de trouver, dans chaque cas, le lieu des points pour lesquels la somme des courbures est égale à zéro. Pour savoir s'il existe sur la surface une ligne dont les génératrices soient normales principales, il suffira de chercher si cette courbe coupe à angle droit les génératrices, ce qui se fera facilement dans chaque cas particulier.

Il peut arriver que, pour trouver le lieu des points pour lesquels la somme des courbures est nulle, il soit plus simple de ne pas recourir aux formules du paragraphe précédent; nous en donnerons un exemple en résolvant le problème suivant:

Est-il possible que les rayons de courbure d'une ligne forment une surface gauche du second degré?

Considérons la surface qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et cherchons s'il est possible de tracer sur elle une courbe qui ait ses génératrices pour normales principales. Cette courbe, si elle existe, est, comme nous l'avons vu, le lieu des points pour lesquels la somme des courbures principales est égale à zéro. Or on sait qu'en chacun de ces points il passe deux génératrices rectilignes. La section normale, conduite suivant une d'elles, ayant une courbure nulle, il doit en être de même de la section perpendiculaire qui, par suite, doit être aussi rectiligne. Les points en question sont donc ceux où deux génératrices rectilignes se coupent à angle droit. Or de pareils points peuvent être considérés comme les sommets d'angles trièdres circonscrits à la surface; et, en effet, nous avons trois plans tangents perpendiculaires deux à deux qui ont ce point pour intersection commune, savoir, le plan de deux génératrices et les plans perpendiculaires à celui-là menés par chacune d'elles, lesquels touchent nécessairement la surface, puisqu'ils contiennent une génératrice. Or on sait que le lieu des sommets d'un trièdre trirectangle circonscrit à une surface du second ordre est une sphère qui, dans le cas actuel, a pour équation

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2.$$

La courbe cherchée est l'intersection de cette sphère avec l'hyperboloïde. Mais cette courbe ne peut pas couper les génératrices à angle droit; pour qu'elle fût, en effet, perpendiculaire à l'une des génératrices qui se croisent en chacun de ses points, il faudrait qu'elle fût tangente à l'autre, et l'hyperboloïde n'étant pas une surface développable, ses génératrices ne peuvent être tangentes à une même courbe.

Ainsi donc, *les rayons de courbure d'une ligne courbe ne peuvent jamais former un hyperboloïde.*

Pour répondre complétement à la question énoncée, il nous reste à examiner si les normales principales d'une courbe peuvent former un paraboloïde. Nous traiterons pour cela une question plus générale.

Quelles sont les courbes dont les normales principales sont parallèles à un même plan?

Si nous considérons une courbe qui satisfasse à la condition énoncée et que, par les différents points, nous abaissions des perpendiculaires sur le plan auquel les rayons de courbure sont parallèles, nous formerons une surface cylindrique à laquelle les rayons de courbure de la courbe donnée seront normaux. Cette courbe est donc une ligne géodésique tracée sur le cylindre, ou, en d'autres termes, une *hélice*. On s'assurera facilement que les rayons de courbure d'une hélice ne forment, dans aucun cas, un paraboloïde.

IV.

Nous allons chercher enfin quelles sont les surfaces réglées dont les génératrices sont les normales principales de deux courbes distinctes. Nous déterminerons, pour cela, les courbes dont les rayons de courbure peuvent coïncider, en direction, avec ceux d'une autre courbe, ou, d'après ce qui précède, les courbes telles, qu'il existe sur la surface gauche lieu de leurs rayons de courbure, une seconde ligne coupant ces rayons à angle droit, et en tous les points de laquelle la somme des courbures de la surface soit égale à zéro. Pour y parvenir, nous chercherons quelle longueur on doit porter sur chaque rayon de courbure pour obtenir un point pour lequel la somme des courbures de la surface soit nulle; nous exprimerons ensuite que cette longueur est constante.

