JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 1-44.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE

Sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme;

PAR M. J.-A. SERRET.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 2 juillet 1849.)

INTRODUCTION.

Les géomètres qui se sont occupés de la théorie des équations algébriques, ont été conduits naturellement à étudier diverses questions relatives au nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme.

Lagrange est le premier qui soit entré dans cette voie, en démontrant que *le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres est toujours un diviseur du produit* $1.2.3\ldots n$ [*].

Plus tard, Ruffini considéra particulièrement les fonctions de cinq lettres, et démontra, dans sa *Théorie des Equations*, qu'*une fonction de cinq lettres qui a moins de cinq valeurs ne peut en avoir plus de deux*.

Ce théorème fut étendu ensuite aux fonctions d'un nombre quel-

[*] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, années 1770 et 1771.

conque de lettres, par Pietro Abatti, compatriote de Ruffini, qui démontra [*] qu'*une fonction d'un nombre quelconque de lettres ne peut avoir moins de cinq valeurs, si elle en a plus de deux.*

Tel était l'état de la question lorsque M. Cauchy vint à s'en occuper. Ce géomètre, prenant pour point de départ les travaux de Ruffini et d'Abatti, publia dans le tome X du *Journal de l'Ecole Polytechnique* un Mémoire très-remarquable [**] où se trouve démontré ce beau théorème qui comprend ceux de Ruffini et d'Abatti :

Une fonction de n lettres qui a plus de deux valeurs en a au moins un nombre égal au plus grand nombre premier contenu dans n.

On conclut de là, si n est premier, que

Une fonction de n lettres qui a plus de deux valeurs en a au moins n.

M. Cauchy donne à penser qu'il chercha à étendre ce dernier théorème au cas des fonctions d'un nombre quelconque de lettres, mais il ne put y parvenir que pour les fonctions de six lettres. Il a, en effet, démontré dans son Mémoire, que

Si une fonction de six lettres a plus de deux valeurs, elle en a au moins six.

Enfin, M. Bertrand présenta, il y a trois ans, à l'Académie, un Mémoire qui fait aujourd'hui partie du XXX^e^ cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique,* et où il se proposait, comme objet principal, de démontrer généralement que

Si une fonction de n lettres a plus de deux valeurs, elle en a au moins n.

On sait que M. Bertrand est parvenu à établir ce théorème en faisant usage du postulatum suivant :

Si n est > 7, il y a au moins un nombre premier compris entre $\frac{n}{2}$ et $n - 2$.

Les Tables de nombres premiers ont permis de vérifier l'exactitude

---

[*] *Mémoires de la Société Italienne,* tome X.

[**] *Voyez* aussi mon *Cours d'Algèbre supérieure,* page 248.

de ce postulatum pour les valeurs de n comprises entre 7 et 6 000 000, en sorte que le théorème de M. Bertrand se trouve démontré par lui pour les fonctions qui ont moins de 6 000 000 de variables.

M. Bertrand a aussi démontré dans son Mémoire que, n étant > 9,

Si une fonction de n lettres a plus de n valeurs, elle en a au moins $2n$.

Tels sont les principaux faits acquis jusqu'à ce jour à cette théorie. Le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie se compose de deux parties. Dans la première, je démontre, sans avoir recours à aucun postulatum : 1° qu'une fonction de n lettres qui a moins de n valeurs, n'en a que deux au plus, si n est > 4; 2° qu'une fonction de n lettres qui a précisément n valeurs est symétrique par rapport à $n-1$ lettres, à moins que n ne soit égal à 6. Dans la seconde partie, je démontre : 1° qu'une fonction de n lettres qui a plus de n valeurs, en a au moins $2n$, si n est > 8; 2° qu'une fonction de n lettres qui a plus de $2n$ valeurs, en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$, si n est > 12.

Ainsi, à part les cas d'exception que je signale, le nombre des valeurs que peut avoir une fonction de n lettres est 1, 2, n, $2n$ ou $\frac{n(n-1)}{2}$, ou un nombre supérieur.

La méthode dont je fais usage diffère essentiellement de celles qu'on a employées jusqu'ici. Je n'emprunte aux travaux antérieurs que les résultats relatifs à la forme des fonctions qui n'ont que deux valeurs. Je crois nécessaire de les rappeler dans cette introduction pour faciliter l'intelligence de ce qui va suivre.

Lemme I. *Si*

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

est une fonction de n lettres qui prend μ valeurs distinctes

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu,$$

quand on y permute les lettres a, b, etc., toute fonction symétrique de $V_1, V_2, \ldots, V_\mu$, est également une fonction symétrique des lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$.

Cette proposition est presque évidente. (*Voyez* mon *Cours d'Algèbre supérieure*, deuxième Leçon.)

Lemme II. *Si une fonction d'un nombre quelconque de lettres n'a que deux valeurs distinctes, elle change nécessairement de valeur par la transposition de deux lettres quelconques.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction d'un nombre quelconque de lettres qui n'a que deux valeurs. Prenons trois lettres quelconques a, b, c, et faisons les trois arrangements

$$a, b, c; \quad b, c, a; \quad c, a, b.$$

Il en résultera ces trois valeurs de la fonction V :

$$\begin{aligned} &\varphi(a, b, c, \ldots), \\ &\varphi(b, c, a, \ldots), \\ &\varphi(c, a, b, \ldots). \end{aligned}$$

Mais comme, par hypothèse, la fonction V n'a que deux valeurs distinctes, parmi les trois qu'on vient d'écrire, il y en a au moins deux qui sont égales entre elles. Or je dis qu'elles sont égales toutes trois.

Supposons, en effet, qu'on ait

$$\varphi(a, b, c, \ldots) = \varphi(b, c, a, \ldots); \tag{1}$$

comme cette égalité doit avoir lieu identiquement, on peut y remplacer les lettres a, b, c, respectivement par b, c, a; il vient alors

$$\varphi(b, c, a, \ldots) = \varphi(c, a, b, \ldots), \tag{2}$$

et l'on voit que les trois valeurs de V que nous considérons sont égales entre elles.

Si, au lieu d'admettre l'égalité (1), on admet l'égalité (2), en y remplaçant a, b, c, respectivement par b, c, a, il vient

$$\varphi(c, a, b, \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots), \tag{3}$$

ce qui montre que les trois valeurs de V sont égales entre elles.

Enfin la même chose a lieu si l'on admet l'égalité (3), car en y échangeant a, b, c, respectivement en b, c, a, on retombe sur l'égalité (1).

Il résulte de là que la fonction V n'est pas changée quand on remplace les trois lettres a, b, c, respectivement par b, c, a.

Nous représenterons, pour abréger, par la notation (a, b) la *transposition* des lettres a et b, c'est-à-dire l'opération qui a pour but de changer ces deux lettres l'une avec l'autre. D'après ce qui précède, la fonction V ne change pas, si on lui applique successivement les deux transpositions (a, b), (a, c), car l'effet de ces deux transpositions revient au changement de a, b, c en b, c, a.

Supposons que la transposition (a, b) change V en V_1 (V_1 pouvant être égal à V), la transposition (a, c) devra changer V_1 en V, et, par conséquent, V en V_1; car faire deux fois de suite une même transposition, c'est ne faire aucun changement. Donc deux transpositions (a, b), (a, c) qui ont une lettre commune produisent sur la fonction V le même changement. Il en est de même des transpositions (a, c), (c, d) qui ont la lettre c commune, et, par suite aussi, des deux transpositions (a, b), (c, d) qui n'ont aucune lettre commune. Mais la fonction V n'étant pas symétrique par hypothèse, il y a au moins une transposition qui change sa valeur; donc toutes les transpositions devront la changer en vertu de ce qui précède.

Forme générale des fonctions qui n'ont que deux valeurs.

On peut, quel que soit n, former des fonctions de n lettres qui n'aient que deux valeurs distinctes.

Soient, en effet, n lettres,

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots,\ k,\ l,$$

et désignons par ν le produit de toutes les différences obtenues, en retranchant de chacune de ces lettres successivement chacune des suivantes, en sorte qu'on ait

$$\nu = (a-b)(a-c)\ldots(a-l)(b-c)\ldots(k-l).$$

Le carré de ν est évidemment une fonction symétrique, et, par suite,

v ne peut avoir que deux valeurs égales et de signes contraires. De plus, ces deux valeurs existent effectivement, car il est évident que v se change en $-v$ par la transposition des lettres a et b.

