JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

W.-J. DONKIN

Sur la théorie de la combinaison des observations

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 297-322.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__297_0>

SUR

LA THÉORIE DE LA COMBINAISON DES OBSERVATIONS;

Par M. W.-J. DONKIN,
Professeur d'Astronomie à l'Université d'Oxford.

La théorie que je vais exposer a été déjà publiée dans un essai que j'ai présenté à la *Société Ashmoléenne* d'Oxford. Mais les Mémoires de cette Société n'ayant point de circulation générale, je profite de l'occasion que le rédacteur de ce Journal a bien voulu m'accorder, pour la présenter encore aux géomètres dans une forme plus accessible.

Les résultats auxquels je suis parvenu ne sont que le développement en forme précise et démonstrative d'une idée qui n'est point nouvelle; c'est-à-dire de l'idée d'une analogie entre les formules de la théorie de la combinaison des observations et celles qu'on rencontre dans quelques parties de la Mécanique. Mais personne, que je sache, n'a réussi auparavant à trouver la clef de cette analogie, ni à donner l'unité aux diverses ressemblances isolées, en les ramenant à un seul principe fondé sur des raisonnements d'un caractère démonstratif. C'est ce que je crois avoir fait dans le Mémoire suivant, en établissant une espèce de Statique métaphysique sur des preuves de la même force que celles qu'on emploie en déduisant, à priori, les lois de la Statique ordinaire. Les résultats de cette méthode sont parfaitement identiques avec ceux qu'a trouvés M. Gauss par le procédé exposé dans sa *Theoria combinationis observationum, etc.*, comme on le verra, au moins dans tous les cas où une comparaison peut avoir lieu. Quant au caractère de mes raisonnements, quelque jugement qu'on puisse se former sur leur validité, je crois qu'il faudra admettre qu'ils ne contiennent rien d'arbitraire; que nulle hypothèse n'a été adoptée qui ne fût pas évidemment la plus vraisemblable, ou plutôt la seule admissible entre toutes celles qui pouvaient être imaginées. Et cela étant, la correspondance parfaite entre les résultats de deux méthodes qui reposent sur des principes entièrement indépendants, doit au moins être censée un fait intéressant, dans le cas même où l'on ne serait pas satisfait de l'explication de cette correspondance.

I.

1. Supposons qu'une observation ait donné la valeur x_1 pour une quantité inconnue, et qu'une autre observation ait donné la valeur x_2 pour la même inconnue; si l'on ne sait rien de plus, il est évident que l'on doit attribuer à cette quantité quelque valeur x intermédiaire entre x_1 et x_2. Soit x_1 algébriquement moindre que x_2. Alors, la première observation, considérée à part, fournit un motif à diminuer la valeur de x; la seconde nous porte à l'augmenter. Donc x doit être déterminée de manière que ces deux motifs se fassent équilibre. Appelons *force* tout motif qui nous porte à altérer la valeur attribuée à une quantité; et tâchons de comparer numériquement les forces de cette espèce, et de trouver les lois auxquelles elles sont assujetties.

2. Admettons que deux observations quelconques, de différentes qualités, soient toujours comparables à l'égard de leurs *poids*, de la manière suivante; c'est-à-dire qu'il existe toujours deux nombres m et n tels, que si la première observation, m fois répétée, eût donné à chaque répétition la même valeur pour l'inconnue, nous aurions exactement la même connaissance de cette quantité que si sa valeur eût été tirée de la même manière de n répétitions de l'autre observation. Prenons les réciprocaux de m et de n pour mesures des *poids* des deux observations. Ainsi, en désignant par l'unité le poids d'une observation donnée, et en posant $\frac{m}{n} = g$, on aura g pour l'expression du poids d'une autre observation dont n répétitions équivaudraient à m répétitions de la première.

3. La détermination d'une seule inconnue par une observation directe peut évidemment toujours être représentée par la détermination d'un point sur une ligne droite donnée, au moyen de la distance de ce point à un autre point fixe dans la même ligne. Supposons que deux observations, du même poids g, aient donné l'une le point A, et l'autre le point B, pour la position du point P qu'il s'agit de déterminer. Il est évident que l'on doit placer P à un point C également distant de A et de B; car il n'y a point de raison pour qu'on le plaçât plus près de l'un que de l'autre de ces deux points.

4. Le *poids* de cette détermination est $2g$. Je ne donnerai pas en détail la démonstration de cette proposition, qu'on établit aisément au moyen du principe de l'homogénéité, avec la même évidence qu'on peut donner, à priori, dans la Statique ordinaire, au théorème qui affirme que la résultante de deux forces parallèles est égale à leur somme.

5. On pourra donc toujours remplacer les résultats de deux observations du même poids g, par leur moyenne arithmétique; et l'on pourra considérer cette nouvelle valeur de la quantité observée comme résultant d'une seule observation dont le poids est $2g$. Et, réciproquement, on pourra toujours remplacer une seule observation actuelle donnant $x = x_0$, et dont le poids est g, par deux observations imaginaires donnant $x = x_0 + c$, $x = x_0 - c$ respectivement, et dont les poids seraient égaux chacun à $\frac{1}{2}g$, en désignant par c une quantité arbitraire. D'où l'on tirera facilement la conclusion suivante, au moyen d'un raisonnement parfaitement semblable à celui qu'Archimède a employé pour établir la théorie du levier, et qu'il serait inutile de répéter ici; savoir, qu'en désignant par $g_1, g_2, g_3, \ldots$ les poids d'un nombre quelconque d'observations qui aient donné respectivement $x_1, x_2, x_3, \ldots$ pour la valeur d'une inconnue x, on peut toujours remplacer ce système d'observations actuelles par une seule observation imaginaire donnant

$$(1) \qquad x = \frac{g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 + \ldots}{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots},$$

avec un poids égal à $g_1 + g_2 + g_3 + \ldots$.

C'est ce que j'appellerai la valeur *la plus vraisemblable* de x.