Considérons une courbe représentée par les trois équations

$$(a)\qquad x = \varphi_1(s),\quad y = \varphi_2(s),\quad z = \varphi_3(s),$$

entre l'arc s et les coordonnées orthogonales d'un point. Supposons que l'on ait pris pour axe des z le rayon de courbure correspondant à $s = 0$, et, pour plan des ZX, le plan osculateur en ce point, en sorte que l'on ait, pour $s = 0$,

$$(b)\qquad \begin{cases} x = 0, & y = 0, & z = 0, \\ \dfrac{dx}{ds} = 0, & \dfrac{dy}{ds} = 0, & \dfrac{dz}{ds} = 0, \\ \dfrac{d^2x}{ds^2} = 0, & \dfrac{d^2y}{ds^2} = 0, & \dfrac{d^2z}{ds^2} = -\dfrac{1}{\rho}. \end{cases}$$

Cherchons la condition pour que l'origine des coordonnées soit précisément le point où la surface gauche lieu des rayons de courbure, a ses rayons de courbure égaux et de signes contraires. Il faut pour cela que la section faite dans cette surface par le plan des XY ait un rayon de courbure infini, et, par suite, que la distance de cette section à sa tangente soit un infiniment petit du troisième ordre. Nous chercherons donc les deux coordonnées infiniment petites x et y du point de cette courbe qui correspond à une valeur infiniment petite ds attribuée à l'arc s, et nous écrirons que le rapport $\frac{y}{x}$ ne diffère de sa limite pour $ds = 0$, que d'un infiniment petit du second ordre. Les cosinus des angles formés par un rayon de courbure avec les axes des coordonnées, sont proportionnels à $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$. Pour le point qui correspond à une valeur infiniment petite ds de l'arc s, et en vertu des hypothèses exprimées par les équations (b), les trois coefficients différentiels peuvent être remplacés par

$$\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2},\quad \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 ds + \frac{d^4y}{ds^4}\frac{ds^2}{2},\quad -\frac{1}{\rho} + \frac{d^3z}{ds^3}ds + \frac{d^4z}{ds^4}\frac{ds^2}{2};$$

les coordonnées des points de la courbe sont d'ailleurs, en vertu des mêmes hypothèses, et en négligeant toujours les infiniment petits d'un ordre supérieur au second,

$$ds,\quad 0,\quad a,$$

en sorte que les équations de la normale principale sont

$$\frac{x - ds}{\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}} = \frac{y}{\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}} = \frac{z - a}{-\frac{1}{\rho} + \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4z}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}}.$$

C'est dans ces équations que nous devons supposer $z = 0$, pour calculer les valeurs correspondantes de x et de y, qui sont

$$y = \frac{-a\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 ds - a\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}}{-\frac{1}{\rho} + \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4z}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}};$$

$$x = \frac{-a\left[\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}\right] - \frac{ds}{\rho} + ds^2\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0}{-\frac{1}{\rho} + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4z}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}},$$

et il faut exprimer que le rapport

$$\frac{y}{x} = \frac{-a\left(\frac{d^3y}{ds^3}ds + \frac{d^4y}{ds^4}\frac{ds^2}{2}\right)}{-a\left[\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0\frac{ds^2}{2}\right] - \frac{ds}{\rho} + ds^2\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)}$$

ne diffère de sa limite

$$\frac{-a\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0}{-a\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 - \frac{1}{\rho}}$$

que d'un infiniment petit du second ordre.

Or, en prenant la différence de ces deux expressions et égalant à zéro le coefficient ds, on trouve

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 + \frac{a}{2\rho}\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 - \frac{a^2}{2}\left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 + a\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 = 0,$$

et l'on en déduit

$$(c) \qquad a = \frac{-\frac{1}{2\rho}\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 - \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0}{\frac{1}{2}\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0}$$

Nous allons exprimer maintenant les coefficients différentiels qui entrent dans le second membre, en fonction de deux rayons de courbure de la courbe considérée, et de leurs dérivées.