Soient maintenant A et B deux fonctions symétriques des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$. La fonction

$$A + Bv,$$

plus générale que v, n'a évidemment que les deux valeurs distinctes $A + Bv$ et $A - Bv$. Or je dis que toute fonction de n lettres qui n'a que deux valeurs, a la forme $A + Bv$.

Soit, en effet, V une fonction de n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$ qui n'a que deux valeurs distinctes, et désignons par V_1 et V_2 ces deux valeurs. Il est évident que la fonction $V_1 v$ n'a aussi que deux valeurs, car, d'après le lemme II, toute transposition change V_1 en V_2, V_2 en V_1, et v en $-v$; d'où il suit que la fonction $V_1 v$ n'a que ces deux valeurs

$$V_1 v \quad \text{et} \quad -V_2 v.$$

Donc, d'après le lemme I, si l'on fait

$$V_1 + V_2 = A,$$
$$V_1 v - V_2 v = B,$$

A et B seront des fonctions symétriques. Des équations précédentes on tire

$$V_1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2v} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2v^2} v;$$

or $\frac{A}{2}$ et $\frac{B}{2v^2}$ étant des fonctions symétriques, on peut écrire plus simplement

$$V_1 = A + Bv,$$

A et B désignant des fonctions symétriques, et v la valeur écrite plus haut.

La proposition que nous avions en vue est ainsi démontrée.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPOSITION I.

LEMME.

Soient

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu,$$

μ fonctions de n lettres a, b, c, d,..., k, l: si les coefficients de l'équation

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_\mu) = 0, \tag{1}$$

ordonnée par rapport aux puissances de x, sont des fonctions symétriques des n lettres a, b, c, d,..., k, l, la fonction V_1 ne pourra acquérir par les permutations de ces n lettres que des valeurs faisant partie de la série

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu.$$

En effet, faisons subir aux lettres a, b, c, d,..., k, l une permutation quelconque, l'équation (1) ne changera pas, puisque ses coefficients sont des fonctions symétriques; donc ses racines ne changeront pas non plus.

Ainsi, en faisant une permutation quelconque, les fonctions

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu$$

sont invariables, ou se changent les unes dans les autres. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

THÉORÈME [*].

Le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres est nécessairement un diviseur du produit $1.2.3\ldots n$.

---

[*] Ce théorème est bien connu et se présente pour ainsi dire de lui-même. Si nous en parlons ici, c'est moins pour en donner une démonstration nouvelle que pour dispenser le lecteur d'avoir recours aux travaux antérieurs.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, qui a μ valeurs distinctes

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu.$$

Formons l'équation du degré μ

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_\mu) = 0,$$

que nous représenterons aussi par

$$\Psi(x) = 0,$$

$\Psi(x)$ étant, d'après le lemme I de l'introduction, un polynôme en x dont les coefficients sont des fonctions symétriques des n lettres a, $b, c, d, \ldots, k, l$.

Soit aussi, pour abréger,

$$1.2.3\ldots n = N.$$

Formons les N permutations des lettres $a, b, c, \ldots, k, l$, et remplaçons les lettres de V successivement par celles de chacune de ces permutations; on aura N valeurs de V, que nous représenterons par

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_N,$$

et si l'on désigne par

$$F(x) = 0$$

l'équation

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_N) = 0,$$

il est évident que les coefficients de $F(x)$ sont des fonctions symétriques des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$.

Maintenant $F(x)$ est divisible par $\Psi(x)$; soit ρ la plus haute puissance de $\Psi(x)$ qui divise $F(x)$, et posons

$$F(x) = [\Psi(x)]^\rho \Psi_1(x),$$

je dis que $\Psi_1(x)$ ne peut dépendre de x, et qu'elle est, par suite, égale à 1. Supposons, en effet, que le contraire ait lieu; $\Psi_1(x)$ est une fonction symétrique de $a, b, c, d, \ldots, k, l$, d'après l'équation précédente; donc, d'après la proposition I, V ne peut avoir d'autres valeurs que celles qui sont racines de l'équation

$$\Psi_1(x) = 0.$$

Mais cela est impossible, car cette équation n'a pas les μ racines V_1, $V_2, \ldots, V_\mu$; puisque alors $F(x)$ serait divisible par une puissance de $\Psi(x)$ supérieure à la $\rho^{ième}$.

On ne peut donc supposer que $\Psi_1(x)$ soit fonction de x; cette quantité sera dès lors égale à 1, et l'on aura

$$F(x) = [\Psi(x)]^\rho,$$

et, par conséquent,

$$N = \mu\rho.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION III.

LEMME.

Si une fonction de n lettres a $\mu + \nu$ valeurs, et qu'elle ne prenne que μ valeurs distinctes par les permutations de m lettres, il y aura aussi m lettres parmi les n que contient la fonction, dont les permutations lui feront acquérir un nombre de valeurs distinctes égal ou inférieur à ν.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant $\mu + \nu$ valeurs, et supposons que par les permutations des m lettres

$$g, \quad h, \ldots, \quad k, \quad l,$$

la fonction V ne prenne que les μ valeurs

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu.$$

Soient aussi

$$V_{\mu+1}, \quad V_{\mu+2}, \ldots, \quad V_{\mu+\nu}$$

les ν autres valeurs dont V est susceptible.

Les coefficients de l'équation

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_{\mu+\nu}) = 0,$$

sont des fonctions symétriques des n lettres a, b, c, $d,\ldots$, k, l; pareillement les coefficients de l'équation

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_\mu) = 0,$$

sont des fonctions symétriques des m lettres g, $h,\ldots$, k, l; donc l'équation qu'on obtient en divisant les deux précédentes, savoir

$$(x - V_{\mu+1})(x - V_{\mu+2})(x - V_{\mu+\nu}) = 0,$$

a aussi pour coefficients des fonctions symétriques de g, $h,\ldots$, k, l. Par conséquent, d'après la proposition I, la fonction $V_{\mu+1}$ ne peut acquérir, par les permutations des lettres g, $h,\ldots$, k; l, de valeurs différentes des ν suivantes

$$V_{\mu+1},\quad V_{\mu+2},\ldots,\quad V_{\mu+\nu},$$

Donc enfin, parmi les n lettres qui entrent dans la fonction V, il y en a m dont les permutations font acquérir à cette fonction un nombre de valeurs distinctes égal ou inférieur à ν.

Corollaire. *En particulier, si une fonction de n lettres a μ valeurs distinctes, dont $\mu - 1$ seulement peuvent être obtenues par les permutations de m lettres, la fonction est symétrique par rapport à m lettres.*

PROPOSITION IV.

LEMME.

Si une fonction non symétrique de n lettres, n étant > 4, est symétrique par rapport à $n - 2$ de ces lettres, le nombre des valeurs distinctes de la fonction est n, $\frac{n(n-1)}{2}$ ou $n(n-1)$.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, symétrique par rapport aux $n - 2$ lettres

$$c,\ d,\ldots,\ k,\ l.$$

1°. Si cette fonction ne change pas de valeur par la transposition de l'une des lettres a et b, b par exemple, avec l'une des $n - 2$

autres, elle sera symétrique par rapport aux $n-1$ lettres

$$b,\ c,\ d,\ldots,\ k,\ l;$$

et comme, par hypothèse, elle n'est pas symétrique par rapport aux n lettres, elle aura précisément n valeurs.

2°. Supposons que la fonction V change par la transposition de l'une quelconque des deux lettres a et b avec l'une des $n-2$ autres, et qu'elle ne soit pas symétrique par rapport aux deux lettres a et b.

On formera évidemment toutes les valeurs dont la fonction V est susceptible, en faisant les $n(n-1)$ arrangements deux à deux des n lettres

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots,\ k,\ l,$$

et permutant dans la valeur de V les deux lettres a et b successivement avec les deux lettres de chacun de ces arrangements. Or je dis que toutes les valeurs de V formées ainsi sont différentes.

En effet, les deux valeurs de V qui correspondent à deux arrangements formés des mêmes lettres, a, b et b, a par exemple, ne peuvent être égales, puisque l'égalité

$$\varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l) = \varphi(b, a, c, d,\ldots, k, l)$$

exige que la fonction V soit symétrique par rapport à a et b, ce qui est contre l'hypothèse.

Pareillement, les deux valeurs de V qui correspondent à deux arrangements ayant une lettre commune, tels que a, b et a, c, ou a, b et c, a, sont différentes. En d'autres termes, on ne peut avoir

$$\varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l) = \varphi(a, c, b, d,\ldots, k, l),$$

ni

$$\varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l) = \varphi(c, a, b, d,\ldots, k, l).$$

L'impossibilité de ces égalités résulte de ce que le premier membre de chacune d'elles est symétrique par rapport aux deux lettres c et d, tandis que le second ne l'est pas par hypothèse.

