JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DU HAYS

Des courbes à plusieurs centres, ou de l'imitation des courbes continues par la réunion de divers arcs de cercles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 241-254.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__241_0>

DES COURBES A PLUSIEURS CENTRES,

OU

DE L'IMITATION DES COURBES CONTINUES

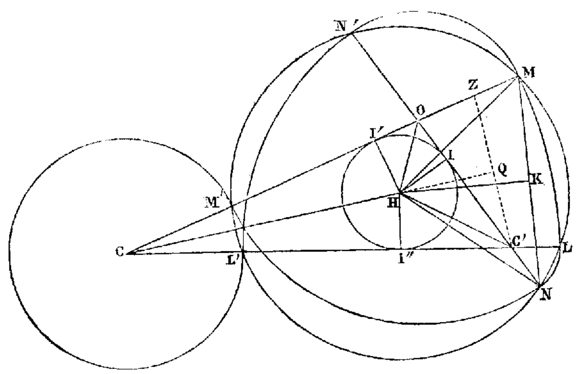
PAR LA RÉUNION DE DIVERS ARCS DE CERCLES;

PAR M. DU HAYS.

Huygens, Camus, Frézier, Perronet, Bossut, Prony, Gauthey, beaucoup d'autres géomètres, et, en dernier lieu, M. Breton, ingénieur des Ponts et Chaussées [*], se sont occupés de l'imitation des courbes continues, par le moyen des courbes à plusieurs centres : aucun ne paraît avoir remarqué le principe sur lequel repose toute la théorie de ce genre de courbes; un exposé sommaire de ce principe ne saurait donc être dépourvu d'utilité.

Toutes les cordes LL', MM', NN', *fig.* 1, comprises entre deux

Fig. 1



cercles concentriques NML' et II'I'', et tangentes au cercle intérieur, sont égales entre elles, et se coupent deux à deux en parties réciproques

[*] *Description des courbes à plusieurs centres*, 1846, in-4°.

quement égales :

$$LC' = NC', \quad L'C' = N'C';$$
$$LC = MC, \quad L'C = M'C;$$
$$MO = N'O, \quad NO' = M'O.$$

Il résulte de cette propriété que, si des points C', O, C, comme centres, quels que soient le nombre et la position des cordes, on décrit des arcs de cercles en prenant les différents segments de cordes pour rayons, ces arcs se réuniront sans *jarrets,* et auront leurs points de jonction sur la circonférence NML' du cercle extérieur; cette circonférence sera donc le *lieu géométrique* des points de jonction de tous les systèmes d'arcs qui peuvent être ainsi décrits.

Or deux normales quelconques MO et NO, appartenant à une même courbe, peuvent toujours être considérées comme les segments de deux cordes comprises entre des cercles concentriques, et si l'on veut remplacer l'arc MN de la courbe par deux arcs de cercles qui aient leurs centres sur ces normales, la partie MN de la circonférence extérieure sera le *lieu géométrique* des points de jonction de tous les arcs qui satisferont à la question. Si donc on choisit, sur le cercle extérieur, un point L pour jonction des deux arcs, et qu'on mène de ce point une tangente LI''C au cercle intérieur, cette tangente déterminera, par son intersection avec les normales, les centres C et C' des arcs de cercles cherchés dont les rayons seront

$$MC = LC \quad \text{et} \quad NC' = LC' \text{ [*]}.$$

On obtiendra le centre H des cercles concentriques, soit en complétant les cordes MM' et NN' de manière que

$$ON' = OM \quad \text{et} \quad OM' = ON,$$

et élevant, sur le milieu de ces cordes, les perpendiculaires IH et I'H;

[*] Connaissant l'un de ces rayons, NC' par exemple, si l'on fait MZ = NC', et qu'on élève la perpendiculaire QC sur le milieu de C'Z, son intersection, avec la normale MO prolongée, déterminera immédiatement le second centre C; mais cette méthode, quelque générale qu'elle soit, n'a pas l'avantage de montrer, comme les cercles concentriques, toutes les solutions dont la question est susceptible.