On a, pour un point quelconque,

$$(d) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

En différentiant cette équation par rapport à s, il vient

$$-\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3};$$

et si l'on suppose $s = 0$, il vient, en vertu de l'équation (b),

$$(e) \qquad \frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds} = \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

On en déduit, par la différentiation,

$$(f)\qquad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2+\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3}+\frac{dz}{ds}\frac{d^3z}{ds^3}=0,$$

et, en faisant dans cette dernière équation $s=0$, il vient

$$(g)\qquad \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0=-\frac{1}{\rho^2}.$$

En différentiant l'équation (f) par rapport à s, on obtient la suivante :

$$(h)\quad 0=3\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3}+3\frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3}+3\frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3}+\frac{dx}{ds}\frac{d^4x}{ds^4}+\frac{dy}{ds}\frac{d^4y}{ds^4}+\frac{dz}{ds}\frac{d^4z}{ds^4},$$

et, en faisant $s=0$, il vient

$$-\frac{3}{\rho}\frac{d^3z}{ds^3}+\frac{d^4x}{ds^4}=0;$$

d'où l'on déduit, en ayant égard à l'équation (g),

$$(i)\qquad \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0=\frac{3}{\rho^3}\frac{d\rho}{ds}.$$

Pour déterminer les autres coefficients différentiels qui figurent dans l'expression de la longueur a, considérons l'expression de la seconde courbure de la ligne considérée. On a, en désignant par R le rayon de seconde courbure,

$$(k)\quad \frac{1}{R}=\frac{\frac{dy}{ds}\left(\frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3}-\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3}\right)+\frac{dz}{ds}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3}-\frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3}\right)+\frac{dx}{ds}\left(\frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3}-\frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3}\right)}{\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}.$$

Si l'on fait dans cette équation $s=0$, il vient

$$\frac{1}{R}=\frac{\frac{1}{\rho}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0}{\frac{1}{\rho^2}}=\rho\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0,$$

d'où

$$(l)\qquad \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0=\frac{1}{R\rho}.$$

Si nous différentions enfin la valeur de $\frac{1}{R}$ par rapport à s, et que, dans le résultat, nous supposions $s = 0$, il viendra facilement

$$-\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)_0 = \frac{\frac{1}{\rho^3}\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 + \frac{2}{\rho^2}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0}{\frac{1}{\rho^4}},$$

et l'on en déduit, en ayant égard aux équations précédentes,

$$(m) \qquad \left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 = -\frac{1}{R^2\rho}\left(\frac{dR}{ds}\right)_0 + \frac{2}{R\rho}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0.$$

En substituant dans les valeurs de (a) les expressions des coefficients différentiels qui y figurent et qui sont données par les équations (e), (g), (c), (l), (m), il vient

$$a = \frac{\frac{1}{R^2\rho^2}\frac{dR}{ds}}{\frac{1}{R^2\rho^3}\frac{dR}{ds} - \frac{1}{R\rho^4}\frac{d\rho}{ds}},$$

ou, en chassant le dénominateur, et supprimant les facteurs communs,

$$\left(\frac{a}{R\rho} - \frac{1}{R}\right)\frac{dR}{ds} = \frac{a}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}.$$

On en déduit

$$\frac{d\rho}{dR} = \frac{a\rho - \rho^2}{Ra},$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho(a-\rho)} = \frac{1}{a}\frac{dR}{R},$$

et, en intégrant,

$$\frac{C\rho}{a-\rho} = CR,$$

$$C\rho = aCR - \rho CR,$$

ou, enfin, en divisant par ρR,

$$(n) \qquad 1 = \frac{a}{\rho} - \frac{C}{R}.$$

Telle est la relation fort simple qui doit exister entre les deux rayons de courbure d'une courbe pour que les normales principales soient en même temps normales principales d'une autre courbe. Si l'on suppose la constante arbitraire C égale à zéro, il vient

$$\rho = 0.$$

Les courbes dont le rayon de courbure est constant satisfont donc à la condition générale, et la longueur qu'il faut porter sur les rayons de courbure pour obtenir la seconde courbe dont ils sont aussi les normales principales, est précisément égale à ce rayon de courbure constant, en sorte que la seconde courbe est le lieu des centres de la courbure de première. Cette dernière proposition a déjà été remarquée par M. Bouquet.

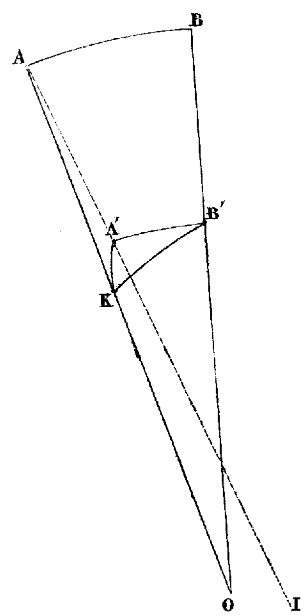
VI.