Enfin les deux valeurs de V qui correspondent à deux arrangements a, b et c, d qui n'ont aucune lettre commune, sont aussi différentes; on ne peut avoir

$$\varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l) = \varphi(c, d, a, b, \ldots, k, l),$$

parce que le premier membre est symétrique par rapport à c et d, tandis que le second ne l'est pas.

On voit donc que le nombre des valeurs distinctes de V est $n(n-1)$.

3°. Supposons, enfin, que la fonction V change par la transposition de l'une quelconque des lettres a et b avec l'une des $n-2$ autres, mais qu'elle soit symétrique par rapport aux deux lettres a et b.

Dans ce cas, on formera toutes les valeurs de V en faisant les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons deux à deux des n lettres

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots,\ k,\ l,$$

et permutant dans la valeur de V les deux lettres a et b successivement avec les deux lettres de chacune de ces combinaisons. Or je dis que toutes les valeurs de V ainsi formées seront différentes si n est supérieur à 4.

En effet, deux valeurs de V qui correspondent à deux combinaisons a, b et a, c, qui ont une lettre commune, sont différentes; on ne peut avoir

$$\varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l) = \varphi(a, c, b, d, \ldots, k, l),$$

parce que le premier membre est symétrique par rapport à a et b, et que le second ne l'est pas par hypothèse.

Pareillement, deux valeurs de V qui correspondent à deux combinaisons a, b et c, d, qui n'ont aucune lettre commune, sont aussi différentes; en d'autres termes, on ne peut avoir

$$\varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l) = \varphi(c, d, a, b, \ldots, k, l),$$

parce que le premier membre est symétrique par rapport aux $n-2$ lettres c, d,..., k, l, et que le second ne l'est pas par hypothèse si n est > 4.

On voit donc que le nombre des valeurs distinctes de V est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Remarque. La démonstration de ce dernier cas suppose essentiellement $n > 4$; car si l'on a $n = 4$, on ne peut plus dire que l'égalité

$$\varphi(a, b, c, d) = \varphi(c, d, a, b)$$

soit impossible. Cette égalité peut, au contraire, avoir lieu; cela arrive en particulier pour la fonction

$$ab + cd,$$

et pour une infinité d'autres.

Corollaire. *Si une fonction de n lettres symétrique par rapport à $n - 2$ lettres a n valeurs, elle doit être symétrique par rapport à $n - 1$ lettres.*

PROPOSITION V.

LEMME.

Si une fonction de n lettres n'a que deux valeurs par les permutations de $n - 1$ lettres, elle a 2 ou $2n$ valeurs par les permutations de toutes les lettres, n étant > 3.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, n étant > 3, qui n'a que deux valeurs par les permutations des $n - 1$ lettres

$$b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l;$$

en désignant par v le produit des différences de ces $n - 1$ lettres deux à deux, en sorte qu'on ait

$$v = (b - c)(b - d)\ldots(k - l),$$

V aura la forme

$$V = A + Bv,$$

A et B étant des fonctions des n lettres a, b, c, etc., symétriques par rapport aux $n - 1$ dernières.

Cela posé, je distinguerai deux cas suivant que la fonction A est symétrique ou non symétrique par rapport aux n lettres.

1°. Si A est symétrique par rapport aux n lettres, V a précisément autant de valeurs que Bv; mais le carré de Bv est symétrique par rapport aux $n-1$ lettres $b, c, d,\ldots, k, l$, donc il a n valeurs, ou une seulement s'il est symétrique par rapport à toutes les lettres. Par conséquent, Bv ou V a 2 ou $2n$ valeurs.

2°. Si A n'est symétrique que par rapport aux $n-1$ lettres $b, c, d,\ldots, k, l$, faisons les n transpositions

$$(a, a),\quad (a, b),\quad (a, c),\ldots,\quad (a, l),$$

et désignons par

$$A_1,\quad A_2,\ldots,\quad A_n$$

les valeurs qui en résultent pour A; par

$$B_1,\quad B_2,\ldots,\quad B_n$$

les valeurs correspondantes de B qui peuvent être égales entre elles, et par

$$v_1,\quad v_2,\ldots,\quad v_n$$

celles de v. On aura ces $2n$ valeurs de V, les seules que cette fonction puisse avoir,

$$\begin{gathered} A_1 \pm B_1 v_1, \\ A_2 \pm B_2 v_2, \\ \cdots\cdots \\ A_n \pm B_n v_n; \end{gathered}$$

et je dis que ces $2n$ valeurs de V sont différentes si n est > 3. En effet, si l'on avait, par exemple,

$$A_1 \pm B_1 v_1 = A_2 \pm B_2 v_2,$$

il en résulterait

$$A_1 - A_2 = \pm B_2 v_2 \mp B_1 v_1;$$

or le premier membre n'est pas nul, et il est symétrique par rapport aux $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$; B_1 et B_2 sont également symétriques par rapport à ces lettres, tandis que v_1 et v_2 changent de signe par la transposition de deux quelconques de ces $n-2$ lettres; l'égalité précédente est donc impossible si $n-2$ est au moins égal à 2, c'est-à-dire si n est > 3.

La fonction V a donc $2n$ valeurs.

Corollaire. *Si une fonction de n lettres, n étant > 4, a deux valeurs seulement par les permutations de $n-2$ lettres, le nombre des valeurs que cette fonction peut prendre par les permutations de toutes les lettres est égal à 2, ou supérieur à n.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, n étant > 4, qui n'a que deux valeurs par les permutations des $n-2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

D'après la proposition qui précède, comme on suppose $n-1 > 3$, la fonction V aura 2 ou $2(n-1)$ valeurs par les permutations des $n-1$ lettres

$$b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Dans le dernier cas, le nombre total des valeurs de V est supérieur à n. Si, au contraire, la fonction V n'a que deux valeurs par les permutations des $n-1$ lettres

$$b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l,$$

elle en aura 2 ou $2n$ par les permutations de toutes les lettres.

Le corollaire est donc démontré.

PROPOSITION VI.

LEMME.

Si une fonction de n lettres, non symétrique, a un nombre impair de valeurs distinctes, il est impossible qu'elle prenne toutes les valeurs dont elle est susceptible, par les seules permutations de $n-2$ lettres.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant un nombre impair μ de valeurs distinctes, et supposons qu'elle puisse prendre ses μ valeurs par les seules permutations des $n-2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Représentons ces μ valeurs par

$$(1) \qquad \varphi_1(a, b, \ldots), \quad \varphi_2(a, b, \ldots), \ldots, \quad \varphi_\mu(a, b, \ldots).$$

Il est d'abord évident que la fonction V ne peut être symétrique par rapport aux lettres a et b, car toutes les valeurs qu'elle peut prendre seraient symétriques par rapport à a et b, et, par conséquent, cette fonction serait symétrique par rapport à deux lettres quelconques, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela étant, faisons dans les fonctions (1) la transposition (a, b), elles deviennent

$$(2) \qquad \varphi_1(b, a, \ldots), \quad \varphi_2(b, a, \ldots), \ldots, \quad \varphi_\mu(b, a, \ldots).$$

Les fonctions (1) étant distinctes par hypothèse, les fonctions (2) le sont aussi, et comme la série (1) comprend toutes les valeurs de V, les fonctions (2) ne différeront pas des fonctions (1); d'ailleurs les termes de même rang de ces suites ne peuvent être égaux, puisque la fonction V n'est pas symétrique par rapport à a et b. Supposons donc que l'on ait

$$\varphi_1(a, b, \ldots) = \varphi_\mu(b, a, \ldots),$$

en changeant a et b l'une avec l'autre, il vient

$$\varphi_1(b, a, \ldots) = \varphi_\mu(a, b, \ldots);$$

d'où il suit que les termes de la suite (1) peuvent être groupés deux à deux, de manière que les deux termes d'un même groupe se changent l'un dans l'autre, par la transposition (a, b). Or cela est impossible, puisque μ est un nombre impair. La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION VII.

LEMME.

Si une fonction de n lettres

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

prend toutes ses valeurs par les seules permutations des $n - 2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l,$$

le nombre de ces valeurs est double du nombre de valeurs que prend la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d, \ldots, k, l)],$$

par les permutations des $n - 2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$.