6. Maintenant il sera facile de découvrir la loi de la variation des forces provenant des observations. Soit g le poids d'une observation qui ait assigné le point A pour la position d'un point qu'il s'agit de déterminer dans une ligne droite donnée. Si l'on place le point dans une autre position quelconque P, dont la distance à A soit r, la variation de la force f, qui l'attire vers A, s'exprimera évidemment par une équation homogène de la forme

$$\frac{f}{f_1} = \varphi\left(\frac{r}{r_1}\right),$$

dans laquelle f_1 désigne la force à une distance constante r_1. D'ailleurs il est aisé de prouver que, pour une même distance, la force est proportionnelle au poids de l'observation. D'où il suit qu'en choisissant convenablement les unités de force, de poids et de longueur, on peut donner à cette équation la forme suivante

$$f = g \cdot \varphi(r),$$

et il ne reste qu'à déterminer la forme de la fonction $\varphi(r)$.

7. Pour cela, observons que la position d'équilibre du point P, donnée par l'équation (1) du n° 5, serait précisément le centre de gravité des points assignés par les observations individuelles, si l'on attribuait à chacun de ces points une masse proportionnelle au poids de l'observation correspondante. Le problème se réduit donc à trouver la loi d'attraction selon laquelle la position d'équilibre d'un point soumis aux attractions d'un nombre quelconque de points matériels placés dans une ligne droite, se trouverait au centre de gravité de ces points. Or on sait que, pour que cette condition soit satisfaite, quelle que soit la disposition des masses attirantes, il est nécessaire et il suffit que la force soit en raison directe de la distance. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

8. *Soit g le poids d'une observation qui ait donné x_0 pour la valeur de la quantité observée, et soit x une valeur quelconque attribuée à cette quantité; la force provenant de l'observation et tendant à réduire x à la valeur x_0, est proportionnelle au produit $g.(x - x_0)$, et peut s'exprimer par ce produit.*

9. Au moyen de ce théorème, on pourra toujours exprimer les valeurs des forces provenant des observations. Pour exprimer aussi les conditions de leur équilibre, il suffira d'employer le principe des *vitesses virtuelles*, dont on peut établir l'applicabilité par un procédé parfaitement semblable à celui de Lagrange. Je n'en donnerai pas ici les détails; seulement je ferai remarquer que la démonstration de Lagrange repose essentiellement sur les deux idées d'une ligne rigide et d'une ligne parfaitement flexible; idées dont on peut se servir également dans la recherche des propriétés des forces dont il s'agit ici.

10. Soit donc un système de valeurs v, v', v'',... attribuées à des quantités assujetties à des liaisons quelconques; et soient f, f', f'',... les forces qui agissent sur ces quantités; la condition d'équilibre sera

$$f dv + f' dv' + f'' dv'' + \ldots = 0. \tag{2}$$

[On démontrera ce théorème au moyen des considérations indiquées ci-dessus, et d'une construction dans laquelle v, v', v'',... représentent les distances d'un point fixe A dans une ligne droite donnée, à des points P, P′, P″,... dans la même ligne, dont il s'agit de déterminer les positions.]

C'est sur ce théorème, et sur celui du n° 8, qu'est fondée toute la théorie suivante.

II.

11. Il importe de déterminer la relation entre le *poids* et la *précision*. (J'emploie ce dernier terme dans le sens connu.) Pour cela, posons $x = mz$, et désignons par l'unité la précision d'une observation dont le poids soit g, et qui ait donné pour x la valeur x_0. On en déduira pour z la valeur $z_0 = \frac{x_0}{m}$, et la précision de cette détermination de z sera m. Maintenant, si nous attribuons à ces deux quantités des valeurs quelconques x et $z = \frac{x}{m}$, nous savons (n° **8**) que la force qui tend à réduire x à la valeur observée x_0 est $g(x - x_0)$. Soit f la force inconnue qui tend à réduire z à la valeur z_0; si cette force agissait dans un sens contraire, il y aurait équilibre; on aura donc, par le principe des vitesses virtuelles (n° **10**),

$$f dz = g(x - x_0)\, dx,$$

d'où l'on tire aisément

$$f = m^2 g(z - z_0).$$

Or, en comparant ce résultat avec le théorème du n° **8**, on voit que la force f, qui agit sur z, est la même que si la valeur de cette quantité, au lieu d'être *déduite* de la valeur observée de x, eût été déterminée par une *observation directe* dont le poids fût $m^2 g$; de sorte que $m^2 g$ est le poids de la détermination $z = z_0$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Soit g le poids d'une observation dont la précision est l'unité; alors $m^2 g$ sera le poids d'une observation dont la précision est m; ou, en d'autres termes, *le poids varie en raison directe du carré de la précision.*

12. Puisque le risque d'une erreur quelconque e dans une détermination dont la précision est m, est le même que le risque d'une erreur me dans une détermination dont la précision est l'unité, il suit du théorème précédent, qu'en désignant par e^2, e'^2, e''^2,... les carrés des erreurs qu'on a à craindre également dans des déterminations dont les poids sont g, g', g'',..., on aura

$$ge^2 = g'e'^2 = g''e''^2 = \ldots.$$

III.

13. Soit

$$u = \varphi(v, v', v'', \ldots)$$

une fonction donnée des quantités indépendantes v, v', v'',...; et soient g, g', g'',... les poids des observations qui ont donné pour ces quantités les valeurs

$$v = k, \quad v' = k', \quad v'' = k'', \ldots.$$

Alors, tant qu'on ne sait rien de plus, la valeur la plus vraisemblable de u, que nous désignerons par u_0, sera

$$u_0 = \varphi(k, k', k'', \ldots).$$

Mais si, sans aucune nouvelle connaissance sur les valeurs particulières de v, v', v'',..., on était porté, par quelque motif que ce fût, à attribuer à u une valeur quelconque u_1 différente de u_0, il est clair que k, k', k'',... cesseraient alors d'être les valeurs les plus vraisemblables de v, v', v'',..., et que, de tous les systèmes des valeurs de ces quantités qui donneraient $u = u_1$, on devrait choisir celui qui ferait équilibre aux forces provenant des observations.

