JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Suite du Mémoire sur les applications du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ |★|

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 215-237.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__215_0>

Suite du Mémoire sur les applications du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ [*];

PAR M. V.-A. LEBESGUE,

Membre correspondant de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

V.

Sommes alternées des racines primitives de quelques équations binômes.

Les racines primitives de l'équation binôme $x^p = 1$ sont celles x qui jouissent de cette propriété que $x^m = 1$ ne peut être satisfaite par $m < p$. Cela arrive toujours en posant

$$x = \cos\frac{2\pi}{p} + \sin\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}.$$

C'est cette valeur qu'il faudra supposer à x dans les formules qui suivront.

On reconnaît facilement que si n est premier à p, x^n sera une racine primitive; au contraire, si n n'est pas premier à p, x^n n'est pas racine primitive. Il y a donc $\varphi(p)$ racines primitives, en représentant par $\varphi(p)$ combien il y a de nombres premiers à p et compris de 1 à p.

Pour p premier, les racines primitives, en nombre $p-1$, se distribuent en deux groupes: celles x^n qui donnent $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$, forment le premier groupe; celles x^n qui donnent $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$, forment le second. On peut admettre la même classification pour p impair et égal au produit de nombres premiers différents $a, b, c, \ldots$, c'est-à-dire pour

$$\text{P} = abc\ldots.$$

[*] Voyez le tome XII de ce Journal, page 497.

Soient donc

$$x^{\mathrm{P}} = 1, \quad \mathrm{P} = abc\ldots,$$

on posera

$$n \equiv \mathrm{A}\cdot\frac{\mathrm{P}}{a}\alpha + \mathrm{B}\cdot\frac{\mathrm{P}}{b}\beta + \ldots \quad (\text{mod. P}),$$

sous les conditions

$\mathrm{A}\cdot\frac{\mathrm{P}}{a} \equiv 1$ (mod. a), $\quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, a-1$, $\quad$ et autres semblables;

d'où il résulte que n, divisé par $a, b, c, \ldots$, donne les restes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; de sorte que l'on a

$$\left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right) = \left(\frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\beta}{b}\right)\left(\frac{\gamma}{c}\right)\cdots.$$

De là on voit tout de suite que

$$\sum\left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right)x^{mn} = \sum\left(\frac{\alpha}{a}\right)x^{\mathrm{A}\frac{\mathrm{P}}{a}m\alpha}\sum\left(\frac{\beta}{b}\right)x^{\mathrm{B}\frac{\mathrm{P}}{b}m\beta}\ldots;$$

et comme

$$x = \cos\frac{2\pi}{\mathrm{P}} + \sin\frac{2\pi}{\mathrm{P}}\sqrt{-1}$$

donne

$$x^{\frac{\mathrm{P}}{a}} = \cos\frac{2\pi}{a} + \sin\frac{2\pi}{a}\sqrt{-1} = x_1, \quad \text{d'où} \quad x_1^a = 1,$$

et

$$x^{\frac{\mathrm{P}}{b}} = \cos\frac{2\pi}{b} + \sin\frac{2\pi}{b}\sqrt{-1} = x_2, \quad \text{d'où} \quad x_2^b = 1,$$

et ainsi de suite, on aura

$$\sum\left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right)x^{mn} = \sum\left(\frac{\alpha}{a}\right)x_1^{m\mathrm{A}\alpha}\sum\left(\frac{\beta}{b}\right)x_2^{m\mathrm{B}\beta}.$$

Mais, comme l'on a

$$\sum\left(\frac{\alpha}{a}\right)x_1^{\alpha} = i^{\frac{a-1}{2}}\sqrt{a}, \quad \sum\left(\frac{\alpha}{a}\right)x_2^{\alpha m\mathrm{A}} = \left(\frac{m\mathrm{A}}{a}\right)i^{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}\sqrt{a},$$

un calcul tout semblable à celui du § IV donnera

$$(a) \qquad \sum\left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right)x^{mn} = \left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)i^{\left(\frac{\mathrm{P}-1}{2}\right)^2}\sqrt{\mathrm{P}}.$$

il faut remarquer que cette quantité serait nulle si l'on avait m non premier à P, car un des facteurs de la somme serait nul.

Pour l'équation $x^{4P} = 1$, où $P = abc\ldots$ est le produit de nombres premiers différents, les racines primitives sont données par l'expression x^m où m est un nombre impair premier à $4P$ et plus petit. Quant à x, c'est, selon la convention,

$$x = \cos\frac{2\pi}{4P} + \sin\frac{2\pi}{4P}\sqrt{-1}.$$

Si l'on partageait les racines primitives en deux groupes déterminés par les relations

$$\left(\frac{m}{P}\right) = +1 \text{ pour le premier groupe,}$$

$$\left(\frac{m}{P}\right) = -1 \text{ pour le second,}$$

on verrait que, dans la somme

$$\sum \left(\frac{m}{P}\right) x^m,$$

tous les termes où $\left(\frac{m}{P}\right) = +1$ se détruiraient entre eux, parce que, x^m et x^{m+2P} appartenant au même groupe, on aurait, à cause de $x^{2P} = -1$,

$$x^m + x^{m+2P} = 0.$$

Pour déterminer les deux groupes de racines primitives x^m, on prendra donc

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{p}\right) = +1 \text{ pour le premier groupe,}$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right) = -1 \text{ pour le second.}$$

On reconnaît alors que x^m et x^{m+2P} appartiennent à des groupes différents, de sorte que les termes d'un même groupe ne se détruisent plus entre eux.