soit en retranchant MO de NO, et élevant les mêmes perpendiculaires : soit enfin en divisant l'angle NOM' en deux parties égales par la droite HO, et élevant la perpendiculaire KH sur le milieu de la corde MN. Ces quatre droites se couperont au même point H, et IH = I'H et MH = NH seront les rayons des seuls cercles concentriques qui conviennent aux normales données MO et NO. Comme une courbe quelconque peut être divisée, par des normales, en tel nombre de parties que l'on veut, et chacune de ces parties remplacée par deux arcs de cercles, il s'ensuit que la courbe peut toujours être imitée par un nombre d'arcs de cercles réunis illimité.

Pour appliquer le calcul aux courbes à plusieurs centres, on nommera la normale MO, m; la normale NO, n; et l'angle NOM, 2α; et l'on aura la demi-corde

$$NI = MI' = LI'' = \frac{n+m}{2};$$

la tangente

$$IO = I'O = \frac{n-m}{2};$$

les rayons

$$HI = HI' = HI'' = \frac{(n-m)\cot\alpha}{2}$$

et

$$NH = MH = \frac{\sqrt{(n+m)^2 + (n-m)^2\cot^2\alpha}}{2},$$

et l'hypoténuse

$$OH = \frac{n-m}{2\sin\alpha}.$$

Si, de plus, on considère le triangle COC' avec le cercle II'I'' qui y est inscrit, et qu'on nomme les tangentes CI' = CI'', T; et C'I = C'I'', t; les rayons CM = CL, R; et C'L = C'N, r; et la différence des angles OC'C et OCC', 2δ, on aura les tangentes

$$CI' = CI'' = T = \frac{n-m}{2}\cot\alpha\cot\frac{\alpha-\delta}{2},$$

et

$$C'I = C'I'' = t = \frac{n-m}{2}\cot\alpha\cot\frac{\alpha+\delta}{2};$$

les hypoténuses

$$\mathrm{HC} = \frac{(n-m)\cot\alpha}{2\sin\frac{\alpha-\delta}{2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{HC}' = \frac{(n-m)\cot\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}};$$

les côtés

$$\mathrm{CC}' = \mathrm{R} - r = \mathrm{T} + t = \frac{n-m}{2}\left(\cot\frac{\alpha+\delta}{2}\cot\frac{\alpha-\delta}{2} - 1\right),$$

$$\mathrm{CO} = \mathrm{R} - m = \mathrm{T} + \frac{n-m}{2} = \frac{n-m}{2}\left(1 + \cot\alpha\cot\frac{\alpha-\delta}{2}\right),$$

et

$$\mathrm{C'O} = n - r = t + \frac{n-m}{2} = \frac{n-m}{2}\left(1 + \cot\alpha\cot\frac{\alpha+\delta}{2}\right);$$

la corde

$$\mathrm{MN} = \sqrt{(n-m)^2 + 4nm\sin^2\alpha},$$

et la perpendiculaire

$$\mathrm{KH} = \sqrt{nm\cos^2\alpha + \left(\frac{n-m}{2}\right)^2\cot^2\alpha};$$

les rayons

$$\mathrm{MC} = \mathrm{LC} = \mathrm{R} = \frac{n+m}{2} + \mathrm{T} = \frac{n+m}{2} + \frac{n-m}{2}\cot\alpha\cot\frac{\alpha-\delta}{2},$$

et

$$\mathrm{NC}' = \mathrm{LC}' = r = \frac{n+m}{2} - t = \frac{n+m}{2} - \frac{n-m}{2}\cot\alpha\cot\frac{\alpha+\delta}{2};$$

enfin

$$\frac{\mathrm{R}-r}{\sin 2\alpha} = \frac{\mathrm{R}-m}{\sin(\alpha+\delta)} = \frac{n-r}{\sin(\alpha-\delta)},$$