Or, la condition d'équilibre est (nos **8** et **12**)

$$g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + g''(v''-k'')\,dv'' + \ldots = 0;$$

et puisque les variations de v, v', v'',... sont assujetties à la seule condition $u = u_1$, on aura

$$\frac{du}{dv}dv + \frac{du}{dv'}dv' + \frac{du}{dv''}dv'' + \ldots = 0.$$

En éliminant une des différentielles entre ces deux équations, et en égalant ensuite séparément à zéro les coefficients des autres, on trouvera enfin

$$(3) \qquad \frac{g(v-k)}{\frac{du}{dv}} = \frac{g'(v'-k')}{\frac{du}{dv'}} = \frac{g''(v''-k'')}{\frac{du}{dv''}} = \ldots.$$

Cette formule, jointe à l'équation $u = u_1$, fournira autant d'équations qu'il y a des quantités v, v', v'',... à déterminer; et de cette manière on obtiendra les valeurs les plus vraisemblables que peuvent recevoir ces quantités en même temps que u reçoit la valeur u_1.

14. La formule (3) du dernier numéro, considérée à part, exprime la loi que doivent suivre les variations de v, v', v'',... quand on attribue à u une série de valeurs différentes. Je l'appellerai *la loi de l'équilibre relatif*, puisque, si elle a lieu, les valeurs de v, v', v'',... seront en équilibre entre elles pour chaque valeur de u.

15. Si les quantités v, v', v'',..., au lieu d'être indépendantes, étaient assujetties à des équations de condition quelconques, les conditions de l'équilibre relatif cesseraient d'être exprimées par la formule (3), et seraient données par les équations qu'on obtiendrait en différentiant les équations de condition et l'équation $u = u_1$, et en égalant ensuite séparément à zéro les coefficients des différentielles indépendantes, après avoir éliminé autant que possible d'entre elles.

16. Dans tous les cas, si l'on veut trouver la force provenant des observations et agissant sur u quand on attribue à cette quantité une valeur différente de u_0, soit f la force dont il s'agit; en l'appliquant en sens contraire, on aurait l'équilibre du système; et, par conséquent, en vertu du principe des vitesses virtuelles (nos **8** et **12**),

$$f du = g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + g''(v''-k'')\,dv'' + \ldots.$$

De cette équation, on tirera la valeur de f en substituant pour du la valeur $\frac{du}{dv}dv + \frac{du}{dv'}dv' + \ldots$, et pour dv, dv',... les valeurs qu'on obtient en différentiant les équations de l'équibre relatif, comme on le verra ci-après.

17. Il suit du n° **8**, que si l'expression que l'on obtient ainsi pour f était de la forme

$$f = C(u-u_0),$$

dans laquelle C désigne une constante quelconque, alors C serait le *poids* de la détermination $u = u_0$. En tout autre cas, cette détermination n'aura point de *poids*, selon notre définition de ce terme, à moins que les erreurs possibles des observations ne soient très-petites; en admettant cette supposition, et en désignant par L la limite de l'expression $\frac{f}{u-u_0}$ correspondante à $u = u_0$, on aura, aux quantités du deuxième ordre près,

$$f = L(u-u_0),$$

et, par conséquent, le poids dont il s'agit sera exprimé par L.

IV.

18. Appliquons maintenant à quelques exemples les principes cidessus exposés.

Problème I. *Soit*

$$u = av + a'v' + a''v'' + \ldots$$

une fonction linéaire donnée des quantités indépendantes v, v', v'',..., *et soient, comme auparavant,* k, k', k'',... *les valeurs de ces quantités fournies par des observations dont les poids soient* g, g', g'',.... *Soit, en outre,*

$$u_0 = ak + a'k' + a''k'' + \ldots,$$

ce qui sera la valeur la plus vraisemblable de u. *On demande le poids de la détermination* $u = u_0$.

Solution. Si l'on attribue à u des valeurs quelconques différentes de u_0, les variations de v, v', v'',... devront suivre la loi de l'équilibre relatif, c'est-à-dire (n° **13**),

$$\text{(A)} \qquad \frac{g(v-k)}{a} = \frac{g'(v'-k')}{a'} = \frac{g''(v''-k'')}{a''} = \ldots.$$

Soit f la force qui agit sur u, on a (n° **16**)

$$f\,du = g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + g''(v''-k'')\,dv'' + \ldots.$$

Or on tire aisément de la formule (A),

$$\frac{g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + g''(v''-k'')\,dv'' + \ldots}{a\,dv + a'\,dv' + a''\,dv'' + \ldots} = \frac{a(v-k) + a'(v'-k') + a''(v''-k'') + \ldots}{\dfrac{a^2}{g} + \dfrac{a'^2}{g'} + \dfrac{a''^2}{g''} + \ldots},$$

équation dont le premier membre équivaut évidemment à f, et le numérateur du second à $u - u_0$. On a donc enfin

$$f = \frac{u - u_0}{\dfrac{a^2}{g} + \dfrac{a'^2}{g'} + \dfrac{a''^2}{g''} + \ldots};$$

d'où il suit (n^os **8** et **17**) qu'en désignant par G le poids qu'il s'agit de trouver, on aura

$$\frac{1}{G} = \frac{a^2}{g} + \frac{a'^2}{g'} + \frac{a''^2}{g''} + \ldots.$$

(*Voir* la *Theoria combinationis* de M. Gauss, art. **18**.)

On peut aisément appliquer un procédé semblable au cas dans lequel u désigne une fonction quelconque, en négligeant les petites quantités d'un ordre supérieur au premier. Mais je ne m'arrêterai pas à en donner les détails.

19. Problème II. *Les mêmes choses étant supposées que dans le problème* I, *soit, en outre,*

$$w = bv + b'v' + b''v'' + \ldots$$

une seconde fonction linéaire donnée de v, v', v'',... *dont*

$$w_0 = bk + b'k' + b''k'' + \ldots$$

*soit la valeur la plus vraisemblable. On demande les conditions de l'*indépendance *des deux déterminations* $u = u_0$, $w = w_0$.