Dans ce cas, on posera

$$n \equiv P\lambda + 4A\frac{P}{a}\alpha + 4B\frac{P}{q}\beta + \ldots \pmod{4P},$$

sous les conditions

$\lambda = 1, 3, \quad 4P\frac{P}{a} \equiv 1 \pmod{a}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, a-1,$ et ainsi des autres.

Un calcul tout semblable à celui du premier cas donne

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{mn} = \sum (-1)^{\frac{P\lambda - 1}{2}} x^{P\lambda m} \sum \left(\frac{\alpha}{a}\right) x^{4A\frac{P}{a}m\alpha} \ldots;$$

le premier facteur du second membre, en y faisant $\lambda = 1$, $\lambda = 3$, devient

$$(-1)^{\frac{P-1}{2}} \left(\sin m\frac{\pi}{2} - \sin 3m\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{-1} = 2(-1)^{\frac{P-1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{-1},$$

et, comme tous les autres facteurs donnent le produit

$$\left(\frac{m}{P}\right) i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \sqrt{P},$$

en remplaçant $(-1)^{\frac{P-1}{2}} i$ par $i^{2\left(\frac{P-1}{2}\right)+1}$, on aura

$$(b) \qquad \sum (-1)^{\frac{m-1}{2}} x^{mn} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2} \sqrt{4P}.$$

Le second membre devient encore nul quand m n'est pas premier à P.

Pour l'équation $x^{8P} = 1$, $P = abc\ldots$, $a, b, c, \ldots$ premiers et différents, les racines primitives x^m ne peuvent être partagées en deux groupes ni au moyen du symbole $\left(\frac{m}{P}\right)$, ni au moyen de celui-ci $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)$, car on verrait dans chaque groupe les termes se détruire deux à deux. On fera

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right) = 1 \qquad \text{pour le premier groupe,}$$

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right) = -1 \quad \text{pour le second,}$$

ou bien encore

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)=1 \qquad \text{pour le premier groupe,}$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)=-1 \quad \text{pour le second.}$$

Dans ces deux cas, on posera

$$n\equiv \mathrm{P}\lambda+8\mathrm{A}\frac{\mathrm{P}}{a}\alpha+8\mathrm{B}\frac{\mathrm{P}}{b}\beta+\ldots \quad (\text{mod. } 8\mathrm{P}),$$

sous les conditions

$$\lambda=1,3,5,7,\quad 8\mathrm{A}\frac{\mathrm{P}}{a}\equiv 1 \ (\text{mod. } a),\quad \alpha=1,2,3,\ldots,a-1,\quad \text{et ainsi des autres,}$$

et l'on trouvera, dans les deux cas,

$$\sum(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)x^{mn}$$
$$=\sum(-1)^{\frac{(\mathrm{P}\lambda)^2-1}{8}}x^{\mathrm{P}\lambda m}\sum\left(\frac{\alpha}{a}\right)x^{8\mathrm{A}\frac{\mathrm{P}}{a}m\alpha}\ldots,$$

$$\sum(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)x^{mn}$$
$$=\sum(-1)^{\frac{\mathrm{P}\lambda-1}{2}+\frac{(\mathrm{P}\lambda)^2-1}{8}}x^{\mathrm{P}\lambda m}\sum\left(\frac{\alpha}{a}\right)x^{8\mathrm{A}\frac{\mathrm{P}}{a}m\alpha}\ldots:$$

et comme l'on a

$$x=\cos\frac{2\pi}{8\mathrm{P}}+\sin\frac{2\pi}{8\mathrm{P}}\sqrt{-1},$$

d'où

$$x^{\mathrm{P}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}.$$

La substitution des valeurs de λ donnera, pour le premier facteur,

$$\sum(-1)^{\frac{(\mathrm{P}\lambda)^2-1}{8}}x^{\mathrm{P}\lambda m}$$
$$=(-1)^{\frac{\mathrm{P}^2-1}{8}}\sum(-1)^{\frac{\lambda^2-1}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\lambda m+\sin\frac{\pi}{4}\lambda m\sqrt{-1}\right)$$
$$=2(-1)^{\frac{\mathrm{P}^2-1}{8}}\left(\cos m\frac{\pi}{4}-\cos 3m\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=4(-1)^{\frac{\mathrm{P}^2-1}{8}}\sin m\frac{\pi}{2}\sin m\frac{\pi}{4},$$

et de même

$$\begin{aligned}
&\sum(-1)^{\frac{P\lambda-1}{2}+\frac{(P\lambda)^2-1}{8}}x^{P\lambda m}\\
&=(-1)^{\frac{P-1}{2}+\frac{P^2-1}{8}}\left[(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\frac{\lambda^2-1}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\lambda m+\sin\frac{\pi}{4}\lambda m\sqrt{-1}\right)\right]\\
&=2(-1)^{\frac{P-1}{2}+\frac{P^2-1}{8}}\left(\sin m\frac{\pi}{4}+\sin 3m\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{-1}\\
&=4(-1)^{\frac{P-1}{2}+\frac{P^2-1}{8}}\sin m\frac{\pi}{2}\cos m\frac{\pi}{4}\sqrt{-1};
\end{aligned}$$

mais

$$\sin m\frac{\pi}{2}=(-1)^{\frac{m-1}{2}},\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin m\frac{\pi}{4}=(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos m\frac{\pi}{4}=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'ailleurs le produit des autres facteurs donne, à cause de $8=2.4$ et $\left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}},\ldots,$

$$(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)i^{\left(\frac{P-1}{8}\right)}\sqrt{P};$$

de là, pour produits définitifs,

$$(c)\qquad \sum(-1)^{\frac{m^2-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)x^{mn}=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)i^{\left(\frac{P-1}{8}\right)^2}\sqrt{8P},$$

$$(d)\quad \sum(-1)^{\frac{m-1}{1}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)x^{mn}=(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}\sqrt{8P}.$$