$$\overline{\mathrm{HI}}^2 = \left(\frac{n-m}{2}\right)^2\cot^2\alpha = \frac{\mathrm{T}t\frac{n-m}{2}}{\mathrm{T}+t+\frac{n-m}{2}},$$

d'où

$$\left(\mathrm{T} - \frac{n-m}{2}\cot^2\alpha\right)\left(t - \frac{n-m}{2}\cot^2\alpha\right) = \left(\frac{n-m}{2}\right)^2\left(\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}\right)^2,$$

et

$$\left(\mathrm{R} - m - \frac{n-m}{2\sin^2\alpha}\right)\left(n - r - \frac{n-m}{2\sin^2\alpha}\right) = \left(\frac{n-m}{2}\right)^2\left(\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}\right)^2,$$

formules qui serviront à résoudre tous les cas qui pourront se présenter.

On remarquera encore que les deux angles MON et MHN sont constamment égaux : on peut, par conséquent, faire passer un cercle par les quatre points M, H, O, N, et le rayon de ce cercle est

$$\frac{\overline{\mathrm{HM}}^2}{2\,\mathrm{KH}} = \frac{(n+m)^2 + (n-m)^2 \cot\alpha}{4\sqrt{4nm\cos^2\alpha + (n-m)^2\cot^2\alpha}}.$$

La courbe à plusieurs centres la plus fréquemment employée est celle nommée *anse de panier,* qui représente une demi-ellipse; on appelle courbe à 3, 5, 7, 9, 11, etc. centres l'anse de panier qui est formée par la réunion de 3, 5, 7, 9, 11, etc. arcs de cercles. Il existe une relation constante entre le nombre q d'arcs de cercles qui composent la courbe entière; celui p des centres nécessaires pour décrire l'anse de panier, et celui l des normales à mener dans chaque quart de l'ellipse pour avoir le nombre d'arcs voulu. Cette relation est exprimée par les équations

$$8l + 4 = q \quad \text{et} \quad 4l + 3 = p.$$

Suivant qu'on aura déterminé un plus ou moins grand nombre de normales, la courbe entière se composera de 4, 12, 20, 28, etc. arcs de cercles, et l'anse de panier qui en résultera sera dite à 3, 7, 11, 15, etc. centres. On voit que le nombre des centres forme, dans son accroissement, une progression arithmétique dont la différence est 4; l'imitation de la demi-ellipse ne devrait donc pas donner lieu aux courbes à 5, 9, 13, 17, etc. centres.

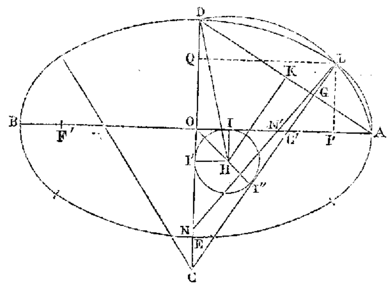
Les valeurs précédemment rapportées s'appliquent à toutes les courbes à plusieurs centres, sans exception : si l'on y joint les données particulières à chaque question, on en déduira avec facilité la solution analytique de toutes celles qui pourront se présenter. On va terminer par quelques applications des principes précédents, choisies parmi les plus simples qui peuvent se présenter.

On n'a pas à considérer ici les conditions physiques, telles que l'élégance des formes, la stabilité des voûtes, la surface du débouché; beaucoup d'auteurs en ont traité de manière à ne rien laisser à désirer : on devra, à cet égard, recourir à leurs ouvrages.

Problème I. *Imiter une ellipse, dont les demi-axes a et b sont donnés, au moyen de quatre arcs de cercles semblables, c'est-à-dire de 90 degrés chacun.*

Dans ce cas, les angles OCC′ et OC′C, *fig.* 2, sont égaux, et le

Fig. 2.