Pour comprendre la signification de ce problème, il faut remarquer que si, sans apprendre rien de nouveau sur les valeurs particulières de v, v', v'',..., on était porté, par quelque motif que ce fût, à attribuer à u une valeur différente de u_0, alors w_0 cesserait, en général, d'être la valeur la plus vraisemblable de w. En effet, posons, comme auparavant,

$$\frac{1}{G} = \frac{a^2}{g} + \frac{a'^2}{g'} + \frac{a''^2}{g''} + \ldots.$$

Si l'on attribue à u des valeurs quelconques, les variations de v, v', v'',... devront suivre la loi de l'équilibre relatif (n° **13**), savoir,

$$\frac{g(v-k)}{a} = \frac{g'(v'-k')}{a'} = \frac{g''(v''-k'')}{a''} = \ldots.$$

Or on tire aisément de cette formule la suivante

$$\frac{b(v-k) + b'(v'-k') + \ldots}{\frac{ab}{g} + \frac{a'b'}{g'} + \ldots} = \frac{a(v-k) + a'(v'-k') + \ldots}{\frac{a^2}{g} + \frac{a'^2}{g'} + \ldots},$$

ou, ce qui revient au même,

$$w - w_0 = G\left(\frac{ab}{g} + \frac{a'b'}{g'} + \frac{a''b''}{g''} + \ldots\right)(u - u_0).$$

Cette équation donne la valeur la plus vraisemblable de w, correspondante à une valeur quelconque de u. Et l'on voit que w ne peut pas rester toujours égal à w_0, à moins qu'on n'ait

$$(1)\qquad \frac{ab}{g} + \frac{a'b'}{g'} + \frac{a''b''}{g''} + \ldots = 0,$$

ce qui est la condition nécessaire et suffisante de l'indépendance des deux déterminations.

En supposant égaux les poids g, g', g'',..., on aurait

$$ab + a'b' + a''b'' + \ldots = 0$$

pour la condition cherchée, où l'on voit l'analogie entre cette condition et la perpendicularité géométrique.

Si les fonctions v, w n'étaient pas linéaires, ces conclusions subsisteraient encore pour de *petites* variations. Il faudrait seulement remplacer a, b, a', b',... par les valeurs de $\frac{du}{dv}, \frac{dw}{dv}, \frac{du}{dv'}, \frac{dw}{dv'}$,... correspondantes à $v = k$, $v' = k'$,....

20. Problème III. *Désignons par v, v',..., k, k',..., g, g',... les mêmes choses qu'auparavant; mais supposons que v, v', v'',..., au lieu d'être indépendantes, puissent être liées entre elles par des équations de conditions quelconques. Désignons par n un nombre positif, et soit*

$$(4)\qquad u = [g(v-k)^2 + g'(v'-k')^2 + g''(v''-k'')^2 + \ldots]^n.$$

On demande la force qui agit sur u quand on attribue à cette quantité une valeur quelconque.

Solution. Dans ce cas, l'équation qui exprime l'équilibre de v, v', v'',... pour une valeur particulière quelconque de u, savoir (n° **13**),

$$g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + \ldots = 0,$$

est satisfaite identiquement; puisque, d'après la forme de la fonction u, cette équation résulte immédiatement de la supposition

$$u = \text{constante}.$$

Il s'ensuit donc que tous les systèmes des valeurs de v, v', v'',... qui donnent une même valeur à u (en satisfaisant toujours aux équations de condition données), seront également vraisemblables; et l'on n'aura point de motif pour préférer un de ces systèmes à un autre. On peut les nommer *systèmes de vraisemblance égale*. Maintenant, désignons par f la force qui agit sur u; nous aurons (n° **16**)

$$f\,du = g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + \ldots;$$

et, en remplaçant du par sa valeur tirée de l'équation (4), on trouve

$$\frac{1}{f} = 2nu^{\frac{n-1}{n}}.$$

21. En posant

$$n = 1 \quad \text{ou} \quad u = g(v-k)^2 + g'(v'-k')^2 + \ldots,$$

on a

$$f = \frac{1}{2}.$$

Donc, dans cas, il y a une force constante qui tend à diminuer la valeur de u, tant que cette quantité (qui est essentiellement positive) est différente de zéro. Par conséquent, la valeur la plus vraisemblable de u sera la plus petite que puisse recevoir cette fonction en vertu des équations de condition données, et les valeurs les plus vraisemblables de v, v', v'',... seront celles qui donnent à u cette valeur *minima*. Voilà le principe des moindres carrés. Mais je vais en donner une démonstration plus directe.

V.

22. Problème. *Soient x, y, z,... des variables indépendantes, et V, V', V'',... des fonctions données de ces quantités. Soient K, K', K'',... les valeurs de V, V', V'',... données par des observations dont les poids soient g, g', g'',.... On demande les valeurs les plus vraisemblables de x, y, z,... et le poids de la détermination correspondante d'une fonction quelconque de ces quantités, en supposant que le nombre des fonctions V, V', V'',... soit plus grand que celui des variables x, y, z,....*

Solution. On a (n^{os} **8** et **10**), pour l'équation d'équilibre,

$$g(V-K)\,dV + g'(V'-K')\,dV' + \ldots = 0,$$

laquelle se réduit à

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = 0,$$

si l'on pose

$$\Omega = g\,(V - K)^2 + g'(V' - K')^2 + \ldots.$$

On voit donc que les valeurs cherchées de x, y, z,... doivent être choisies de manière que Ω reçoive la plus petite valeur possible. Or, x, y, z,... étant indépendantes, les équations finales pour les déterminer seront

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz} = 0, \ldots.$$

23. Soient x_0, y_0, z_0,... les valeurs de x, y, z,... tirées de ces équations, et soit Ω_0 la valeur correspondante (c'est-à-dire la valeur *minima*) de Ω.

