JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Sur quelques applications géométriques du calcul intégral

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 209-214.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__209_0>

SUR

QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DU CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

I.

Tous les géomètres connaissent la courbe enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des diamètres d'une ellipse [*]. L'arc de cette courbe (M. Talbot l'a montré le premier) s'exprime par une fonction elliptique de première espèce avec l'addition d'une partie algébrique, et le périmètre entier est donné exactement par la fonction complète. Dans un Mémoire qui fait partie du tome X de ce Journal, page 177, j'ai considéré la courbe qui dérive de celle de M. Talbot d'après la même construction que cette dernière dérive de l'ellipse, et encore la série de celles qui se déduisent les unes des autres en continuant le même mode de génération. Il résulte d'une formule que j'ai obtenue, que la rectification d'une quelconque des courbes de cette série dépend de fonctions elliptiques des deux premières espèces, ayant toutes le même module, savoir l'excentricité de l'ellipse primitive; l'expression pour un arc indéfini contient toujours, bien entendu, une quantité algébrique, qui s'anéantit lorsqu'on prend la valeur du périmètre entier.

Je vais démontrer, dans cette Note, une propriété assez curieuse des périmètres de la courbe de M. Talbot, et de celle qui la suit immédiatement dans la série dont il s'agit.

[*] On doit à M. Tortolini d'avoir trouvé l'équation de cette courbe, qu'il a présentée sous une forme très-symétrique. (Journal de M. Crelle, tome XXXIII, page 93.)

II.

Soient deux ellipses ayant le même grand axe et dont les excentricités b et c sont complémentaires, en sorte que

$$b^2 + c^2 = 1.$$

Conservons la notation de notre Mémoire, et désignons par S_{-1}, S_{-2} les longueurs des quadrants des deux premières dérivées de l'ellipse à l'excentricité c; et soient Σ_{-1}, Σ_{-2} les mêmes choses par rapport à l'autre ellipse à l'excentricité b. En prenant pour unité le demi-grand axe commun des ellipses, voici la formule qui contient l'énoncé de notre théorème,

$$\frac{1}{b} S_{-1} \Sigma_{-2} + \frac{1}{c} \Sigma_{-1} S_{-2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Pour la démontrer, reportons-nous au tome X de ce Journal, page 183; on y trouvera pour S_{-1}, S_{-2} les valeurs suivantes, exprimées en fonctions elliptiques complètes,

$$S_{-1} = b\,F(c), \quad S_{-2} = 3\,E(c) - (1 + b^2)\,F(c).$$

Il est évident qu'on obtiendra les valeurs de Σ_{-1}, Σ_{-2} en permutant b et c dans les formules précédentes, en sorte qu'on aura

$$\Sigma_{-1} = c\,F(b), \quad \Sigma_{-2} = 3\,E(b) - (1 + c^2)\,F(b),$$

d'où il suit sans peine que

$$\frac{1}{b} S_{-1} \Sigma_{-2} + \frac{1}{c} \Sigma_{-1} S_{-2} = 3\left[F(c)\,E(b) + F(b)\,E(c) - F(b)\,F(c)\right] = \frac{3\pi}{2},$$

en vertu de la relation bien connue de Legendre entre les fonctions complètes de modules complémentaires.

III.

On aurait pu arriver au résultat que je viens de donner, sans recourir à la théorie des fonctions elliptiques, en employant quelques transformations simples, et en se servant d'une intégrale double remarquable, évaluée par MM. Lamé et Chasles.

On peut obtenir, sans la moindre difficulté, les expressions suivantes pour S_{-1}, S_{-2}, à l'aide des formules qui se trouvent dans mon Mémoire,

$$S_{-1} = b\int_b^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-b^2)}},\quad S_{-2} = \int_0^1 \frac{(1+c^2-3c^2\rho^2)\,d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-c^2\rho^2)}}.$$

Pour nous conformer à la notation usitée, remplaçons r par μ dans la première de ces formules, et faisons dans la seconde

$$c\rho = \sqrt{1-\mu^2},$$

ce qui nous donnera

$$(1)\qquad S_{-1} = b\int_b^1 \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2-b^2)}},\quad S_{-2} = \int_b^1 \frac{(3\mu^2-1-b^2)\,d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2-b^2)}}.$$

Il est clair aussi qu'on peut écrire la valeur de Σ_{-1} de la manière suivante :

$$(2)\qquad \Sigma_{-1} = c\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}.$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$\Sigma_{-2} = \int_0^1 \frac{(1+b^2-3b^2\rho^2)\,d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-b^2\rho^2)}},$$

d'où, en faisant $b\rho = \nu$,

$$(3)\qquad \Sigma_{-2} = \int_0^b \frac{(1+b^2-3\nu^2)\,d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}.$$

En prenant donc les valeurs de S_{-1}, S_{-2}, Σ_{-1}, Σ_{-2}, données par les équations (1), (2) et (3), nous verrons facilement que

$$\frac{1}{b}S_{-1}\Sigma_{-2} + \frac{1}{c}\Sigma_{-1}S_{-2} = 3\int_b^1\int_0^b \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2-b^2)(1-\nu^2)(b^2-\nu^2)}} = \frac{3\pi}{2},$$

en vertu de la formule de M. Lamé (tome II de ce Journal, page 167).

IV.