triangle rectangle COC′ est isocèle. On a les normales

$$n = a \quad \text{et} \quad m = b;$$

les angles

$$\alpha = 45^{\circ} \quad \text{et} \quad \delta = 0;$$

$$\cot \alpha = 1, \quad \cot \frac{\alpha}{2} = \cot 22^{\circ} 30' = 1 + \sqrt{2} = 2{,}4142136,$$

et l'on en conclut

$$\mathrm{HI} = \frac{a-b}{2}, \quad \text{et} \quad \mathrm{HD} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};$$

$$\mathrm{R} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cot 22^{\circ} 30' = a + \frac{a-b}{\sqrt{2}},$$

et

$$r = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cot 22^{\circ} 30' = b - \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

Pour l'anse de panier attribuée à Huygens, les données sont les mêmes que dans ce problème, hormis que les deux arcs de petits cercles sont de 120 degrés et les deux autres de 60 degrés chacun, et que $\delta = 15$ degrés: ce qui donne alors

$$\cot \frac{\alpha - \delta}{2} = \cot 15^{\circ} = 2 + \sqrt{3} = 3{,}73205,$$

$$\cot \frac{\alpha + \delta}{2} = \cot 30^{\circ} = \sqrt{3} = 1{,}73205;$$

et

$$R = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cot 15^\circ = \frac{3a - b + (a-b)\sqrt{3}}{2},$$

$$r = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cot 30^\circ = \frac{a + b - (a-b)\sqrt{3}}{2}.$$

Dans les deux exemples, la somme $R + r$ des rayons est constamment égale, dans le premier, à $a + b$ somme des demi-axes, et dans le second, au grand axe $2a$.

PROBLÈME II. *Imiter une ellipse, dont les demi-axes* a *et* b *sont donnés, au moyen de quatre arcs de cercles, tels que les centres et les points de jonction de ces arcs soient sur des perpendiculaires* LC *aux cordes* AD *qui réunissent, dans chaque quart de l'ellipse, les extrémités des axes.*

Bossut démontre, dans ses *Éléments de Géométrie*, que les conditions de ce problème rendent la différence de courbure des arcs de cercles la moins grande qu'il soit possible; en sorte que le passage d'un arc à l'autre ne saurait devenir, dans aucun autre cas, moins sensible à l'œil.

On a encore

$$n = a, \quad m = b, \quad \alpha = 45^\circ;$$

$$\cot \alpha = 1, \quad \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2};$$

$$HI = GK = \frac{a-b}{2}, \quad HD = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad AD = 2\,HK = \sqrt{a^2+b^2};$$

et en considérant les trois triangles rectangles semblables AOD, CGD et AGC′, on obtient

$$DO = b : AD = \sqrt{a^2+b^2} :: DG = \frac{(a-b)+\sqrt{a^2+b^2}}{2} : DC = R,$$

$$AO = a : AD = \sqrt{a^2+b^2} :: AG = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-(a-b)}{2} : AC' = r,$$

d'où l'on conclut

$$R = \frac{a^2 + b^2 + (a-b)\sqrt{a^2+b^2}}{2b}$$

et

$$r = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)\sqrt{a^2+b^2}}{2a}.$$

Problème III. *Imiter une ellipse, dont les demi-axes a et b sont donnés, au moyen de quatre arcs de cercles, tels que les points de jonction* L *de ces arcs tombent, dans chaque quart de la courbe, sur l'ellipse même.*

Il est évident que le point L doit être commun à l'ellipse et au cercle concentrique extérieur, qui est le *lieu géométrique* de tous les points de jonction possibles. L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

celle du cercle concentrique rapporté aux mêmes axes est

$$\left(y + \frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Les valeurs de x et de y, coordonnées du point d'intersection L, sont déterminées par ces deux équations, et elles doivent dépendre chacune d'une équation du quatrième degré, puisqu'un cercle peut couper une ellipse en quatre points différents. Mais on connaît deux de ces points, A et D, pour lesquels on a

$$x = a,\quad y = 0,\quad \text{et}\quad x = 0,\quad y = b;$$

on sait donc d'avance que les équations auxquelles on parviendra seront divisibles par

$$(x-0)(x-a) = x^2 - ax,$$

ou par

$$(y-0)(y-b) = y^2 - by,$$

et qu'elles seront, par conséquent, réductibles au second degré. En effet, ces équations se réduisent à

$$(a+b)^2x^2 - a(a^2-b^2)x - 2a^3b = 0$$

et

$$(a+b)^2y^2 + b(a^2-b^2)y - 2ab^3 = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a}{2(a+b)}\left[(a-b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}\right]$$

et

$$y = \frac{b}{2(a+b)} \left\{ -(a-b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4ab} \right\}.$$