Or, si l'on attribue à Ω une valeur particulière quelconque plus grande que Ω_0, la condition de l'équilibre relatif de x, y, z,... est satisfaite identiquement, puisque, dans ce cas comme dans le n° **20**, cette condition se réduit à $d\Omega = 0$; donc, x, y, z,... ne seront assujetties à aucune condition outre celle de donner à Ω la valeur particulière dont il s'agit. Soient X, Y, Z,... les forces agissant sur x, y, z,.... On prouvera, précisément comme dans le n° **21**, que la force agissant sur Ω est représentée par $\frac{1}{2}$. Par conséquent, on aura, comme dans les problèmes précédents, en vertu du principe des vitesses virtuelles,

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots;$$

d'où l'on conclut, à cause de l'indépendance de x, y, z,...,

$$X = \frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dx}, \quad Y = \frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dy}, \quad Z = \frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dz}, \ldots.$$

24. Soit u une fonction donnée quelconque de x, y, z,... et u_0 sa valeur plus vraisemblable, c'est-à-dire celle qui correspond à $x = x_0$, $y = y_0$,.... Appelons f la force qui agit sur u quand on attribue à cette quantité une valeur quelconque différente de u_0; nous savons (n° **23**) que la force agissant sur Ω est $\frac{1}{2}$; nous aurons donc, par le principe des vitesses virtuelles,

$$f\,du = \frac{1}{2}\,d\Omega, \tag{5}$$

équation dans laquelle les variables $x, y, z, \ldots$ sont assujetties aux conditions de l'équilibre relatif; c'est-à-dire (n° **13**), puisque X, Y, Z,... sont les forces agissant sur $x, y, z, \ldots$,

$$\frac{\mathrm{X}}{\frac{du}{dx}} = \frac{\mathrm{Y}}{\frac{du}{dy}} = \frac{\mathrm{Z}}{\frac{du}{dz}} = \ldots. \tag{A}$$

Cela posé, la valeur de f sera $\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{du}$, ou, ce qui revient au même,

$$f = (u - u_0)\frac{d\Omega}{d.(u - u_0)^2}, \tag{6}$$

d'où l'on voit (n° **8**) que, dans le cas où $\frac{d\Omega}{d.(u - u_0)^2}$ serait constante (ce qui, en général, n'arrivera pas), la valeur de cette quantité exprimerait le *poids* de l'équation $u = u_0$. En tous cas, on pourra prendre la *limite* de cette expression, ou, ce qui revient au même, la limite de $\frac{\Omega - \Omega_0}{(u - u_0)^2}$, pour représenter le poids dont il s'agit en supposant très-petites les erreurs des observations.

25. Dans le cas où l'expression $\frac{d\Omega}{d.(u - u_0)^2}$ obtient une valeur constante en vertu de la formule (A), n° **24**, soit G cette valeur; nous venons de voir que G exprime le poids de l'équation $u = u_0$. En intégrant l'équation

$$d\Omega = \mathrm{G}\,d.(u - u_0)^2,$$

on trouve

$$\Omega - \Omega_0 = \mathrm{G}(u - u_0)^2, \tag{7}$$

équation qui n'est pas identique, mais qui subsiste en vertu de la formule (A). On voit aisément qu'elle donne le *minimum relatif* de Ω, c'est-à-dire la plus petite valeur que peut recevoir cette fonction en même temps que u reçoit une valeur quelconque donnée; en effet, la formule (A) exprime la coexistence des équations

$$d\Omega = 0, \quad du = 0.$$

Il suit de cette équation (7) que, si l'on ne peut supposer la vraie valeur de Ω plus grande que $\Omega_0 + \varepsilon^2$, alors la vraie valeur de u sera nécessairement comprise entre les limites $u_0 \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{G}}$. (*Theor. comb.*, art. **30**.)

26. Prenons, par exemple, $u = \sqrt{\Omega - \Omega_0}$, alors $u_0 = 0$, les conditions (A) sont satisfaites identiquement, et l'on a

$$\frac{d\Omega}{d.(u - u_0)^2} = 1.$$

D'où il suit (n° **24**) que le poids de l'équation

$$\sqrt{\Omega - \Omega_0} = 0$$

est égal à l'unité. Par conséquent, si l'on sait, soit à priori, soit à posteriori, à l'aide des observations elles-mêmes (comme on le verra dans la suite), que $\pm\,\varepsilon$ est l'erreur à craindre dans une détermination dont le poids est l'unité, la valeur de Ω qu'on a à craindre sera évidemment $\Omega + \varepsilon^2$. Aussi, si l'on désigne par u, u_0, G les mêmes choses que dans le n° **25**, l'erreur à craindre dans la détermination $u = u_0$ sera $\pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{G}}$. (*Voir* le n° **12**.)

27. Puisque l'équation d'équilibre relatif est satisfaite identiquement par la supposition $\Omega =$ contante, il s'ensuit, comme dans le n° **20**, que tous systèmes de valeurs de x, y, z,... qui donnent une même valeur à Ω, sont des systèmes de vraisemblance égale.

28. Dans le cas où il n'y a que trois variables indépendantes x, y, z, on peut donner une illustration géométrique de la théorie que je viens d'exposer. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point dont il s'agit de déterminer la position la plus vraisemblable. Cette position sera le point dont les coordonnées x_0, y_0, z_0 satisfassent aux équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

et à ce point, que je désignerai par O, les forces provenant des observations et agissant sur P se feront équilibre; mais, dans toute autre position, P sera soumis à une force dont les composantes seront X, Y, Z. Si l'on donne à ε une série de valeurs croissantes, l'équation

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2$$

représentera un système de surfaces semblables disposées autour du point O, dont chacune sera une surface de vraisemblance égale. En effet, puisque X, Y, Z sont proportionnelles aux coefficients différentiels partiels de Ω, la force agissant sur P sera toujours normale à la surface sur laquelle ce point est placé; de sorte que, si P était obligé de rester constamment sur une quelconque de ces surfaces, il serait en équilibre en quelque position qu'on le plaçât. En désignant par ε la même chose que dans le n° **26**, on peut représenter le *manque de précision* du résultat, en disant que les observations déterminent, au lieu d'un *point*, l'*espace* inclus par la surface dont l'équation est

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2.$$

VI.

29. Considérons maintenant le cas où les fonctions V, V', V'',... (n° **22**) sont linéaires, auquel se réduisent, comme on le sait, tous ceux qu'on rencontre ordinairement dans la pratique.

Posons

$$\sqrt{g}(V - K) = v, \quad \sqrt{g'}(V' - K') = v', \ldots.$$

Alors, puisqu'une observation de V, dont le poids est g, équivaut (n^{os} **11** et **12**) à une observation de $\sqrt{g}.V$, dont le poids est l'unité, nous pourrons supposer que les équations

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0, \ldots,$$

aient été données par des observations dont chacune a un poids égal à l'unité.