Si l'on convient de représenter par p les nombres P, 4P, 8P, 8P, selon les cas et de remplacer les symboles

$$\left(\frac{m}{P}\right),\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right),\quad (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right),\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right),$$

par le symbole unique $\left[\frac{m}{p}\right]$, suivant les cas, on aura plus simplement

$$(a')\quad\begin{cases}\sum\left[\frac{m}{p}\right]x^{mn}=\left[\frac{m}{p}\right]i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}, & \text{premier et troisième cas,}\\[2ex] \sum\left[\frac{m}{p}\right]x^{mn}=\left[\frac{m}{p}\right]i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}\sqrt{p}, & \text{deuxième et quatrième cas.}\end{cases}$$

Ces sommes sont nulles pour m non premier à P.

Dans ces formules on peut distinguer deux cas, selon que $i=\sqrt{-1}$ reste ou disparaît :

1°. $P=4Q+1$, $4Q-1$, $4Q+1$, $4Q-1$, i disparaît ;

2°. $P=4Q-1$, $4Q+1$, $4Q-1$, $4Q+1$, i reste à la première puissance.

Or, si l'on appelle A les nombres qui donnent $\left[\frac{A}{p}\right]=1$ et B ceux qui donnent $\left[\frac{B}{p}\right]=-1$, le premier membre des équations (a') étant

$$\sum\cos Am\frac{2\pi}{p}-\sum\cos Bm\frac{2\pi}{p}+\left(\sum\sin Am\frac{2\pi}{p}-\sum\sin Bm\frac{2\pi}{p}\right)\sqrt{-1},$$

on aura, pour les cas où i disparaît,

$$(a'')\qquad\left\{\begin{aligned}&\sum\cos Am\frac{2\pi}{p}-\sum\cos Bm\frac{2\pi}{p}=\left[\frac{m}{p}\right]\sqrt{p},\\&\sum\sin Am\frac{2\pi}{p}-\sum\sin Bm\frac{2\pi}{p}=0,\end{aligned}\right.$$

et, pour les cas où i reste à la première puissance,

$$(b'')\qquad\left\{\begin{aligned}&\sum\cos Am\frac{2\pi}{p}-\sum\cos Bm\frac{2\pi}{p}=0,\\&\sum\sin Am\frac{2\pi}{p}-\sum\sin Bm\frac{2\pi}{p}=\left[\frac{m}{p}\right]\sqrt{p}.\end{aligned}\right.$$

Rien ne serait plus facile que d'obtenir les sommes

$$\sum\cos Am\frac{2\pi}{p},\quad\sum\cos Bm\frac{2\pi}{p},\quad\sum\sin Am\frac{2\pi}{p},\quad\sum\sin Bm\frac{2\pi}{p},$$

car l'équation connue aux racines primitives a pour coefficient du second terme, pris en signe contraire,

$$\sum\cos Am\frac{2\pi}{p}+\sum\cos Bm\frac{2\pi}{p}+\left(\sum\sin Am\frac{2\pi}{p}+\sum\sin Bm\frac{2\pi}{p}\right)\sqrt{-1};$$

on a donc toujours

$$\sum\sin Am\frac{2\pi}{p}+\sum\sin Bm\frac{2\pi}{p}=0.$$

Pour les trois derniers cas $(4P,\ 8P)$, le coefficient du second terme est nul, car, comme on l'a vu, les racines se détruisent deux à deux; on a donc

$$\sum \cos \mathrm{A} m \frac{2\pi}{p} + \sum \cos \mathrm{B} m \frac{2\pi}{p} = 0.$$

Mais, pour le premier cas, ce coefficient, pris en signe contraire, est ± 1, selon que les facteurs a, b, c,... sont en nombre pair ou impair (*voyez* le tome IV des *Anciens Exercices* de M. Cauchy); ainsi

$$\sum \cos \mathrm{A} m \frac{2\pi}{p} + \sum \cos \mathrm{B} m \frac{2\pi}{p} = \pm 1.$$

On a donc tout ce qu'il faut pour obtenir les quatre sommes.

Les formules précédentes se trouvent dans la seconde partie du Mémoire de M. Dirichlet sur les applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres (Journal de M. Crelle, tome XXI). On peut aussi consulter les notes du grand Mémoire de M. Cauchy sur la théorie des nombres, 1830 (*Mémoires de l'Académie*).

VI.

Seconde application. — Des diviseurs de $z^2 - \mathrm{D}$.

PROBLÈME. *Trouver les diviseurs de* $z^2 - \mathrm{D}$?

La solution est donnée dans les n$^{\text{os}}$ 147-150 des *Disq. arith.* En voici le résumé nécessaire pour l'objet principal de cet article. Le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ facilite beaucoup l'exposition.