On voit, comme dans la proposition précédente, que la fonction V ne peut être symétrique par rapport aux lettres a et b, et que les valeurs de V peuvent être groupées deux à deux, de manière que les termes d'un même groupe se changent l'un dans l'autre par la transposition (a, b). Il résulte de là que les valeurs de V peuvent être partagées en deux séries de la manière suivante

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(a, b), & \varphi_2(a, b), \ldots, & \varphi_\mu(a, b), \\ \varphi_1(b, a), & \varphi_2(b, a), \ldots, & \varphi_\mu(b, a). \end{array}$$

Cela posé, la fonction X ne peut acquérir que les μ valeurs suivantes, par les permutations des $n - 2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$,

$$\begin{array}{l} [x - \varphi_1(a, b)][x - \varphi_1(b, a)], \\ [x - \varphi_2(a, b)][x - \varphi_2(b, a)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [x - \varphi_\mu(a, b)][x - \varphi_\mu(b, a)], \end{array}$$

car toute permutation des lettres $c, d, \ldots, k, l$ qui laisse $\varphi_1(a, b)$ invariable, ou qui la change en $\varphi_1(b, a)$, laisse invariable $\varphi_1(b, a)$ ou la change en $\varphi_1(a, b)$; et de même toute permutation des lettres c, $d, \ldots, k, l$ qui change $\varphi_1(a, b)$ en $\varphi_2(a, b)$ ou en $\varphi_2(b, a)$, change aussi $\varphi_1(b, a)$ en $\varphi_2(b, a)$ ou en $\varphi_2(a, b)$.

De plus, les μ valeurs de X, écrites plus haut, sont différentes, car s'il n'y en avait que μ' de distinctes, μ' étant $< \mu$, en multipliant ces μ' valeurs et égalant à zéro le produit, on aurait une équation dont le premier membre serait une fonction symétrique des $n - 2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, et dont les $2\mu'$ racines seraient les seules valeurs distinctes de la fonction V (proposition I), ce qui est impossible, puisqu'on a supposé ce nombre de valeurs égal à 2μ.

Il est donc démontré que le nombre des valeurs de la fonction V est double du nombre des valeurs que peut prendre la fonction X par les permutations des $n - 2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Une fonction d'un nombre impair n de lettres, qui a moins de n valeurs distinctes, ne peut en avoir plus de deux.

Je vais démontrer généralement que si le théorème a lieu pour les fonctions de $n - 2$ lettres, il a lieu aussi pour les fonctions de n lettres; et comme il est évidemment vrai pour les fonctions de trois lettres, il sera vrai aussi pour les fonctions de cinq, de sept, etc., d'un nombre impair quelconque de lettres.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres qui a moins de n valeurs distinctes, n étant un nombre impair au moins égal à 5.

Soient a et b deux lettres quelconques, et faisons toutes les permutations des $n - 2$ autres lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l,$$

sans changer la place ni de a ni de b; comme nous admettons qu'une fonction de $n - 2$ lettres qui a moins de $n - 2$ valeurs, ne peut en avoir plus de deux, le nombre des valeurs de V résultant des permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$ sera nécessairement l'un des quatre suivants

$$1, \quad 2, \quad n-2, \quad n-1.$$

Nous allons faire successivement ces quatre hypothèses.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors elle aura, d'après la proposition IV, n ou $\frac{n(n-1)}{2}$, ou $n(n-1)$ valeurs distinctes. Cette hypothèse n'est donc pas admissible puisque V a moins de n valeurs.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après le corollaire de la proposition V, la fonction V n'a en tout que deux valeurs, puisqu'elle en a moins de n.

3°. *La fonction* V *a* $n-2$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition VI, il est impossible que la fonction V n'ait que $n-2$ valeurs par les permutations des n lettres, parce que $n-2$ est un nombre impair; elle en a donc $n-1$. Mais alors, d'après la proposition III (corollaire), la fonction V est symétrique par rapport à $n-2$ lettres, et, par conséquent, elle a n, $\frac{n(n-1)}{2}$ ou $n(n-1)$ valeurs. Cette hypothèse est donc inadmissible.

4°. *La fonction* V *a* $n-1$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Comme la fonction V n'a en tout que $n-1$ valeurs, d'après la proposition VII, la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d,\ldots, k, l)],$$

a $\frac{n-1}{2}$ valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$. Mais on a

$$\frac{n-1}{2} < n-2,$$

et nous admettons qu'une fonction de $n-2$ lettres qui a moins de $n-2$ valeurs, n'en a au plus que deux, donc la fonction X a une ou deux valeurs seulement, et, par conséquent, on doit avoir

$$\frac{n-1}{2}=1 \quad \text{ou} \quad =2,$$

c'est-à-dire

$$n=3 \quad \text{ou} \quad n=5.$$

Nous avons supposé $n>3$, donc l'hypothèse que nous discutons en ce moment est inadmissible, à moins que n ne soit égal à 5. Mais elle l'est encore dans ce cas, car une fonction de cinq lettres ne peut avoir quatre valeurs par les permutations de trois lettres, à cause que 4 n'est pas un diviseur du produit 1.2.3.

Conclusion. On voit que la seconde de nos quatre hypothèses est seule admissible, et, par conséquent, si la fonction V a moins de n valeurs, elle ne peut en avoir plus de deux.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

Une fonction d'un nombre impair n de lettres, qui a précisément n valeurs, est symétrique par rapport à n — 1 lettres.

La démonstration suivante suppose n au moins égal à 5, mais pour les fonctions de trois lettres, le théorème est presque évident [*].

Soit

$$V=\varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

---

[*] Soit

$$V=\varphi(a, b, c)$$

une fonction de trois lettres qui a trois valeurs. Si V n'est pas symétrique par rapport aux deux lettres a et b, soient V_1 et V_2 les deux valeurs que prend cette fonction par les permutations de ces lettres, et V_3 la troisième valeur de V ; on a

$$V_3=(V_1+V_2+V_3)-(V_1+V_2),$$

d'où il résulte que V_3 est symétrique par rapport à a et b. Donc V est symétrique par rapport à deux lettres.

une fonction d'un nombre impair n de lettres, qui a précisément n valeurs.

Soient a et b deux lettres quelconques, et faisons toutes les permutations des $n-2$ autres lettres

$$c, \quad d,\ldots, \quad k, \quad l;$$

il en résultera pour V un nombre de valeurs qui sera l'un des suivants

$$1, \quad 2, \quad 3,\ldots, \quad (n-2), \quad (n-1), \quad n.$$

Mais, d'après la proposition VIII, $n-2$ étant impair, si ce nombre de valeurs est inférieur à $n-2$, il est au plus égal à 2, ce sera donc l'un des cinq nombres

$$1, \quad 2, \quad n-2, \quad n-1, \quad n.$$

Nous allons faire ces cinq hypothèses.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition IV, le nombre des valeurs de V ne peut être égal à n que si cette fonction est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Cela est impossible d'après le corollaire de la proposition V.

3°. *La fonction* V *a* $n-2$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition III, la fonction V ayant en tout n valeurs et n'en ayant que $n-2$ par les permutations de $n-2$ lettres, a une ou deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres. Par conséquent, le nombre de ses valeurs ne peut être égal à n, que si elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

4°. *La fonction* V *a* $n-1$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition III, la fonction V est symétrique par rapport à $n - 2$ lettres, et, par conséquent, elle ne peut avoir n valeurs que si elle est symétrique par rapport à $n - 1$ lettres, d'après la proposition IV.

5°. *La fonction* V *prend ses* n *valeurs par les permutations des* $n - 2$ *lettres* $c, d, \ldots k, l$.

Cela est impossible, d'après la proposition VI, parce que n est un nombre impair.

Conclusion. La première, la troisième et la quatrième hypothèses sont, comme on voit, seules admissibles, et quelle que soit celle qui a lieu, la fonction V est nécessairement symétrique par rapport à $n - 1$ lettres; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Une fonction d'un nombre pair n *de lettres qui a moins de* n *valeurs ne peut en avoir plus de deux, si* n *est supérieur à* 4.

Ce théorème n'a pas lieu pour les fonctions de quatre lettres; et c'est précisément parce qu'on peut former des fonctions de quatre lettres qui n'ont que trois valeurs, qu'on peut résoudre l'équation générale du quatrième degré.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction d'un nombre n de lettres pair et supérieur à 4, et supposons que cette fonction ait moins de n valeurs.