Cela posé, soient

$$\begin{aligned} v &= ax + by + cz + \ldots + k, \\ v' &= a'x + b'y + c'z + \ldots + k', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

nous aurons (n° **22**)

$$\Omega = v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots,$$

puis, en posant $a^2+a'^2+a''^2+\ldots=\sum(a^2)$, etc.,

$$(8)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{X}=\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dx}=\sum(a^2)\,x+\sum(ab)\,y+\sum(ac)\,z+\ldots+\sum(ak),\\ \mathrm{Y}=\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dy}=\sum(ab)\,x+\sum(b^2)\,y+\sum(bc)\,z+\ldots+\sum(bk),\\ \mathrm{Z}=\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dz}=\sum(ac)\,x+\sum(bc)\,y+\sum(c^2)\,z+\ldots+\sum(ck),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et les valeurs les plus vraisemblables x_0, y_0, z_0,... des inconnues seront celles qui satisferont aux équations

$$\mathrm{X}=0,\quad \mathrm{Y}=0,\quad \mathrm{Z}=0,\ldots.$$

30. Supposons qu'on ait déduit des équations (8), par l'élimination ordinaire, les valeurs de x, y, z,... en fonctions linéaires de X, Y, Z,...; il est clair que le terme constant dans la valeur de x doit être x_0, et ainsi pour les autres; de sorte qu'on aurait, en exprimant les coefficients par la notation de M. Gauss,

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l} x=x_0+[\alpha\alpha]\mathrm{X}+[\alpha\beta]\mathrm{Y}+[\alpha\gamma]\mathrm{Z}+\ldots,\\ y=y_0+[\beta\alpha]\mathrm{X}+[\beta\beta]\mathrm{Y}+[\beta\gamma]\mathrm{Z}+\ldots,\\ z=z_0+[\gamma\alpha]\mathrm{X}+[\gamma\beta]\mathrm{Y}+[\gamma\gamma]\mathrm{Z}+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

31. Il est aisé de voir que les poids des équations

$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad z=z_0,\ldots,$$

s'expriment par les réciprocaux des coefficients $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$,....

En effet, si l'on attribue à x une valeur quelconque, la force agissant sur cette quantité est X; et, pour que les autres variables y, z,... soient en équilibre entre elles, il faut qu'on ait

$$\mathrm{Y}=0,\quad \mathrm{Z}=0,\ldots.$$

Or, en vertu de ces conditions, on tirera, de la première des équations (9),

$$\mathrm{X}=\frac{x-x_0}{[\alpha\alpha]};$$

ce qui démontre (n° **8**) que le poids de l'équation $x = x_0$ est $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$. On emploiera un raisonnement semblable pour les autres variables. (*Theor. comb.*, art. **21**.)

32. Les coefficients $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$,... jouissent de plusieurs propriétés remarquables, dont je ne signalerai ici qu'une, qui est nécessaire à la solution du problème du numéro suivant.

Puisque

$$\frac{d\Omega}{dX} = \frac{d\Omega}{dx}\cdot\frac{dx}{dX} + \frac{d\Omega}{dy}\cdot\frac{dy}{dX} + \ldots,$$

en remplaçant dans cette expression les coefficients différentiels par leurs valeurs tirées des n^{os} **23** et **30**, on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dX} = [\alpha\alpha]X + [\beta\alpha]Y + [\gamma\alpha]Z + \ldots,$$

et, semblablement,

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dY} = [\alpha\beta]X + [\beta\beta]Y + [\gamma\beta]Z + \ldots.$$

Or, puisque

$$\frac{d^2\Omega}{dY\,dX} = \frac{d^2\Omega}{dX\,dY},$$

on tire de ces deux équations,

$$[\beta\alpha] = [\alpha\beta].$$

On trouverait de même

$$[\beta\gamma] = [\gamma\beta], \text{ etc.}$$

Donc, en déduisant par l'intégration des expressions de $\frac{d\Omega}{dX}$, $\frac{d\Omega}{dY}$,... la valeur de Ω en fonction de X, Y, Z,..., et en observant que Ω doit se réduire à Ω_0 en même temps que X, Y, Z,... s'évanouissent, on aura

$$\Omega = \Omega_0 + [\alpha\alpha]X^2 + [\beta\beta]Y^2 + [\gamma\gamma]Z^2 + \ldots \\ + 2[\beta\gamma]YZ + 2[\gamma\alpha]ZX + 2[\alpha\beta]XY + \ldots,$$

ce qui est la propriété dont il s'agit.

33. PROBLÈME. *Soit*

$$u = lx + my + nz + \ldots + h$$

une fonction linéaire de $x, y, z, \ldots$ dont la valeur la plus vraisemblable est

$$u_0 = lx_0 + my_0 + nz_0 + \ldots + h.$$

On demande le poids de l'équation $u = u_0$.

Solution. Remplaçons dans l'expression de u les quantités $x, y, z, \ldots$ par leurs valeurs en termes de X, Y, Z,... (n° **30**), et soit

$$u = u_0 + \mathfrak{A}X + \mathfrak{B}Y + \mathfrak{C}Z + \ldots$$

le résultat de cette substitution.

Maintenant, en désignant par f la force qui agit sur u quand on attribue à cette quantité une valeur quelconque, nous aurons, comme auparavant (n° **24**),

$$f\,du = \frac{1}{2}\,d\Omega = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots,$$

et les conditions de l'équilibre relatif seront (n° **13**)

$$\text{(A)} \qquad \frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n} = \ldots,$$

d'où l'on tire

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \ldots = \frac{\mathfrak{A}X + \mathfrak{B}Y + \mathfrak{C}Z + \ldots}{l\mathfrak{A} + m\mathfrak{B} + n\mathfrak{C} + \ldots} = \frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots}{l\,dx + m\,dy + n\,dz + \ldots}$$
$$= \frac{u - u_0}{l\mathfrak{A} + m\mathfrak{B} + n\mathfrak{C} + \ldots} = \frac{1}{2}\frac{d\Omega}{du} = f;$$

donc, en posant

$$\frac{1}{G} = l\mathfrak{A} + m\mathfrak{B} + n\mathfrak{C} + \ldots,$$

on a

$$f = G(u - u_0),$$

et, par conséquent (n° **8**), G est le poids cherché.

On trouve une autre expression pour G par le procédé suivant.