Il sera seulement question des diviseurs impairs premiers à D dans le cas de D nombre positif ou négatif sans facteur carré. Tous les autres cas s'en déduisent facilement. On supposera

$$\mathrm{D} = (-1)^{\alpha} 2^{\beta} \mathrm{P}, \quad \mathrm{P} = abc \ldots r,$$

α sera 0 ou 1 selon que D sera positif ou négatif; β sera 0 ou 1 selon que D sera pair ou impair. Quant à P, c'est le produit de nombres premiers différents a, b, c,..., r; il est de forme $4Q+1$ ou $4Q-1$, selon que les nombres premiers a, b, c,..., r de forme $4K-1$ sont en nombre pair ou en nombre impair.

1. Un nombre premier impair n est diviseur de $z^2 - D$ si l'on a

$$\left(\frac{D}{n}\right) = +1,$$

et il ne l'est pas (il est non diviseur) quand on a

$$\left(\frac{D}{n}\right) = -1.$$

Ces conditions expriment, en effet, que D est résidu ou non-résidu quadratique de n.

2. Si l'on pose

$$\delta = (-1)^{\alpha + \frac{P-1}{2}}, \quad \varepsilon = (-1)^\beta,$$

on aura

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right).$$

En effet,

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right)^\alpha \left(\frac{2}{n}\right)^\beta \left(\frac{P}{n}\right),$$

et comme

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}},$$

et

$$\left(\frac{P}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{P-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right),$$

on en tirera

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left[(-1)^{\alpha + \frac{P-1}{2}}\right]^{\frac{n-1}{2}} [(-1)^\beta]^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right).$$

3. L'expression $\left(\frac{D}{n}\right)$ a quatre valeurs qui correspondent ainsi qu'il suit aux diverses formules de $z^2 - D$:

$$
\begin{array}{l}
D > 0, \\
D < 0, \\
\left(\frac{D}{n}\right);
\end{array}
\left\{
\begin{array}{ll}
1^\circ. \left\{\begin{array}{l} D = P = 4Q + 1, \\ D = -P = -(4Q - 1), \\ \qquad \left(\frac{n}{P}\right); \end{array}\right. &
2^\circ. \left\{\begin{array}{l} D = P = 4Q - 1, \\ D = -P = -(4Q + 1), \\ \qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right); \end{array}\right. \\
3^\circ. \left\{\begin{array}{l} D = 2P = 2(4Q + 1), \\ D = -2P = -2(4Q - 1), \\ \qquad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right); \end{array}\right. &
4^\circ. \left\{\begin{array}{l} D = 2P = 2(4Q - 1), \\ D = -2P = -2(4Q + 1), \\ \qquad (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right). \end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

Cela suit de la substitution des valeurs de α et β.

4. Les diviseurs premiers n et les non diviseurs se trouvent par les formules suivantes. Posez

$$1^\circ. \quad n \equiv A\frac{P}{a}\alpha + \ldots + R\frac{P}{r}\rho \pmod{P},$$

$$\left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\beta}{b}\right)\cdots\left(\frac{\rho}{r}\right);$$

$$2^\circ. \quad n \equiv 4A\frac{P}{a}\alpha + \ldots + 4R\frac{P}{r}\rho + SP\sigma \pmod{4P},$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right) = (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\beta}{b}\right)\cdots\left(\frac{\rho}{r}\right);$$

$$3^\circ. \quad n \equiv 8A\frac{P}{a}\alpha + \ldots + 8R\frac{P}{r}\rho + SP\sigma \pmod{8P},$$

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right) = (-1)^{\frac{\sigma^2-1}{8}}\left(\frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\beta}{b}\right)\cdots\left(\frac{\rho}{r}\right);$$

$$4^\circ. \quad n \equiv 8A\frac{P}{a}\alpha + \ldots + 8R\frac{P}{r}\rho + SP\sigma \pmod{8P},$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right) = (-1)^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{\sigma^2-1}{8}}\left(\frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\beta}{b}\right)\cdots\left(\frac{\rho}{r}\right),$$

sous les conditions suivantes :

1°. $A\frac{P}{a} \equiv 1 \pmod{a}, \ldots, \quad R\frac{P}{r} \equiv 1 \pmod{r}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, a-1, \ldots, \quad \rho = 1, 2, 3, \ldots, r-1;$

2°. $4A\frac{P}{a} \equiv 1 \pmod{a}, \ldots, \quad 4R\frac{P}{r} \equiv 1 \pmod{r}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, a-1, \ldots, \quad \rho = 1, 2, \ldots, r-1,$

$SP \equiv 1 \pmod{4}, \quad \sigma = 1, 3;$

3° et 4°. $8A\frac{P}{a} \equiv 1 \pmod{a}, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, a-1, \ldots;$

$SP \equiv 1 \pmod{8}, \quad \sigma = 1, 3, 5, 7.$

Il suit de ces formules que n divisé par a donne le reste α; que, divisé par b, il donne le reste β, et ainsi de suite; que, divisé par 4 (deuxième cas), il donne le reste σ; que, divisé par 8 (troisième et quatrième cas), il donne le reste σ. De là la valeur de $\left(\frac{D}{n}\right)$. Si l'on veut donner au symbole $\delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{D}{n}\right)$ la valeur 1, il faudra pour le premier cas que, parmi les facteurs $\left(\frac{\alpha}{a}\right), \left(\frac{\beta}{b}\right), \ldots, \left(\frac{\rho}{r}\right)$, il y ait un nombre pair de facteurs -1; or, pour avoir, par exemple,

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right) = -1,$$

il faut que α soit non-résidu quadratique. Il faudra donc que, parmi $\alpha, \beta, \ldots, \rho$, les non-résidus quadratiques des modules correspondants $a, b, \ldots, r$ soient en nombre pair. Pour le deuxième cas et les suivants, la règle sera la même si les facteurs $(-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}, (-1)^{\frac{\sigma^2-1}{8}}, (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}+\frac{\sigma^2-1}{8}}$ sont égaux à $+1$. Mais si ces facteurs étaient égaux à -1, il faudrait, au contraire, prendre les non-résidus en nombre impair.