Indépendamment de la relation

$$\frac{a}{\rho} - \frac{C}{R} = 1,$$

qui a lieu entre les deux courbures de l'une des courbes dont les normales principales sont aussi normales principales d'une autre courbe, on peut en obtenir deux autres qui permettent d'exprimer les deux rayons de courbure de l'une des deux courbes en fonction de ceux de l'autre.

Nommons, en effet, ds_1, ρ_1, R_1 l'arc infiniment petit AB de l'une



de nos courbes et les deux rayons de courbure. Soient ds_2, ρ_2, R_2, l'arc correspondant A'B' de la seconde courbe et ses deux rayons de courbure; désignons enfin par a la distance constante qui sépare les points correspondants des deux courbes.

Si BO est la direction du rayon de courbure en B, O le centre de courbure, AI la direction du rayon de courbure en A, l'angle A'AO, que forme AA' avec le plan osculateur OBA, est précisément l'angle de deux plans osculateurs consécutifs de la courbe AB; il est égal à $\frac{ds_1}{R_1}$. L'angle AOB est l'angle de contingence égal à $\frac{ds_1}{\rho_1}$.

Or, en désignant par x l'arc B'K décrit du point O comme centre, et compris entre OB et OA, on a

$$ds_1 : x :: \rho_1 : \rho_1 - a.$$

Mais, dans le triangle rectangle A'KB',

$$x^2 = \mathrm{A'B'}^2 - \overline{\mathrm{A'K}}^2 = ds_2^2 - a^2\frac{ds_1^2}{R_1^2};$$

d'où

$$ds_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 - a}\sqrt{ds_2^2 - a^2\frac{ds_1^2}{R_1^2}}.$$

On aurait de même

$$ds_2 = \frac{\rho_2}{\rho_2 + a}\sqrt{ds_1^2 - a^2\frac{ds_2^2}{R_2^2}},$$

ou

$$1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 - a}\sqrt{\left(\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2 - \frac{a^2}{R_1^2}},$$

$$\frac{ds_2}{ds_1} = \frac{\rho_2}{\rho_2 + a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{R_2^2}\left(\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2}.$$

D'ailleurs, si l'on nomme θ l'angle de deux rayons de courbure infiniment voisins, il est facile de voir que l'on a

$$\theta^2 = ds_1^2\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{R_1^2}\right) = ds_2^2\left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{R_2^2}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{ds_2}{ds_1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{R_1^2}}{\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{R_2^2}}};$$

et, par suite, les équations précédentes deviennent

$$1 = \frac{\rho_1^2}{(\rho_1 - a)^2}\left[\frac{\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{R_1^2}}{\dfrac{1}{\rho_2^2}+\dfrac{1}{R_2^2}} - \frac{a^2}{R_1^2}\right],$$

$$\frac{\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{R_1^2}}{\dfrac{1}{\rho_2^2}+\dfrac{1}{R_2^2}} = \frac{\rho_2^2}{(\rho_2 + a)^2}\left[1 - \frac{a^2}{R_2^2}\,\frac{\left(\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{R_1^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{\rho_2^2}+\dfrac{1}{R_2^2}\right)}\right].$$

Telles sont les deux équations qui permettent de calculer ρ_1 et R_1 en fonction de ρ_2 et R_2.

Dans le cas particulier où ρ_1 est constant et égal à a, les équations deviennent

$$\frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{R_1^2}}{\dfrac{1}{\rho_2^2}+\dfrac{1}{R_2^2}} = \frac{a^2}{R_1^2},$$

$$\frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{R_1^2}}{\dfrac{1}{\rho_2^2}+\dfrac{1}{R_2^2}} = \frac{\rho_2^2}{(\rho_2 + a)^2}\left[1 - \frac{a^2}{R_2^2}\,\frac{\left(\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{R_1^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{\rho_2^2}+\dfrac{1}{R_2^2}\right)}\right];$$

et l'on en déduit sans peine,

$$\rho_2 = -a,$$

$$R_2 = \frac{a^2}{R_1}.$$