Puisque

$$\frac{1}{f}=\frac{l}{X}=\frac{m}{Y}=\frac{n}{Z}=\ldots,$$

en multipliant par une de ces fractions chaque terme des équations (9) du n° **30**, on trouve

$$x-x_0=f.\{l[\alpha\alpha]+m[\alpha\beta]+n[\alpha\gamma]+\ldots\},$$
$$y-y_0=f.\{l[\alpha\beta]+m[\beta\beta]+n[\gamma\beta]+\ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

puis, en ajoutant ces dernières équations, après les avoir multipliées respectivement par l, m, n,..., on obtient

$$u-u_0=f.\left\{\begin{array}{c} l^2[\alpha\alpha]+m^2[\beta\beta]+n^2[\gamma\gamma]+\ldots \\ +2mn[\beta\gamma]+2nl[\gamma\alpha]\,2lm[\alpha\beta]+\ldots\end{array}\right\},$$

ou

$$f=G(u-u_0),$$

où $\frac{1}{G}$ est l'expression qu'on obtiendrait en écrivant l, m, n,... au lieu de X, Y, Z,... dans la valeur de $\Omega-\Omega_0$ (n° **32**). (*Voir* la *Theor. comb.*, art. **29**.)

34. En intégrant l'équation

$$\frac{1}{2}d\Omega=G(u-u_0)\,du,$$

on a, comme dans le n° **25**,

$$\Omega-\Omega_0=G(u-u_0)^2,$$

équation qui a lieu seulement en vertu de la formule (A). Et en désignant, comme auparavant, par $\pm\varepsilon$ l'erreur à craindre dans une détermination dont le poids soit l'unité, on aura $\pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{G}}$ pour l'erreur à craindre dans l'équation $u=u_0$; expression qui, dans les cas particuliers de

$$u=x,\quad u=y,\quad u=z,\ldots,$$

devient

$$\pm\,\varepsilon\sqrt{[\alpha\alpha]},\quad \pm\,\varepsilon\sqrt{[\beta\beta]},\quad \pm\,\varepsilon\sqrt{[\gamma\gamma]},\ldots$$

En supposant les variables indépendantes réduites à trois, et en les considérant comme les coordonnées rectangulaires d'un point P, on aura, pour les surfaces de vraisemblance égale, un système d'ellipsoïdes semblables dont le centre commun est la position la plus vraisemblable du point P; et l'espace inclus par l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2,$$

représentera le manque de précision de cette détermination.

On peut poursuivre cette illustration dans plusieurs détails intéressants, et même l'étendre au cas général, en suivant l'analogie entre l'équation de l'ellipsoïde et l'équation

$$\Omega = \text{constante},$$

dans laquelle le nombre des variables indépendantes est quelconque. Mais je me contenterai ici de l'avoir seulement indiquée.

Je vais maintenant expliquer la méthode de déduire des observations la valeur de ε^2.

VII.

35. La quantité que nous avons désignée par ε est ce que M. Gauss a appelé *error medius metuendus*. Si l'on connaissait les erreurs actuelles de n déterminations indépendantes, dont chacune aurait un poids égal à l'unité, alors le quotient qu'on obtiendrait en divisant par n la somme des carrés de ces erreurs, représenterait la valeur de ε^2 avec d'autant plus d'exactitude que le nombre n serait plus considérable.

Or je vais démontrer qu'en désignant par σ le nombre des observations ou des fonctions v, v', v'',..., et par τ le nombre des inconnues x, y, z,..., on peut toujours tirer des observations elles-mêmes $\sigma - \tau$ exemples de l'erreur d'une détermination dont le poids est l'unité, et que la somme des carrés de ces erreurs est égale à Ω_0. Donc, on pourra poser

$$\varepsilon^2 = \frac{\Omega_0}{\sigma - \tau}$$

avec d'autant plus de confiance que le nombre $\sigma - \tau$ est plus grand.

36. En effet, soit $l, l', l'', \ldots, l^{(\sigma-1)}$ un système de σ coefficients qui satisfassent aux τ équations

$$\begin{aligned} al + a'l' + a''l'' + \ldots &= 0, \\ bl + b'l' + b''l'' + \ldots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

ou

(10) $$\sum(al) = 0, \quad \sum(bl) = 0, \quad \sum(cl) = 0, \ldots,$$

nous aurons alors identiquement

(11) $$l\nu + l'\nu' + l''\nu'' + \ldots = lk + l'k' + l''k'' + \ldots,$$

ou

$$\sum(l\nu) = \sum(lk).$$

Or les observations donnent

$$\nu = 0, \quad \nu' = 0, \quad \nu'' = 0, \ldots,$$

avec des poids égaux à l'unité; de sorte que la valeur de $\sum(l\nu)$ déduite *immédiatement* [*] des observations est

$$\sum(l\nu) = 0,$$

et le poids de cette détermination est (n° **18**) le réciprocal de $l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots$. Supposons que $l, l', l'', \ldots$ soient assujetties, outre les équations (10), à la condition

$$\sum(l^2) = 1.$$

Nous aurons donc, au moyen de l'équation (11), un exemple actuel de l'erreur e d'une détermination dont le poids est l'unité, savoir,

$$e = \sum(lk).$$

Maintenant, puisque l'élimination des τ quantités $x, y, z, \ldots$ entre

---

[*] C'est-à-dire sans avoir égard aux liaisons qui ont lieu entre $\nu, \nu', \nu'', \ldots$.

les σ équations

$$v = ax + by + cz + \ldots, \quad v' = a'x + b'y + c'z + \ldots,$$

peut fournir, en général, $\sigma - \tau$ équations linéaires essentiellement différentes entre v, v', v'',..., telles que l'équation (11), on pourra trouver $\sigma - \tau$ exemples distincts d'une erreur telle que e. Pour cela, posons

$$\sigma - \tau = i,$$

et soient

$$\begin{array}{llll} l_1, & l'_1, & l''_1, \ldots, & l_1^{(\sigma-1)}, \\ l_2, & l'_2, & l''_2, \ldots, & l_2^{(\sigma-1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_i, & l'_i, & l''_i, \ldots, & l_i^{(\sigma-1)}, \end{array}$$

des coefficients dont chaque système compris dans une ligne horizontale soit assujetti aux τ équations