Ces formules conduisent à la proposition suivante.

5. Les diviseurs premiers n de $z^2 - D$ sont renfermés dans des formules linéaires qui sont, suivant les cas :

1°. $Px + A$, 2°. $4Px + A$, 3°. $8Px + A$, 4°. $8Px + A$,

les nombres

$A < P, \qquad A < 4P, \qquad A < 8P, \qquad A < 8P,$

étant au nombre de

$$\tfrac{1}{2}\varphi(\mathrm{P}),\quad \varphi(\mathrm{P})=\tfrac{1}{2}\varphi(4\mathrm{P}),\quad 2\varphi(\mathrm{P})=\tfrac{1}{2}\varphi(8\mathrm{P}),\quad 2\varphi(\mathrm{P}).$$

De même, les nombres premiers n non diviseurs sont contenus dans des formules linéaires :

$$1^{\circ}.\ \mathrm{P}x+\mathrm{B},\quad 2^{\circ}.\ 4\mathrm{P}x+\mathrm{B},\quad 3^{\circ}.\ 8\mathrm{P}x+\mathrm{B},\quad 4^{\circ}.\ 8\mathrm{P}x+\mathrm{B},$$
$$\mathrm{B}<\mathrm{P},\qquad \mathrm{B}<4\mathrm{P},\qquad \mathrm{B}<8\mathrm{P},\qquad \mathrm{B}<8\mathrm{P},$$

en nombre

$$\tfrac{1}{2}\varphi(\mathrm{P}),\qquad \varphi(\mathrm{P}),\qquad 2\varphi(\mathrm{P}),\qquad 2\varphi(\mathrm{P}).$$

Il faut bien remarquer que A est premier à P, ou $4\mathrm{P}$, ou $8\mathrm{P}$, selon les cas, et de même pour B; que les nombres A et B forment entre eux tous les nombres premiers à P, $4\mathrm{P}$, $8\mathrm{P}$, selon les cas. Quant à $\varphi(\mathrm{P})$, $\varphi(4\mathrm{P})$, $\varphi(8\mathrm{P})$, ils indiquent respectivement combien il y a de nombres premiers à P, $4\mathrm{P}$ et $8\mathrm{P}$. Comme il est très-facile de voir que les formules $\mathrm{P}x+\mathrm{A}$, $\mathrm{P}x+\mathrm{B}$, etc., sont en même nombre, on en conclut $\frac{1}{2}\varphi(\mathrm{P})$ pour le nombre des formules $\mathrm{P}x+\mathrm{A}$ aussi bien que pour le nombre des formules $\mathrm{P}x+\mathrm{B}$, et de même pour les autres cas.

6. Pour tout nombre composé impair $\mathrm{N}=nn'$, $\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{N}}\right)=\left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right)\left(\frac{\mathrm{D}}{n'}\right),\ldots,$ ainsi tous les diviseurs composés impairs sont nécessairement contenus dans les formules

$$(\mathrm{A})\qquad \mathrm{P}x+\mathrm{A},\quad 4\mathrm{P}x+\mathrm{A},\quad 8\mathrm{P}x+\mathrm{A},\quad 8\mathrm{P}x+\mathrm{A},$$

qui contiennent aussi des nombres composés non diviseurs.

Au contraire, tous les nombres composés compris dans les formules

$$(\mathrm{B})\qquad \mathrm{P}x+\mathrm{B},\quad 4\mathrm{P}x+\mathrm{B},\quad 8\mathrm{P}x+\mathrm{B},\quad 8\mathrm{P}x+\mathrm{B},$$

sont nécessairement non diviseurs.

7. Si les nombres des formules (A) sont dits de première classe et ceux des formules (B) de seconde classe, tout nombre, décomposé en facteurs, sera de première ou de seconde classe selon que le nombre des facteurs de seconde classe sera pair ou impair.

8. Soient

$$a,\quad a',\quad a'',\ldots,\ \text{tous les nombres de première classe;}$$
$$b,\quad b',\quad b'',\ldots,\ \text{tous ceux de seconde classe;}$$

les produits

$$am,\ a'm,\ a''m,\ldots;$$
$$bm,\ b'm,\ b''m,\ldots,$$

contiendront aussi tous les nombres d'une même classe, savoir, de première classe quand les deux facteurs a, m ou b, m sont de même classe; et de seconde classe quand les facteurs a, m ou b, m sont de classes différentes.

Cette remarque conduit à la formation des sommes alternées pour les racines primitives des équations binômes

$$x^{\mathrm{P}} = 1,\quad x^{4\mathrm{P}} = 1,\quad x^{8\mathrm{P}} = 1,$$

dont il a été question dans le § V.

VII.

De la somme $\mathrm{V} = \sum \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right) \frac{1}{n}$.