Il est assez remarquable, ce me semble, que le théorème que nous venons d'établir fournisse le moyen d'énoncer très-simplement et d'une manière purement géométrique, la formule de Legendre sur les transcendantes elliptiques complémentaires, ou, ce qui est la même chose, l'évaluation de l'intégrale double de M. Lamé. En nous rattachant à la considération des courbes supérieures de la série dont il s'agit, nous pourrions arriver à un énoncé géométrique d'un théorème plus général, donné par ce dernier géomètre dans le tome IV de ce Journal, page 162. La méthode serait tout à fait analogue à celle que j'ai suivie dans ma démonstration de deux théorèmes généraux sur les périmètres de quelques courbes dérivées des hyperboles conjuguées [*] (tome XIII de ce Journal, page 179). Je ferai observer ici qu'on peut donner aux résultats qui s'y trouvent une forme absolument géométrique en substituant aux fonctions elliptiques deux arcs, l'un d'ellipse et l'autre d'hyperbole. Les théorèmes qu'on obtient ainsi sont l'expression des formules à l'aide desquelles Legendre effectue la réduction des fonctions complètes de troisième espèce à celles des deux premières espèces, en supposant toutefois qu'il existe une relation particulière entre le paramètre et le module. Il reste encore à trouver un énoncé géométrique des formules de Legendre dont il s'agit, dans toute leur généralité, sans aucune restriction.

V.

Il me semble que cette idée de rechercher des propriétés géométriques, qui sont les véritables traductions des formules d'analyse, est très-intéressante, et qu'elle n'a pas attiré l'attention des géomètres autant qu'elle le mérite. La formule fondamentale de mon Mémoire (tome X, page 178) offre un exemple très-simple de ce genre. En supposant qu'on prend pour courbe primitive un cercle rapporté à un point intérieur différent du centre, on sait que la première courbe donnée du système négatif sera une ellipse; et si l'on procède à la rectifier à l'aide de ma formule (A), en faisant

$$n = -1,$$

[*] Je prends cette occasion de remarquer que n peut s'évanouir dans S_n ou Σ_n, dans ces deux théorèmes; S_0 (ou Σ_0) exprimera la différence entre l'arc hyperbolique infini et son asymptote.

on trouvera, pour un arc d'ellipse, une expression qui peut s'écrire ainsi :

$$\alpha F(k, \varphi) + \beta E(k, \varphi) + \gamma,$$

α, β, γ étant des quantités algébriques. Cette expression n'est autre chose que celle que fournit la transformation modulaire de Lagrange. Elle se présente naturellement, comme on le voit, si l'on regarde une ellipse comme enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des rayons vecteurs d'un cercle excentrique; on doit remarquer, en outre, qu'elle comporte le théorème célèbre de Landen [*].

Cela m'a suggéré la question suivante, que je me suis posée il y a déjà longtemps. On sait que les transformations modulaires d'Abel et de M. Jacobi donnent pour une fonction elliptique de seconde espèce, $E(k, \varphi)$, une valeur qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$E(k, \varphi) = \alpha F(h, \psi) + \beta E(h, \psi) + \gamma,$$

α, β, γ étant des quantités algébriques. Quelle est donc la méthode de description d'une ellipse propre à donner le second membre de cette équation comme l'expression directe de son arc? Toutes mes tentatives à résoudre cette question sont restées jusqu'ici sans succès. Espérons que les géomètres ne la regarderont pas comme indigne de leurs talents. Si je ne me trompe, une telle recherche nous conduirait à la découverte d'une foule de propriétés fort curieuses des sections coniques.

VI.

Je terminerai cette Note en mentionnant qu'on peut exprimer géométriquement la propriété bien connue des intégrales définies, savoir :

$$(4) \qquad \int_0^1 \frac{z^p\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}} \cdot \int_0^1 \frac{z^{p+m}\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}} = \frac{1}{m(p+1)}\frac{\pi}{2}$$

(Lacroix, *Traité*, tome III, page 413). Cela s'effectue au moyen de quelques courbes remarquables qui ont attiré l'attention des géo-

[*] La démonstration géométrique du théorème de Landen, par feu Mac Cullagh, repose sur cette propriété de l'ellipse.

mètres dans ces derniers temps. J'ai fait observer (tome XII de ce Journal, page 448) que si l'on prend le lieu des projections orthogonales de l'origine sur les tangentes à la courbe

$$r^m \cos m\omega = 1,$$

et si l'on fait dériver de la nouvelle courbe une série d'autres se succédant d'après la même loi, l'équation de la $n^{ième}$ sera

$$r^{\frac{m}{mn-1}} = \cos\left(\frac{m\omega}{mn-1}\right).$$

Cette courbe se compose d'un certain nombre de boucles fermées égales entre elles, et si l'on désigne par S_n le demi-périmètre d'une quelconque de ces boucles, on aura

$$S_n = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1 - r^{\frac{2m}{mn-1}}}},$$

et si l'on fait $r = z^{mn-1}$,

$$S_n = (mn-1)\int_0^1 \frac{z^{mn-2}\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}}.$$

Semblablement, on trouvera, pour la $(n+1)^{ième}$ courbe,

$$S_{n+1} = (mn+m-1)\int_0^1 \frac{z^{mn+m-2}\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}},$$

d'où l'on déduit sans peine, en ayant égard à la relation (4),

$$S_n S_{n+1} = \frac{mn+m-1}{m}\,\frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

théorème qu'on peut regarder comme un énoncé géométrique de la formule d'analyse (4).

En se rappelant que les périmètres de toutes les courbes dérivées de même ordre, pair ou impair, ne diffèrent que par un coefficient numérique, il est évident qu'on obtiendra un résultat analogue à l'équation (5) en multipliant le périmètre d'une dérivée quelconque d'ordre pair par celui d'un autre d'ordre impair.

Dublin, le 28 octobre 1849.