Si l'on considère V comme fonction des $n - 1$ lettres

$$b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l,$$

et qu'on permute ces lettres, on obtiendra un nombre de valeurs distinctes de V, qui, étant par hypothèse inférieur à n, sera l'un des suivants

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad n-2, \quad n-1.$$

Mais, d'après la proposition VIII, comme $n - 1$ est impair, ce nombre de valeurs ne peut s'abaisser au-dessous de $n-1$, sans être égal à 2 ou à 1 ; donc le nombre des valeurs distinctes de V résultant des permutations des $n-1$ lettres $b, c, d, \ldots, k, l$ est l'un des trois suivants

$$1, \quad 2, \quad n-1.$$

Examinons ces trois cas.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux* $n-1$ *lettres* $b, c, d, \ldots, k, l$.

Alors, elle a évidemment n valeurs, ce qui est contre l'hypothèse ; à moins qu'elle ne soit symétrique par rapport à toutes les lettres, et, dans ce cas, elle n'a qu'une seule valeur.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des* $n-1$ *lettres* $b, c, d, \ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition V, la fonction V a 2 ou $2n$ valeurs.

3°. *La fonction* V *a* $n-1$ *valeurs par les permutations des* $n-1$ *lettres* $b, c, d, \ldots, k, l$.

Dans ce cas, comme $n-1$ est impair, la fonction V est symétrique par rapport à $n-2$ lettres, d'après la proposion IX, et alors, d'après la proposition IV, elle a au moins n valeurs.

Conclusion. Puisqu'on suppose que V a moins de n valeurs, et que cette fonction n'est pas symétrique, le second des trois cas précédents est seul possible, et alors la fonction V a deux valeurs seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Si une fonction d'un nombre n *de lettres pair et supérieur à* 6 *a* n *valeurs, elle est symétrique par rapport à* $n-1$ *lettres.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres qui a précisément n valeurs. On suppose n pair et supérieur à 6.

Soient a et b deux lettres quelconques, et permutons les $n-2$ autres lettres

$$c,\ d,\ldots,\ k,\ l.$$

Le nombre des valeurs qu'on obtiendra ainsi pour V ne pouvant, d'après la proposition X, être à la fois plus grand que 2 et moindre que $n-2$ (puisque, par hypothèse, $n-2$ est >4), sera l'un des cinq suivants

$$1,\quad 2,\quad n-2,\quad n-1,\quad n.$$

Nous allons faire ces cinq hypothèses.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition IV, elle ne peut avoir n valeurs que si elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Cela est impossible d'après le corollaire de la proposition V, car alors la fonction V n'aurait, en tout, que deux valeurs, ou elle en aurait plus de n.

3°. *La fonction* V *a* $n-2$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$

Alors la fonction V ayant en tout n valeurs, elle a une ou deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres (proposition III), et, par conséquent, elle ne peut en avoir n en tout que si elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

4°. *La fonction* V *a* $n-1$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Dans ce cas, d'après la proposition III, V est symétrique par rapport à $n-2$ lettres, et, par conséquent, elle ne peut avoir n valeurs que si elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

5°. *La fonction* V *a* n *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Cela est impossible d'après la proposition VII, car alors la fonction

$$[x - \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d, \ldots, k, l)]$$

aurait, par les permutations des $n - 2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, un nombre de valeurs égal à $\frac{n}{2}$, ce qui ne peut être, puisque $\frac{n}{2}$ est $< n - 2$, et > 2.

Conclusion. Le premier, le troisième et le quatrième cas sont seuls possibles, et l'on voit que la fonction V ne peut avoir n valeurs, que si elle est symétrique par rapport à $n - 1$ lettres.

Remarque. La démonstration ne s'applique pas aux fonctions de six lettres, pour lesquelles le théorème n'a pas lieu.

DEUXIÈME PARTIE.

PROPOSITION XII.

LEMME.

Si une fonction de n lettres est symétrique par rapport à n — 3 lettres, mais qu'elle ne le soit pas par rapport à n — 2 lettres, le nombre des valeurs de la fonction n étant > 6, est

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \quad \textit{ou} \quad n(n-1)(n-2).$$

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, n étant > 6, symétrique par rapport aux $n - 3$ lettres

$$d, \ldots, \quad k, \quad l,$$

mais qui ne soit pas symétrique par rapport à $n - 2$ lettres.

Le nombre des valeurs que la fonction V peut acquérir par les permutations des trois lettres a, b, c, devant diviser le produit $1.2.3$, est l'un des quatre nombres 1, 2, 3 ou 6. Nous allons examiner ces quatre cas.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux trois lettres* a, b, c.

On aura toutes les valeurs de la fonction V en formant les $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ combinaisons trois à trois des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$, et permutant dans V les trois lettres a, b, c avec les trois lettres de chacune de ces combinaisons. Or je dis que toutes les valeurs de V ainsi formées sont différentes si n est > 6. Il suffit, pour le prouver, d'établir l'impossibilité des égalités

$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l) = \varphi(d, b, c, a, e, f, g, \ldots, k, l),$$
$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l) = \varphi(d, e, c, a, b, f, g, \ldots, k, l),$$
$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l) = \varphi(d, e, f, a, b, c, g, \ldots, k, l).$$

Cette impossibilité résulte de ce que les seconds membres sont symétriques par rapport aux lettres a et g, tandis que les premiers membres ne le sont pas. La fonction V a donc $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ valeurs.

On voit qu'il est nécessaire pour la démonstration que la fonction V renferme sept lettres au moins.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des trois lettres* a, b, c.

Si l'on pose

$$v = (a-b)(a-c)(b-c),$$

la fonction V aura la forme

$$V = A + Bv,$$

A et B étant des fonctions symétriques de a, b, c. En outre, comme V ou $A + Bv$ est une fonction symétrique des $n-3$ lettres $d, \ldots, k, l$, et que cette fonction se change en $A - Bv$ par la transposition de deux des trois lettres a, b, c, on voit que A et B sont nécessairement des fonctions symétriques de $d, \ldots, k, l$. On obtiendra toutes les valeurs de V en faisant les combinaisons trois à trois des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$, et remplaçant dans la fonction

$$A \pm Bv,$$

les lettres a, b, c successivement par les lettres de chaque combinaison trois à trois. Le nombre des valeurs ainsi formées est $2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ ou $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$. Il n'y a plus qu'à montrer que ces valeurs sont différentes.

Représentons simplement par

$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l)$$

l'une ou l'autre des valeurs $A \pm Bv$; on prouvera, comme précédemment, que les égalités

$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l) = \varphi(d, b, c, a, e, f, g, \ldots, k, l),$$
$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l) = \varphi(d, e, c, a, b, f, g, \ldots, k, l),$$
$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l) = \varphi(d, e, f, a, b, c, g, \ldots, k, l),$$

sont impossibles, parce que le second membre de chacune d'elles est symétrique par rapport à a et g, et que le premier ne l'est pas par hypothèse.

La fonction V a donc effectivement $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ valeurs distinctes.

3°. *La fonction* V *a trois valeurs par les permutations des lettres* a, b, c.

Dans ce cas, elle est symétrique par rapport à deux des trois lettres a, b, c. Supposons que ce soient b et c. Il est évident qu'on obtiendra toutes les valeurs de V en formant les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons deux à deux des n lettres $a, b, c, \ldots, k, l$, écrivant ensuite devant chacune de ces combinaisons, successivement chacune des $n-2$ lettres qui n'y entrent pas, et permutant enfin les trois lettres a, b, c de la fonction V, avec les trois lettres qui composent chacun des arrangements ainsi formés.

Le nombre des valeurs de la fonction V est alors $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

4°. *La fonction* V *a six valeurs par les permutations des lettres* a, b, c.

Dans ce cas, la fonction V change par une permutation quelconque des trois lettres a, b, c. On voit alors aisément qu'elle a autant de valeurs qu'on peut faire d'arrangements de n lettres trois à trois, c'est-à-dire $n(n-1)(n-2)$.

La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION XIII.

LEMME.

Si une fonction de n lettres, n étant > 5, a deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres, le nombre total des valeurs qu'elle peut prendre par les permutations de toutes les lettres est 2, $2n$, $n(n-1)$ ou $2n(n-1)$

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres qui n'a que deux valeurs

$$V_1, \quad V_2,$$

par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$.

La fonction

$$(x - V_1)(x - V_2),$$

où x désigne une variable indéterminée, est symétrique par rapport aux $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, et si elle l'est aussi par rapport à toutes les lettres, la fonction V n'a que les deux seules valeurs V_1 et V_2, d'après la proposition I.