Les triangles rectangles LQC et LPC′ donnent

$$R^2 = x^2 + (R - b + y)^2$$

et

$$r^2 = y^2 + (r - a + x)^2.$$

D'où l'on conclut, en substituant et réduisant,

$$R = \frac{(a+b)^2 \pm (a-b)\sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}{4b}$$

et

$$r = \frac{(a+b)^2 \mp (a-b)\sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}{4a}.$$

Dans ces expressions, les signes supérieurs sont les seuls qui répondent à la question; les signes inférieurs se rapportent au quatrième point d'intersection de l'ellipse et du cercle qui lui est étranger.

Les arcs de cercles qui composeront la courbe ont chacun trois points communs avec l'ellipse; ils en auraient quatre, et, par conséquent, s'en écarteraient moins encore si, au lieu de lui être tangents aux extrémités des axes, ils la coupaient entre ces extrémités et les points de jonction. Seulement alors les axes de la courbe obtenue ne seraient plus égaux à ceux de l'ellipse; le grand axe serait moindre que celui de l'ellipse, et le petit axe serait un peu plus grand. On aurait la limite dans laquelle peuvent être placés les centres C et C′ pour satisfaire à cette condition, en menant par le point L une normale LN à l'ellipse; tous les rayons compris dans l'angle CLN jouiraient de la propriété demandée. Pour calculer l'étendue de cette limite, on sait que, dans l'ellipse, la sous-normale

$$PN' = \frac{b^2}{a^2}\, x;$$

donc la distance N′A du pied de la normale à l'extrémité du grand axe est

$$a - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\, x,$$

et la différence C′N′, de cette quantité au rayon $C'A = r$, est

$$a - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x - r = \frac{a-b}{4a}\left[a + 3b - \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}\,\right] = r - \frac{b^2}{a}.$$

On trouve de même que la différence CN est

$$R - b - \frac{a^2 - b^2}{b^2}y = \frac{a-b}{4b}\left[3a + b - \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}\,\right] = \frac{a^2}{b} - R.$$

Ces différences sont essentiellement positives, et il est fort remarquable que les termes $\frac{a^2}{b}$ et $\frac{b^2}{a}$ expriment les rayons de courbures extrêmes de l'ellipse.

Problème IV. *Imiter une ellipse, dont les demi-axes a et b sont donnés, au moyen de quatre arcs de cercles, tels que leurs rayons R et r soient entre eux dans le rapport des rayons de courbures extrêmes de l'ellipse, c'est-à-dire* $:: a^3 : b^3$.

On a toujours l'angle $\alpha = 45°$, pour lequel

$$\cot\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Substituant ces valeurs dans la dernière équation générale trouvée ci-dessus, cette équation devient

$$(R - a)(b - r) = \frac{(a-b)^2}{2}.$$

On a de plus

$$b^3 R = a^3 r;$$

d'où l'on conclut

$$R = \frac{a}{2b^2}\left[(a^2 + b^2) \pm (a-b)\sqrt{a^2+b^2}\,\right]$$

et

$$r = \frac{b}{2a^2}\left[(a^2 + b^2) \pm (a-b)\sqrt{a^2+b^2}\,\right].$$

La différence des rayons que donnent les conditions de ce problème est en général trop grande, et les courbes qu'elles produisent sont d'une forme peu gracieuse.