Cette somme renferme quatre cas. Dans le premier $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, elle s'étend à tous les nombres n pairs ou impairs premiers à P. Dans le deuxième, elle s'étend à tous les nombres impairs premiers à $4\mathrm{P}$; dans les deux derniers, à tous les nombres impairs premiers à $8\mathrm{P}$. Elle n'est autre que

$$\sum \frac{1}{\mathrm{A}} - \sum \frac{1}{\mathrm{B}},$$

en représentant par A tous les nombres de première classe et par B tous les nombres de seconde classe, ces nombres étant calculés par les règles du § VI.

Cette même somme se présente dans la recherche du nombre des formes réduites (quadratiques binaires) avec cette seule différence que, dans le premier cas, la somme $\sum \left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right) \frac{1}{n}$ s'étend aux seules valeurs impaires de n premières à P. Or, si l'on désigne cette somme ainsi limitée par V′, en conservant V pour le cas où la série s'étend aux valeurs paires et impaires de n, comme l'on a

$$\left(\frac{2\nu}{P}\right)\frac{1}{2\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)\left(\frac{\nu}{P}\right)\frac{1}{\nu},$$

on reconnaît tout de suite que l'on a

$$V=V'+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)V,\quad \text{ou}\quad V'=\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)\right]V;$$

et c'est, en effet, par cette dernière formule que M. Dirichlet calcule V′ au moyen de V.

L'expression

$$\sum\frac{1}{A}-\sum\frac{1}{B}$$

est formée de parties telles que

$$\sum\frac{1}{px+a}-\sum\frac{1}{px+b},$$

en mettant, suivant les cas, p pour P, 4P, 8P.

Les parties

$$\sum\frac{1}{px+a},\quad \sum\frac{1}{px+b},$$

sont l'une et l'autre infinies et sensiblement égales à

$$\frac{1}{p}\sum\frac{1}{x+1}$$

(les sommes sont prises de $x=0$ à $x=\infty$), mais la différence

$$\sum\frac{1}{px+a}-\sum\frac{1}{px+b}$$

est finie et s'exprime par arcs de cercle et logarithmes, et il n'est pas nécessaire pour cela que a et b soient des nombres de classe différente.

L'identité

$$\frac{x^{a-1}}{1-x^p}=x^{a-1}\left[1+x^p+x^{2p}+\ldots+x^{(k-1)p}+\frac{x^{kp}}{1-x^p}\right],$$

donne

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x^p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{p+a} + \frac{1}{2p+a} + \ldots + \frac{1}{(k-1)p+a} + \int_0^1 \frac{x^{kp+a-1}\,dx}{1-x^p}.$$

Mais la somme

$$\sum_{z=0}^{z=\infty} \frac{1}{pz+a}$$

est infinie, et l'on ne peut négliger le reste

$$\int_0^1 \frac{x^{kp+a-1}\,dx}{1-x^p}.$$

Il n'en est plus de même quand on considère l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(x^{a-1}-x^{b-1})\,dx}{1-x^p}.$$

On peut sans inconvénient négliger le reste

$$\int_0^1 \frac{x^{kp}(x^{a-1}-x^{b-1})\,dx}{1-x^p},$$

car on a, en supposant $a < b$,

$$\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x^p} = x^{a-1}\frac{1-x^{b-a}}{1-x^p} = x^{a-1}\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{b-a-1}}{1+x+\ldots+x^{p-1}},$$

de sorte que l'intégrale précédente est toujours inférieure à

$$\int_0^1 x^{kp+a-1}\,dx = \frac{1}{kp+a},$$

que le nombre indéterminé k rend aussi petite qu'on voudra.

On voit donc qu'en représentant par $f(x)$ la somme

$$\sum x^{\mathrm{A}} - \sum x^{\mathrm{B}},$$

en mettant pour A tous les nombres de première classe inférieurs à P, 4P ou 8P selon le cas, et de même pour B les nombres de seconde classe inférieurs à P, 4P, 8P, on a

$$\mathrm{V} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{x}f(x)\,dx}{1-x^p}.$$

C'est la première des méthodes dues à M. Dirichlet. Il est tout aussi simple de calculer la somme V par parties.

La décomposition en fractions rationnelles donne, comme l'on sait,

$$\frac{x^{a-1}}{1-x^p} = -\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p} \frac{\cos am\frac{2\pi}{p}x - \cos(a-1)m\frac{2\pi}{p}}{x^2 - 2\cos m\frac{2\pi}{p}x + 1};$$

de plus, la fonction sous le signe $\sum$ est égale à

$$\frac{\cos am\frac{2\pi}{p}\left(x - \cos m\frac{2\pi}{p}\right)}{x^2 - 2\cos m\frac{2\pi}{p}x + 1} - \frac{\sin am\frac{2\pi}{p}\sin m\frac{2\pi}{p}}{x^2 - 2\cos m\frac{2\pi}{p}x + 1};$$

de sorte que l'on a

$$\int_0^x \frac{x^{a-1}dx}{1-x^p} = -\frac{1}{2p}\sum_{m=1}^{m=p}\cos am\frac{2\pi}{p}\log\left(x^2 - 2\cos m\frac{2\pi}{p}x + 1\right)$$
$$+\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p}\sin am\frac{2\pi}{p}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x\sin m\frac{2\pi}{p}}{1 - x\cos m\frac{2\pi}{p}}\right),$$

et, par conséquent, pour $x = 1$,

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1-x^p} = -\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p}\cos am\frac{2\pi}{p}\log 2\sin m\frac{\pi}{p}$$
$$+\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p}\sin am\frac{2\pi}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m\pi}{p}\right).$$