Si la fonction

$$(x - V_1)(x - V_2)$$

n'est pas symétrique par rapport aux n lettres $a, b, \ldots, k, l$, le nombre de ses valeurs sera, d'après la proposition IV, n, $\frac{n(n-1)}{2}$ ou $n(n-1)$. Désignons-le par μ, et soient

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x - V_1^1)(x - V_2^1), \\ (x - V_1^2)(x - V_2^2), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (x - V_1^\mu)(x - V_2^\mu), \end{array} \right.$$

ces μ valeurs elles-mêmes. Voilà μ produits qui sont, par hypothèse, différents; je dis de plus que deux d'entre eux ne sauraient avoir un facteur commun. En effet, supposons, s'il est possible, que les deux premiers des produits (1) aient un facteur commun, que l'on ait, par exemple,

$$V_1^1 = V_1^2 \quad \text{ou} \quad = V_2^2. \tag{2}$$

Les deux fonctions V_1^1 et V_1^2 ont chacune deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres, et comme on suppose $n > 5$, parmi les $n-2$ lettres dont les permutations font acquérir deux valeurs à V_1^1, il y en a au moins deux qui font partie des $n-2$ lettres dont les permutations font acquérir deux valeurs à V_1^2. Si l'on transpose les deux lettres dont nous parlons, les fonctions V_1^1 et V_2^1, V_1^2 et V_2^2 se changeront l'une dans l'autre (introduction); par conséquent, l'égalité (2) conduit à celle-ci

$$V_2^1 = V_2^2 \quad \text{ou} \quad = V_1^2,$$

ce qui est impossible, car autrement les deux premiers des produits (1) seraient identiques, ce qui est contre l'hypothèse.

Maintenant le produit des fonctions (1) est une fonction symétrique des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$; de plus, tous les facteurs linéaires de ce produit sont différents; donc, d'après la proposition I, la fonction V a les valeurs distinctes

$$V_1^1,\quad V_2^1,\quad V_1^2,\quad V_2^2,\ldots,\quad V_1^\mu,\quad V_2^\mu,$$

dont le nombre 2μ est égal à $2n$ ou à $n(n-1)$, ou à $2n(n-1)$.

La proposition est donc démontrée.

Corollaire I. *Si la fonction* V *a* $2n$ *valeurs, on a* $\mu = n$, *et, par conséquent* (proposition IV), *la fonction*

$$(x - V_1)(x - V_2),$$

déjà symétrique par rapport aux $n-2$ *lettres* $c, d, \ldots, k, l$, *l'est par rapport à* $n-1$ *lettres. Donc, d'après la proposition* I, V, *considérée comme fonction de ces* $n-1$ *lettres, n'a que les deux valeurs* V_1 *et* V_2.

Corollaire II. *Si une fonction de n lettres n'a que deux valeurs* *par les permutations de $n - 3$ lettres, et qu'elle ait en tout plus de $2n$ valeurs, elle en a aussi plus de $\frac{n(n-1)}{2}$, si $n > 6$.*

Supposons que la fonction

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l),$$

ait deux valeurs par les permutations des $n - 3$ lettres $d, e, \ldots, k, l$. D'après le lemme précédent, en considérant V comme fonction des $n - 1$ lettres $b, c, d, e, \ldots, k, l$, le nombre de ses valeurs sera

$$2, \quad 2(n-1), \quad (n-1)(n-2), \quad \text{ou} \quad 2(n-1)(n-2).$$

Si la fonction V n'a que deux valeurs par les permutations de $b, c, d, \ldots, k, l$, elle en a 2 ou $2n$ par les permutations de toutes les lettres (proposition V).

Si la fonction V a $2(n-1)$ valeurs par les permutations de $b, c, d, \ldots, k, l$, elle n'a que deux valeurs par les permutations de $n - 2$ de ces $n - 1$ lettres, d'après le corollaire I qui précède, et, par conséquent, elle en a 2 ou $2n$, ou $n(n-1)$, ou $2n(n-1)$ par les permutations des n lettres.

Donc, puisqu'on suppose que la fonction V a plus de $2n$ valeurs, elle en a au moins $(n-1)(n-2)$, c'est-à-dire plus de $\frac{n(n-1)}{2}$, à cause de $n > 6$.

Remarque. Par un raisonnement tout semblable à celui qui nous a servi à démontrer le lemme qui précède, on pourrait déterminer exactement le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres qui a deux valeurs par les permutations de $n - 3$ lettres. Mais, comme ce qui précède suffit pour l'objet que j'ai en vue, je n'entrerai pas dans de plus grands détails.

PROPOSITION XIV.

LEMME.

Le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres ne peut être égal à $n + h$ si n est à la fois plus grand que 6 et que $h + 4$.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant $n + h$ valeurs.

Le nombre des valeurs que prend V par les permutations de $n - 2$ lettres ne peut être à la fois supérieur à 2 et moindre que $n - 2$, puisqu'on suppose $n - 2 > 4$, ce sera donc l'un des $h + 5$ suivants

$$1, \quad 2, \quad n-2, \quad n-1, \ldots, \quad n+h-1, \quad n+h.$$

Mais si la fonction V a, par les permutations de $n - 2$ lettres, un nombre de valeurs égal à l'un des suivants

$$n-2, \quad n-1, \ldots, \quad n+h-2, \quad n+h-1,$$

il y a aussi $n - 2$ lettres dont les permutations lui font acquérir un nombre de valeurs égal ou inférieur à l'un de ceux-ci

$$h+2, \quad h+1, \ldots, \quad 2, \quad 1,$$

d'après la proposition III, et comme $h + 2$ est $< n - 2$, on voit que si la fonction V a $n + h$ valeurs, il y a $n - 2$ lettres dont les permutations lui font acquérir un nombre de valeurs égal à l'un des trois suivants

$$1, \quad 2, \quad n+h.$$

Nous allons démontrer que ces trois cas sont impossibles.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport à* $n - 2$ *lettres.*

Alors, d'après la proposition IV, elle a n, $\frac{n(n-1)}{2}$ ou $n(n-1)$ valeurs.

Le premier cas est donc impossible, puisque, par hypothèse, le nombre $n + h$ des valeurs de V est $< 2n - 4$.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations de* $n - 2$ *lettres.*

Ce second cas est impossible, car, d'après la proposition XIII, le nombre des valeurs de V serait égal à 2 ou au moins égal à $2n$.

3°. *La fonction* V *prend ses* $n + h$ *valeurs par les permutations de* $n - 2$ *lettres.*

Cela est impossible, d'après la proposition VI, si $n+h$ est un nombre impair. Je dis que cela est encore impossible si $n+h$ est pair. En effet, si la fonction V prend toutes ses valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$, elle ne peut être symétrique par rapport à a et b, d'après la proposition VII, et la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l)]\,[x - \varphi(b, a, c, d,\ldots, k, l)],$$

a, par les permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$, un nombre de valeurs égal à $\frac{n+h}{2}$. Mais nous avons supposé $\frac{n+h}{2} < n-2$ et $n-2 > 4$, donc la fonction X ne peut avoir qu'une ou deux valeurs seulement par les permutations de $c, d,\ldots, k, l$, et, par conséquent, la fonction V n'aurait que deux ou quatre valeurs, ce qui est contre la supposition.

La proposition énoncée est donc démontrée.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Le nombre des valeurs d'une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 6 ne peut être ni $n+1$, ni $n+2$, ni $n+3$.

En faisant successivement $h=1$ et $h=2$ dans l'énoncé du lemme qui précède, on voit immédiatement que le nombre des valeurs d'une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 6 ne peut être $n+1$ ni $n+2$.

En faisant $h=3$, on voit pareillement que le nombre des valeurs d'une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 7 ne peut être égal à $n+3$. Il suffit donc, pour achever la démonstration du théorème énoncé, de prouver que ce dernier résultat a lieu encore quand $n=7$, c'est-à-dire que

Une fonction de sept lettres ne peut pas avoir un nombre de valeurs égal à dix.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, e, f, g)$$

une fonction de sept lettres, et supposons qu'elle ait dix valeurs.

Le nombre des valeurs de la fonction V, par les permutations de cinq lettres, devant diviser le produit 1.2.3.4.5, et ne pouvant être ni 3 ni 4, sera l'un des nombres suivants

$$1,\quad 2,\quad 5,\quad 6,\quad 8,\quad 10.$$

Mais si le nombre des valeurs de V, par les permutations de cinq lettres, est 6 ou 8, il y aura cinq lettres dont les permutations feront acquérir à la fonction un nombre de valeurs égal ou inférieur à 4 ou à 2; il y a donc nécessairement cinq lettres dont les permutations feront acquérir à la fonction V un nombre de valeurs égal à l'un des quatre suivants

$$1,\quad 2,\quad 5,\quad 10.$$

Examinons ces quatre cas.