Problème V. *Imiter une ellipse, dont les demi-axes a et b sont* *donnés, en partageant chacun des quarts symétriques de la courbe par une normale* MT, fig. 3, *qui coupe les deux axes sous des angles*

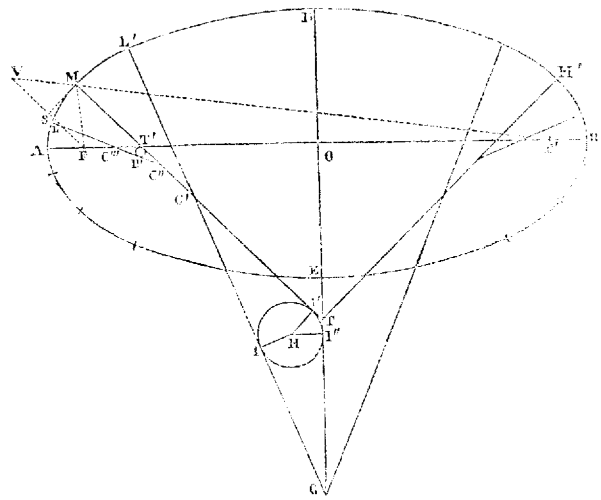


Fig. 3.

égaux, et en remplaçant chaque section du quart de la courbe par deux arcs de cercles semblables, c'est-à-dire de 22° 30′ *chacun.*

Les équations

$$8l + 4 = q \quad \text{et} \quad 4l + 3 = p,$$

dans lesquelles $l = 1$, donnent

$$q = 12 \quad \text{et} \quad p = 7;$$

la courbe demandée se composera donc de douze arcs de cercles, et sera du genre de celles dites à sept centres.

Ayant formé, à l'un des foyers F, un angle AFV de 45 degrés, c'est-à-dire égal à celui que la normale doit faire avec les axes, et ayant pris, à partir de l'autre foyer, une droite

$$\text{VF}' = \text{AB} = 2a,$$

qui rencontre en V la droite FV, si l'on élève sur le milieu de VF la perpendiculaire SM, et qu'on divise l'angle FMF′ en deux parties égales, le point M appartiendra à l'ellipse, et la droite MT sera la normale cherchée, puisqu'elle est parallèle à FV et que

$$\text{FM} + \text{MF}' = 2a.$$

Par les méthodes précédemment indiquées, on trouvera les centres H et H′ des cercles concentriques convenables à chacun des angles AT′M et MTD; on mènera les tangentes CIL′ et C″H′L, de manière à ce qu'elles fassent, avec la normale MT, des angles égaux α de $22^\circ 30'$ chacun; les intersections C, C′, C″ et C‴ seront évidemment les centres des arcs cherchés dont les rayons seront AC‴, LC″, MC′ et L′C = DC.

Pour appliquer le calcul à cette construction, nommant n' et m' les normales qui forment l'angle AT′M, n'' et m'' celles qui forment l'angle MTD, R′ et r', R″ et r'' les rayons cherchés correspondants, s la sous-normale de l'ellipse, dont la valeur est $\frac{b^2}{a^2}x$; on aura

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad y = s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\text{AT}' = n' = a - \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \text{MT}' = m' = \frac{b^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\text{MT} = n'' = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \text{DT} = b + \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

et en substituant ces valeurs dans les expressions générales rapportées plus haut, on en déduira les valeurs de R′ et r', R″ et r'', et toutes les autres circonstances du problème qu'il faudra connaître.

Il est toujours facile de calculer, par les procédés trigonométriques ordinaires, la longueur des rayons des arcs cherchés, et par conséquent de résoudre analytiquement tous les problèmes du même genre, quelque compliqués qu'ils soient; il serait donc superflu de donner de plus grands développements à une théorie qui ne saurait offrir aucune difficulté dans son application.

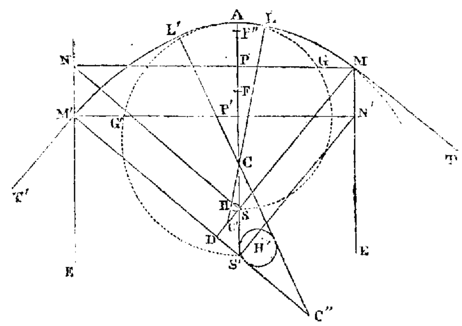
On aperçoit aisément que le polygone C, C′, C″, C‴, A, quel que soit le nombre des centres employés et le système de courbe adopté, est toujours égal au plus grand rayon CD, et que si le nombre des centres était infini, ce polygone deviendrait la *développante* de la courbe tracée.