Si, dans la formule identique, par le développement,

(A) $$\cos(2p+1)k = \cos k - 2\sin k\sum_{m=1}^{m=p}\sin 2mk,$$

on pose

$$k = \frac{a\pi}{p},$$

il en résulte

$$\sum_{m=1}^{m=p}\sin am\frac{2\pi}{p} = 0;$$

et de même, la formule

$$\text{(B)} \qquad \sin(2p+1)k = \sin k + 2\sin k \sum_{m=1}^{m=p} \cos 2mk$$

donne pour $k = \frac{a\pi}{p}$,

$$\sum_{m=1}^{m=p} \cos am\frac{2\pi}{p} = 0,$$

ce qui réduit l'intégrale précédente à

$$\text{(C)} \quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x^p} = -\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p} \cos am\frac{2\pi}{p}\log\sin m\frac{\pi}{p} - \frac{\pi}{p^2}\sum_{m=1}^{m=p} m\sin am\frac{2\pi}{p}.$$

On pourrait encore simplifier cette formule, la différentiation de la formule (b) donnerait

$$\text{(D)} \qquad \sum_{m=1}^{m=p} m\sin am\frac{2\pi}{p} = -\frac{p}{2}\cot a\frac{\pi}{p}.$$

Avant d'appliquer ces formules au calcul de la somme V, il est bon de donner deux formules qui serviront dans la paragraphe suivant.

Si, dans la formule (C), on change p en $p-a$, on aura

$$\cos am\frac{2\pi}{p} = \cos(p-a)m\frac{2\pi}{p},$$

et la soustraction donnera, au moyen de l'équation (D),

$$\sum_{z=0}^{z=\infty}\frac{1}{pz+a} - \sum_{z=0}^{z=\infty}\frac{1}{pz+p-a} = \frac{\pi}{p}\cot a\frac{\pi}{p}.$$

Si, dans cette formule, on change p en $2p$ et que l'on double les deux membres, puis que de cette équation on retranche la précédente membre à membre, on aura

$$\sum\frac{(-1)^z}{pz+a} + \sum\frac{(-1)^z}{pz+p-a} = \frac{\pi}{p}\,\frac{1}{\sin a\frac{\pi}{p}}.$$

Ces deux formules sont d'Euler (*Intr. in Anal.*, n° 178).

Voici maintenant le calcul de la fonction V.

Premier cas. $D > 0$.

Pour ce cas, a et $p - a$ appartiennent à la même classe,

$$\sin(p-a)m\frac{2\pi}{p} = -\sin am\frac{2\pi}{p};$$

donc, dans la réunion des intégrales (C), les secondes parties se détruisent, et si, dans la sommation des premières parties, on réunit les multiplicateurs relatifs à une même valeur de m, il suffira de remarquer que le cas $D > 0$ dépend des formules (a') du § V pour avoir

$$V = -\frac{1}{\sqrt{p}}\sum\left[\frac{m}{p}\right]\log\sin\frac{m\pi}{P}.$$

Cette formule renferme les quatre de M. Dirichlet, mais il faut mettre pour p, suivant les cas,

$$P, \quad 4P, \quad 8P, \quad 8P,$$

et pour $\left[\frac{m}{p}\right]$,

$$\left(\frac{m}{P}\right), \quad (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right), \quad (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right), \quad (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right).$$

Second cas. $D < 0$.

Pour ce cas, a et $p - a$ appartiennent à des classes différentes. Ainsi, dans la réunion des parties qui forment la somme V, les premières parties des intégrales (C) disparaissent; de plus, c'est ici le cas des formules (a'') du § V, de sorte que l'on trouve

$$V = -\frac{\pi}{(\sqrt{p})^3}\sum\left[\frac{m}{p}\right]m,$$

qui contient les quatre formules de M. Dirichlet, en remplaçant p et $\left[\frac{m}{p}\right]$ par leurs valeurs correspondantes aux différents cas.

L'emploi de la formule (D) donnerait

$$V = \frac{\pi}{p}\sum\cot A\frac{\pi}{p}.$$

Le nombre A est de première classe et moindre que P, 4P, 8P, selon les cas.

La comparaison de cette formule, qui peut être nouvelle, avec celle de M. Dirichlet, donne

$$\sum \cot A \frac{\pi}{p} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum \left[\frac{m}{p}\right] m.$$

Un cas très-particulier a été exposé dans le tome VII de ce Journal, page 143, équation (14).

VIII.

La sommation de la série V peut se faire encore par une autre méthode fondée sur la sommation de certaines séries.

Ainsi, pour le cas de $D < 0$, la sommation repose sur une propriété remarquable de la série

$$\sum_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Elle est nulle pour $x = 0$; puis entre 0 et π, elle prend la valeur $\frac{\pi}{4}$.

Elle est nulle de nouveau pour $x = \pi$; puis de π à 2π, elle prend la valeur $-\frac{\pi}{4}$, et ainsi de suite périodiquement.

De cette série on en déduit une autre,

$$\sum_0^\infty (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

De $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$ la valeur est $\frac{\pi}{4}$, pour $x = \frac{\pi}{2}$ la valeur est nulle.

Entre $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = 3\frac{\pi}{2}$ la valeur est $-\frac{\pi}{4}$, pour $x = 3\frac{\pi}{2}$ la valeur et nulle.

Entre $x = 3\frac{\pi}{2}$ et $x = 2\pi$ la valeur est $\frac{\pi}{4}$, et ainsi de suite périodiquement.