1°. *La fonction V est symétrique par rapport à cinq lettres.*

Alors elle a, d'après la proposition IV, 7, 21 ou 42 valeurs, ce qui est contre l'hypothèse.

2°. *La fonction V a deux valeurs par les permutations de cinq lettres.*

Alors, si elle a plus de deux valeurs, elle en a au moins 14, d'après la proposition XIII, ce qui est contre l'hypothèse.

3°. *La fonction V a cinq valeurs par les permutations de cinq lettres.*

Alors elle est symétrique par rapport à quatre lettres. Si elle est symétrique par rapport à cinq lettres, elle a 7, 21 ou 42 valeurs (proposition IV), sinon elle en a 35, 70, 105 ou 210 (proposition XII), ce qui est contre l'hypothèse.

4°. *La fonction V prend ses dix valeurs par les permutations de cinq lettres.*

Soient c, d, e, f, g ces cinq lettres, la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d, e, f, g)][x - \varphi(b, a, c, d, e, f, g)]$$

aura cinq valeurs par les permutations des cinq lettres c, d, e, f, g, donc elle est symétrique par rapport à quatre de ces lettres. L'équation

$$X = 0$$

ayant pour coefficients des fonctions symétriques de quatre lettres, d, e, f, g par exemple, ses deux racines seront les deux seules valeurs que peut prendre V par les permutations de ces quatre lettres. Ainsi la fonction V n'a qu'une ou deux valeurs par les permutations de quatre lettres. Or la fonction V ne peut être symétrique par rapport aux quatre lettres d, e, f, g, car elle n'aurait qu'une ou cinq valeurs par les permutations des cinq lettres c, d, e, f, g, tandis que nous avons supposé qu'elle en a dix. La fonction V ne peut pas non plus avoir deux valeurs par les permutations des quatre lettres d, e, f, g; car, d'après la proposition XIII, elle en aurait deux seulement ou au moins douze par les permutations de six lettres, ce qui est contre l'hypothèse.

Il est donc démontré qu'une fonction de sept lettres ne peut avoir dix valeurs.

PROPOSITION XVI.

LEMME.

Si une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 8, prend toutes ses valeurs par les seules permutations de $n-2$ lettres, et si elle a plus de deux valeurs, elle en a au moins $2n+4$.

Supposons que la fonction

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

prenne toutes ses valeurs par les seules permutations des $n-2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

On a vu (propositions VI et VII) que la fonction V ne peut être symétrique par rapport aux lettres a et b, et que le nombre de ses valeurs est pair. En outre, en désignant ce nombre par 2μ, la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d,\ldots, k, l)]$$

a un nombre de valeurs égal à μ par les permutations des $n - 2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$.

Cela étant, si le nombre μ est inférieur à $n - 2$, il doit être égal à 1 ou à 2; dans le premier cas, la fonction V n'a que deux valeurs. Le second cas est impossible, car la fonction V qui contient plus de huit lettres aurait un nombre de valeurs égal à quatre.

Je dis, en second lieu, que le nombre μ ne peut être égal à $n - 2$; en effet, si cela était, la fonction X serait symétrique par rapport à $n - 3$ lettres, à cause de $n - 2 > 6$, et alors, d'après la proposition III, la fonction V aurait un nombre de valeurs égal à 1 ou à 2 par les permutations de $n - 3$ lettres,

$$d,\ldots,\quad k,\quad l$$

par exemple. Si la fonction V est symétrique par rapport aux $n - 3$ lettres $d,\ldots, k, l$, elle a $n - 2$ valeurs par les permutations des $n - 2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$; on a donc $2\mu = n - 2$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse par laquelle $\mu = n - 2$. La fonction V a donc deux valeurs par les permutations des $n - 3$ lettres $d,\ldots, k, l$; mais alors, d'après la proposition XIII, la fonction V considérée comme fonction des $n - 1$ lettres

$$b,\quad c,\quad d,\ldots,\quad k,\quad l$$

aurait deux valeurs seulement, ou elle en aurait au moins $2(n - 1)$; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Enfin, le nombre μ ne peut être égal ni à $n - 1$, ni à n, ni à $n + 1$, d'après la proposition XV, donc il est au moins égal à $n + 2$, et, par conséquent, le nombre 2μ des valeurs de V est au moins égal à $2n + 4$, s'il est supérieur à 2. C'est ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

1°. *Si une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 8 a plus de n valeurs, elle en a au moins* $2n$;

2°. *Si une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 8 a* $2n$ *valeurs, il y a* $n-1$ *lettres dont les permutations ne font acquérir à la fonction que deux valeurs.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, et supposons que cette fonction ait plus de n valeurs, mais n'en ait pas plus de $2n$.

D'après la proposition précédente, la fonction V ne pourra prendre toutes ses valeurs par les permutations des $n-2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Désignons par μ le nombre de valeurs qu'elle prend par les permutations de ces $n-2$ lettres, et par $\mu+\nu$ le nombre total de ses valeurs. D'après la proposition III, il y a $n-2$ lettres dont les permutations font acquérir à la fonction V un nombre de valeurs égal ou inférieur à ν : d'ailleurs la somme $\mu+\nu$ n'est pas supérieure à $2n$, par conséquent, des deux nombres μ et ν, l'un au moins est inférieur ou au plus égal à n.

Donc parmi les n lettres de la fonction V, il y en a $n-2$ dont les permutations font acquérir à cette fonction un nombre de valeurs au plus égal à n, et même au plus égal à $n-2$, puisque, d'après la proposition XIV, une fonction de $n-2$ lettres, si n est > 8, ne peut avoir $n-1$ ni n valeurs. Par les permutations des $n-2$ lettres dont il s'agit, la fonction V a donc

$$1, \quad 2, \quad \text{ou} \quad n-2$$

valeurs. Examinons ces trois cas.

1°. *La fonction V est symétrique par rapport à* $n-2$ *lettres.*

Alors, d'après la proposition IV, si V a plus de n valeurs, cette fonction en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres.*

Alors, d'après la proposition XIII, cette fonction, si elle a plus de deux valeurs, en a au moins $2n$.

3°. *La fonction* V *a $n-2$ valeurs par les permutations de $n-2$ lettres.*

Dans ce cas, la fonction V est symétrique par rapport à $n-3$ lettres. Si elle n'est pas symétrique par rapport à $n-2$ lettres, elle a au moins $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ valeurs, d'après la proposition XII. Si elle est symétrique par rapport à $n-2$ lettres, et qu'elle ait plus de n valeurs, elle en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$, d'après la proposition IV.

Conclusion. Dans aucun des trois cas qu'on vient d'examiner, la fonction V n'a en même temps plus de n et moins de $2n$ valeurs. Dans le second cas seulement elle peut avoir $2n$ valeurs, alors elle n'a que deux valeurs par les permutations de $n-1$ lettres (corollaire I, proposition XIII). La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres ne peut être égal ni à $2n+1$, ni à $2n+2$, ni à $2n+3$, si $n > 8$.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, n étant > 8, et supposons que le nombre des valeurs de cette fonction, que je représenterai par $\mu + \nu$, soit égal à l'un des trois nombres

$$2n+1, \quad 2n+2, \quad 2n+3.$$

D'après la proposition XVI, le nombre des valeurs que prendra V par les permutations de $n-2$ lettres, c, d,..., k, l par exemple, doit être inférieur à $\mu+\nu$; je le représenterai par μ, et alors, d'après la proposition III, il y aura $n-2$ des n lettres a, b, c, d,..., k, l, dont les permutations feront acquérir à V un nombre μ' de valeurs égal ou inférieur à ν. Comme la somme $\mu+\nu$ est au plus égale à $2n+3$, l'un des nombres μ et μ' est nécessairement inférieur ou égal à $n+1$, donc il y a $n-2$ lettres dont les permutations font acquérir à la fonction un nombre de valeurs égal ou inférieur à $n+1$; ce nombre de valeurs sera, par conséquent, l'un des suivants

$$1,\quad 2,\quad n-2,\quad n-1,\quad n,\quad n+1.$$

Mais $n-2$ étant >6, la fonction V ne peut avoir ni $n-1$, ni n, ni $n+1$ valeurs par les permutations de $n-2$ lettres (proposition XV), donc la fonction V a

$$1,\quad 2,\quad \text{ou}\quad n-2$$

valeurs par les permutations de $n-2$ lettres prises parmi les n

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\ldots,\quad k,\quad l.$$

On va voir que cela est impossible.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport à $n-2$ lettres.*

Dans ce cas, elle a n valeurs ou au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ (proposition IV), c'est-à-dire plus de $2n+3$, si n est >8; ce qui est contre l'hypothèse.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres.*

Alors elle ne peut en avoir plus de $2n$ sans en avoir au moins $n(n-1)$ (proposition XIII), ce qui est contre l'hypothèse.