(12) $$\sum(al) = 0, \quad \sum(bl) = 0, \quad \sum(cl) = 0, \ldots.$$

On aura donc identiquement

$$\sum(l_1 v) = \sum(l_1 k), \quad \sum(l_2 v) = \sum(l_2 k), \ldots, \quad \sum(l_i v) = \sum(l_i k).$$

Or on tire directement des observations

(13) $$\sum(l_1 v) = 0, \quad \sum(l_2 v) = 0, \ldots, \quad \sum(l_i v) = 0;$$

de sorte qu'on a les i erreurs actuelles

$$e_1 = \sum(l_1 k), \quad e_2 = \sum(l_2 k), \ldots, \quad e_i = \sum(l_i k);$$

seulement, afin qu'on puisse se servir de ces exemples pour en déduire l'*erreur moyenne*, il faut choisir les coefficients l_1, etc., de manière que les équations (13) soient des déterminations *indépendantes* (n° **19**), et, de plus, qu'elles aient chacune le même poids. Il faudra donc ajouter aux équations (12) les suivantes, c'est-à-dire les $\frac{i(i-1)}{2}$ équations

(14) $$\sum(l_1 l_2) = 0, \quad \sum(l_1 l_3) = 0, \quad \sum(l_2 l_3) = 0, \ldots,$$

en vertu desquelles (n° **19**) les déterminations (13) seront indépendantes; et, de plus, les i équations

$$(15) \qquad \sum(l_1^2) = 1, \quad \sum(l_2^2) = 1, \ldots, \quad \sum(l_i^2) = 1,$$

en vertu desquelles chacune de ces déterminations aura un poids égal à l'unité.

Il faut observer que le nombre des coefficients l, etc., est σi, tandis que le nombre des équations (12), (14), (15) est $i\left(\sigma - \frac{i-1}{2}\right)$, ce qui ne peut jamais surpasser σi; de sorte qu'on pourra généralement satisfaire à toutes les conditions d'une infinité de manières différentes. Cependant le résultat sera toujours le même, comme nous allons le voir.

37. Posons

$$e_1 = \sum(l_1 k), \quad e_2 = \sum(l_2 k), \ldots, \quad e_i = \sum(l_i k).$$

Ce sont les erreurs actuelles de i déterminations indépendantes dont chacune a un poids égal à l'unité.

Maintenant, puisque v, v', v'',... sont assujetties (n° **36**) aux i équations de condition

$$\sum(l_1 v) = \sum(l_1 k), \quad \sum(l_2 v) = \sum(l_2 k), \ldots, \quad \sum(l_i v) = \sum(l_i k),$$

on peut se servir de ces équations pour trouver la valeur *minima* de Ω ou de $\sum(v^2)$. En effet, en égalant à zéro les différentielles de Ω et de ces i équations, on a

$$\sum(v\,dv) = 0, \quad \sum(l_1\,dv) = 0, \ldots, \quad \sum(l_i\,dv) = 0,$$

équations qu'on peut remplacer par les σ suivantes

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} v &= P_1 l_1 + P_2 l_2 + \ldots + P_i l_i, \\ v' &= P_1 l'_1 + P_2 l'_2 + \ldots + P_i l'_i, \\ v'' &= P_1 l''_1 + P_2 l''_2 + \ldots + P_i l''_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

en désignant par P_1, P_2,..., P_i des multiplicateurs indéterminés. Ajoutons ces équations, après les avoir multipliées, la première par l_1, la deuxième par l'_1, etc.; il résulte

$$\sum (l_1 v) = P_1,$$

d'où l'on tire

$$P_1 = e_1.$$

De même, en multipliant les équations par l_2, l'_2,..., on trouverait

$$P_2 = e_2,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$P_i = e_i.$$

Ainsi les équations (16) deviennent

$$\begin{aligned} v &= e_1 l_1 + e_2 l_2 + \ldots + e_i l_i, \\ v' &= e_1 l'_1 + e_2 l'_2 + \ldots + e_i l_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

lesquelles sont les valeurs de v, v', v'',..., qui donnent à Ω sa valeur *minima* Ω_0. Or, si l'on ajoute leurs carrés en ayant égard aux équations (14), (15), on obtient pour la valeur actuelle de cette *minima*,

$$\Omega_0 = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_i^2.$$

38. Il s'ensuit donc que la valeur moyenne du carré de l'erreur d'une détermination dont le poids est l'unité, est

$$\varepsilon^2 = \frac{\Omega_0}{i} = \frac{\Omega_0}{\sigma - \tau},$$

à en juger par les i exemples e_1, e_2,..., e_i; et puisqu'il n'y en a point d'autres, cette expression fournit la meilleure valeur de ε qu'on puisse obtenir sans d'autres connaissances que celles que fournissent les observations elles-mêmes. Ainsi l'erreur à craindre dans une détermination quelconque dont le poids soit G, sera (n^{os} **26** et **34**) $\pm \sqrt{\frac{\Omega_0}{(\sigma - \tau)G}}$.

39. Ces résultats s'accordent d'une manière remarquable avec ceux qu'a donnés la méthode de M. Gauss. En effet, ce géomètre a démontré (*Theor. comb.*, art. **38**) qu'en désignant par μ^2 la *vraie* valeur de ε^2, c'est-à-dire celle qu'on déduirait d'un nombre infini d'exemples, et par M la valeur *moyenne* qu'on trouverait pour Ω_0, en répétant un nombre infini de fois le système entier des observations, on aurait

$$\mu^2 = \frac{M}{\sigma - \tau}.$$

Mais, puisque la vraie valeur de M est inconnue, on est obligé de se contenter de celle que fournit le système unique actuel des observations. Ainsi la valeur la plus vraisemblable de ε^2 se trouve exprimée, comme ci-dessus, par $\frac{\Omega_0}{\sigma - \tau}$.

40. Je ferai remarquer, en conclusion, qu'on ne peut établir entre $e_1^2, e_2^2, \ldots, e_i^2$ aucune relation différente de celle qu'exprime l'équation

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_i^2 = \Omega_0;$$

de sorte que cette équation fournit le seul moyen que nous possédions d'évaluer, à posteriori, les erreurs des observations.