Ce n'est pas seulement à l'imitation de l'ellipse que s'applique la théorie qu'on vient d'exposer; elle convient également, et s'applique avec la même facilité, à toute autre espèce de courbes, ce qui n'a pas lieu pour les procédés employés jusqu'à ce jour. Ainsi, par exemple, la parabole est souvent employée dans les raccordements des routes sinueuses [*]; il serait fréquemment commode de la remplacer par des arcs de cercles, et sans rien changer aux formules générales qui ont

[*] On pourrait, dans ce genre, se proposer le problème suivant :

Deux droites MT *et* M′T′, fig. 4, *étant données, réunir leurs extrémités* M *et* M′ *par*

Fig. 4.



une courbe à trois centres, imitant une parabole dont l'axe soit dans la direction des parallèles ME, M′E′.

Élevant, par les points M et M′, des perpendiculaires MD et M′D aux droites données, ainsi que d'autres perpendiculaires MN et M′N′ aux parallèles ME, M′E′; celles-ci se confondront avec les ordonnées de la parabole aux points M et M′, et les premières avec les normales. La sous-normale s, dans la parabole dont l'équation est

$$y^2 = 2ax,$$

est constamment égale au demi-paramètre a. Il en résulte que, si l'on mène NS et N′S′ parallèlement à MD et à M′D, et que si, par les intersections S et S′, on abaisse, sur MN et M′N′, la perpendiculaire AS′, cette perpendiculaire sera l'axe de la parabole à imiter, et MP et M′P′ seront des ordonnées, puisque PS = P′S′ sont des sous-normales $s = a$.

Maintenant, que, sur l'axe AS′, on décrive une demi-circonférence qui passe, soit par les points S et G, soit par les points S′ et G′; G et G′ étant tels que

$$\mathrm{PG} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{PM} \quad \text{et} \quad \mathrm{P'G'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{P'M'},$$

on obtiendra, par sa rencontre avec l'axe AS′, le point A qui est le sommet de la courbe, puisqu'on a aussi

$$\mathrm{AP} \quad \text{ou} \quad \mathrm{AP'} = x = \frac{y^2}{2a}.$$

On tracera, comme précédemment, les cercles concentriques H et ALM, H′ et AL′M′, été données, cette théorie en fournit les moyens. Il en est de même pour toutes les occasions où les arts mécaniques ont à faire usage de courbes qui n'exigent pas une précision rigoureuse, précision qui serait d'ailleurs presque toujours difficile à atteindre.

---

qui conviennent aux normales AS et MS, AS′ et M′S′; et par un point C, pris sur l'axe de manière que sa distance P″C à l'ordonnée moyenne entre celles des points L et L′, soit à peu près égale à $s = a$, on mènera les tangentes LC′ et L′C″ aux cercles intérieurs H et H′; elles détermineront, par leurs intersections avec les normales AS′, MD et M′C″, les trois centres C, C′ et C″ des arcs de cercles qui composeront la courbe cherchée.

En prenant

$$\mathrm{AF} = \frac{1}{2}\,\mathrm{PS} = \frac{1}{2}\,\mathrm{P'S'} = \frac{1}{2}\,s = \frac{1}{2}\,a,$$

on a le foyer F de la parabole; et si l'on voulait imiter la courbe avec plus de précision, on pourrait diviser la petite branche AM par une et la grande branche AM′ par deux normales; alors l'imitation se composerait de neuf arcs de cercles réunis qui s'écarteraient très-peu de la véritable parabole, et les équations qui se rapportent à la parabole étant plus simples que celles de l'ellipse, on appliquerait le calcul à ce tracé avec plus de facilité encore qu'à celui des anses de panier.