JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Sur l'intégrale définie double $\int_b^c \int_o^b \frac{\log(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 238-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__238_0>

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE DOUBLE

$$\int_b^c \int_0^b \frac{\log(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}};$$

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Cette intégrale mérite d'être remarquée à cause de l'analogie qu'elle offre, en quelque sorte, avec une intégrale bien connue qui a été évaluée par M. Lamé (tome II de ce Journal, page 167). Elle peut s'exprimer assez simplement par des fonctions elliptiques complètes de première espèce, à modules complémentaires, comme je vais le montrer dans ce qui suit.

Pour le faire voir, il suffira de nous rappeler une formule que j'ai déjà donnée, et qui se trouve à la fin d'une Note insérée au tome XII de ce Journal, page 449. La voici :

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log[1-(1-k'^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi]\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\ &= \frac{1}{3}\log\left(\frac{4k'^2}{k}\right)\mathrm{KK'} - \frac{1}{6}\pi(\mathrm{K}^2+\mathrm{K'}^2), \end{aligned}\right.$$

où K, K′ désignent respectivement les fonctions complètes

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

dans lesquelles les modules k, k' sont complémentaires.

Maintenant, posons

$$k^2 = \frac{b^2}{c^2}, \quad k'^2 = \frac{c^2-b^2}{c^2},$$

et faisons

$$\mu^2 = \frac{b^2}{1 - \frac{c^2 - b^2}{c^2}\sin^2\theta}, \quad \nu = b\sin\varphi,$$

ce qui nous donnera

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}} = \frac{c\,d\mu}{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}},$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{c\,d\nu}{\sqrt{(c^2 - \nu^2)(b^2 - \nu^2)}},$$

en sorte que l'intégrale, premier membre de l'équation (α), se trouvera transformée dans cette autre

$$c^2\int_b^c\int_0^b \frac{\log\left(\frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2}\right)d\mu\,d\nu}{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \nu^2)}},$$

ou bien encore

$$c^2\int_b^c\int_0^b \frac{\log(\mu^2 - \nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \nu^2)}}$$
$$- c^2\int_b^c \frac{\log\mu^2\,d\mu}{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}}\cdot\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{(c^2 - \nu^2)(b^2 - \nu^2)}}.$$

Mais il est évident que

$$\int_b^c \frac{\log\mu^2\,d\mu}{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}} = \frac{2\log b}{c}\,\mathrm{K}' - \frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k'^2\sin^2\theta)\,d\theta}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}},$$

et l'on sait (tome XI de ce Journal, page 197) que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k'^2\sin^2\theta)\,d\theta}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}} = \mathrm{K}'\log k$$

ce qui donne

$$\int_b^c \frac{\log\mu^2\,d\mu}{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}} = \frac{1}{c}\,\mathrm{K}'\log(bc),$$

en sorte que l'intégrale qui figure dans la formule (α) pourra s'écrire de la manière suivante :

$$c^2 \int_b^c \int_0^b \frac{\log(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \nu^2)}} - \mathrm{KK}' \log(bc),$$

d'où, en ayant égard à la formule (α), et en se rappelant que

$$\frac{k'^2}{k} = \frac{c^2 - b^2}{bc},$$

on déduira finalement

$$\int_b^c \int_0^b \frac{\log(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \nu^2)}}$$
$$= \frac{1}{3c^2} \mathrm{KK}' \log[4 b^2 c^2 (c^2 - b^2)] - \frac{\pi}{6c^2}(\mathrm{K}^2 + \mathrm{K}'^2).$$

Dublin, le 11 février 1850.