On en déduit encore les deux formules

$$S = \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},$$

$$S' = \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1},$$

qui prennent les valeurs suivantes :

	S,	S',
De $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{4}$,	0,	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;
De $x = \frac{\pi}{4}$ à $x = 3\frac{\pi}{5}$,	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$,	0;
De $x = 3\frac{\pi}{4}$ à $x = 5\frac{\pi}{4}$,	0,	$-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;
De $x = 5\frac{\pi}{4}$ à $x = 7\frac{\pi}{4}$,	$-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$,	0;
De $x = 7\frac{\pi}{4}$ à $x = 8\frac{\pi}{4}$,	0,	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

On pourrait croire, d'après ces énoncés, que les séries précédentes sont des fonctions discontinues, et c'est, ce me semble, l'opinion reçue le plus généralement. La discussion de cette question sera l'objet d'un Mémoire particulier.

Ces propriétés de la fonction

$$\varphi x = \sum_{0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},$$

sont très-faciles à établir.

Comme

$$\varphi(x+2\pi) = \varphi x \quad \text{et} \quad \varphi(x+\pi) = -\varphi x,$$

il suffit d'examiner les valeurs de $x = 0$ à $x = \pi$. Or, si l'on pose

$$x = \frac{m\pi}{4q},$$

m étant un entier impair moindre que $4q$, la substitution donnera, en réunissant les termes où les mêmes sinus reparaissent,

$$\varphi(x) = \sin\frac{m\pi}{4q}\left[\sum\frac{(-1)^i}{4qi+1} + \sum\frac{(-1)^i}{4qi+4q-1}\right]$$

$$+ \sin 3\frac{m\pi}{4q}\left[\sum\frac{(-1)^i}{4qi+1} + \sum\frac{(-1)^i}{4qi+4q-3}\right]$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$+ \sin(2q-1)\frac{m\pi}{4q}\left[\sum\frac{(-1)^i}{4qi+2q-1} + \sum\frac{(-1)^i}{4qi+2q+1}\right].$$

Or, d'après la formule d'Euler donnée plus haut, on aura

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4q}\left[\frac{\sin 1\frac{m\pi}{4q}}{\sin 1\frac{\pi}{4q}} + \frac{\sin 3\frac{m\pi}{4q}}{\sin 3\frac{\pi}{4q}} + \ldots + \frac{\sin(2q-1)\frac{m\pi}{4q}}{\sin(2q-1)\frac{\pi}{4q}}\right].$$

Pour $m = 1$, on a tout de suite

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4q} \times q = \frac{\pi}{4}.$$

Pour les autres valeurs de m, on trouvera encore $\frac{\pi}{4}$ en raison des deux formules

$$\frac{\sin(2k+1)a}{\sin a} = 1 + 2(\cos 2a + \cos 4a + \ldots + \cos 2ka),$$

$$\frac{\sin 2ka}{\sin a} = 2[\cos a + \cos 3a + \ldots + \cos(2k-1)a].$$

Par la première, on développera les termes $\dfrac{\sin i\frac{m\pi}{4q}}{\sin i\frac{\pi}{4q}}$, et par la seconde, on simplifiera le résultat. On pourrait aussi supposer m pair.

La valeur de $\varphi(x)$ ainsi obtenue, le changement de x en $x + \frac{\pi}{2}$ donnera

$$\varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \psi(x) = \sum(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

De même, si l'on pose

$$\theta(x) = \sum (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \frac{\sin nx}{n},$$

$$\xi(x) = \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}} \frac{\cos nx}{n} \quad (n \text{ impair}),$$

on trouvera

$$\varphi\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\theta(x)+\xi(x)],$$

$$\varphi\left(x+3\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}[-\theta(x)+\xi(x)],$$

d'où l'on déduira

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\varphi\left(x+3\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\varphi\left(x+3\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

et, par suite, les valeurs précédentes.

Cela posé, les formules du § V, relatives au cas de $D<0$, donnent pour valeur de $\left(\frac{n}{P}\right)$ (premier cas),

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\sum\left(\frac{m}{P}\right)\sin n\frac{2m\pi}{P},$$

on aura pour la série V,

$$V = \frac{1}{\sqrt{P}}\sum\left(\frac{m}{P}\right)\sum\frac{1}{n}\sin n\frac{2m\pi}{P}.$$

Or la valeur de $\sum \frac{\sin nx}{n}$ pour n impair est $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$, selon que l'on a

$$m<\frac{P}{2} \quad \text{ou} \quad >\frac{P}{2}.$$

Soient m' et m'' ces valeurs, on aura donc

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{P}}\left[\sum\left(\frac{m'}{P}\right)-\sum\left(\frac{m''}{P}\right)\right];$$

et comme, pour ce cas, $P = 4Q - 1$, $m'' = P - m'$, $\left(\frac{m''}{P}\right) = -\left(\frac{m'}{P}\right)$,

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{P}} \sum \left(\frac{m'}{P}\right).$$

On trouverait généralement

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{p}} \sum \left[\frac{m'}{p}\right],$$

en ayant égard aux valeurs de p et $\left[\frac{m'}{p}\right]$.

Le cas de $D > 0$ ne serait pas plus difficile à traiter; il suffirait de partir de la formule

$$\sum \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} = \frac{1}{2} \log\left(\cot \frac{x}{2}\right).$$

Voyez pour plus de détails les §§ IX et X du Mémoire déjà cité de M. Dirichlet, sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, deuxième partie, Journal de M. Crelle, tome XXI.