3°. *La fonction* V *a $n-2$ valeurs par les permutations de $n-2$ lettres.*

Elle est alors symétrique par rapport a $n-3$ lettres, et si elle a plus de n valeurs, elle en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ (propositions IV et XII), ce qui est contre l'hypothèse.

La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION XIX.

LEMME.

Si une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 10 a plus de deux valeurs, et qu'elle prenne toutes ses valeurs par les permutations de $n-2$ lettres, elle a au moins $4n$ valeurs distinctes.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant plus de deux valeurs, et qui peut prendre toutes ses valeurs par les seules permutations des $n-2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Désignons par 2μ le nombre de ces valeurs qu'on sait être pair, et considérons, comme dans la proposition XVI, la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d, \ldots, k, l)],$$

qui prend μ valeurs distinctes par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$. On a vu, dans la proposition XVI, que μ est au moins égal à $n+2$ si n est > 8; nous allons montrer actuellement que μ est au moins égal à $2n$ si n est > 10.

En premier lieu, le nombre μ des valeurs que prend X par les permutations de $n-2$ lettres étant supérieur à $n-2$ est au moins égal à $2n-4$ (proposition XVII).

En second lieu, je dis qu'on ne peut avoir $\mu = 2n-4$. Supposons, en effet, que μ soit égal à $2n-4$; alors, d'après la proposition XVII, la fonction X aura précisément deux valeurs par les permutations de $n-3$ des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$. Soient X_1 et X_2 ces deux valeurs; la fonction $X_1 X_2$ sera symétrique par rapport à $n-3$ lettres, et, par conséquent, d'après la proposition I, la fonction V, qui est une des racines de l'équation du quatrième degré

$$X_1 X_2 = 0,$$

aura au plus quatre valeurs par les permutations des $n-3$ lettres $d, \ldots,$

k, l; d'ailleurs ce nombre de valeurs ne pouvant être ni 3 ni 4, est nécessairement 1 ou 2; donc la fonction V a $n-2$ ou $2(n-2)$ valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, car on suppose qu'elle en a plus de deux. On a donc $2\mu = n-2$ ou $= 2(n-2)$, ce qui est contre l'hypothèse.

Enfin, d'après la proposition XVIII, le nombre μ ne peut être égal ni à $2n-3$, ni à $2n-2$, ni à $2n-1$, puisqu'on a $n-2>8$; donc μ est au moins égal à $2n$, et, par conséquent, la fonction V a au moins $4n$ valeurs.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Si une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 10 a plus de $2n$ valeurs, elle en a au moins $4n$.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, ayant plus de $2n$ valeurs, n étant > 10.

Soient a et b deux lettres quelconques, et permutons les $n-2$ autres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Si, par ces permutations, la fonction V prend toutes ses valeurs, elle a au moins $4n$ valeurs, d'après la proposition précédente, et le théorème est démontré. Supposons donc que la fonction V ne puisse pas prendre toutes ses valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$. Appelons μ le nombre des valeurs de V résultant des permutations de ces $n-2$ lettres, et $\mu + \nu$ le nombre total de ses valeurs; rappelons enfin qu'il y a $n-2$ lettres dont les permutations font acquérir à V un nombre μ' de valeurs égal ou inférieur à ν.

Supposons d'abord que l'un des nombres μ et μ' ne surpasse pas $n-2$, il sera alors égal à l'un des trois nombres

$$1, \quad 2, \quad n-2.$$

Dans le premier cas, la fonction V étant supposée avoir plus de $2n$

valeurs, en aura au moins $\frac{n(n-1)}{2}$, c'est-à-dire plus de $4n$ à cause de $n > 10$.

Dans le second cas, la fonction V a au moins $n(n-1)$ valeurs; et enfin, dans le troisième, comme elle est symétrique par rapport à $n-3$ lettres, elle a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ valeurs [*].

Supposons maintenant que chacun des nombres μ et μ' surpasse $n-2$. Alors $n-2$ étant > 8, ces deux nombres seront au moins égaux à $2(n-2)$ (proposition XVII).

Si l'un des nombres μ et μ' est égal à $2(n-2)$, la fonction V a deux valeurs par les permutations de $n-3$ lettres, d'après la proposition XVII, et, par conséquent, comme elle a plus de $2n$ valeurs, elle en a aussi plus de $\frac{n(n-1)}{2}$ (proposition XIII, corollaire II) et, à fortiori, plus de $4n$.

Enfin, d'après la proposition XVIII, aucun des nombres μ et μ' ne peut être égal à $2n-3$, ni à $2n-2$, ni à $2n-1$; si donc μ et μ' surpassent $2(n-2)$, chacun d'eux est au moins égal à $2n$, et, par conséquent, leur somme $\mu+\mu'$, et, à fortiori, la somme $\mu+\nu$, qui représente le nombre des valeurs de V, est au moins égale à $4n$.

Donc, dans tous les cas, la fonction V a au moins $4n$ valeurs, si elle en a plus de $2n$.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

Une fonction de n lettres qui a plus de $2n$ valeurs, en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ si n est égal à 13 ou à 14.

Soit

$$\mathrm{V} = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant plus de $2n$ valeurs (on suppose $n = 13$

[*] Ce raisonnement est le même que celui de la proposition XVII.

ou 14), et permutons les $n-2$ lettres

$$c,\quad d,\ldots,\quad k,\quad l.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que la fonction V prend ou ne prend pas toutes ses valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$.

1°. Supposons d'abord que la fonction V prenne toutes ses valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$, et désignons par 2μ ce nombre de valeurs qui sera au moins égal à $4n$, d'après la proposition XIX. Nous avons déjà vu que la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l)]\,[x - \varphi(b, a, c, d,\ldots, k, l)]$$

a μ valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$, et, comme on a $\mu > 2(n-2)$, μ sera au moins égal à $4(n-2)$; en vertu de la proposition précédente, par conséquent, le nombre 2μ des valeurs de la fonction V sera au moins égal à $8(n-2)$ et, par suite, supérieur à $\frac{n(n-1)}{2}$, car on suppose $n = 13$ ou 14. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

2°. Supposons que la fonction V ait $\mu + \nu$ valeurs et qu'elle ne prenne que μ valeurs distinctes par les permutations de $c, d,\ldots, k, l$, soit aussi μ' le nombre égal ou inférieur à ν qui, d'après la proposition III, représente le nombre des valeurs que prend la fonction V par les permutations de $n-2$ lettres.

Par un raisonnement identique à celui du théorème précédent, on fera voir que si l'un des nombres μ et μ' ne surpasse pas $2(n-2)$, la fonction V a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ valeurs. Supposons donc μ et μ' supérieurs à $2(n-2)$; alors $n-2$ étant égal à 11 ou à 12, la fonction V, qui a plus de $2(n-2)$ valeurs par les permutations de $n-2$ lettres, en aura au moins $4(n-2)$. Par conséquent, chacun des nombres μ et μ' est au moins égal à $4(n-2)$, et, par suite, la fonction V a au moins $8(n-2)$ valeurs, c'est-à-dire plus de $\frac{n(n-1)}{2}$, comme dans le premier cas.

La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

Si une fonction d'un nombre quelconque n de lettres supérieur à 12 a plus de 2n valeurs, elle en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$.

Je vais démontrer que si le théorème a lieu pour les fonctions de $n-2$ lettres, il a lieu aussi pour les fonctions de n lettres, et, comme on vient de l'établir pour les fonctions de 13 et 14 lettres, il le sera généralement.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, n étant > 14, et permutons les $n-2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Comme dans le théorème précédent, je distinguerai deux cas, suivant que la fonction prend ou ne prend pas toutes ses valeurs par les permutations de ces $n-2$ lettres.

1°. Supposons que la fonction V prenne toutes ses valeurs par les seules permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, et considérons la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d, \ldots, k, l)];$$

si μ désigne le nombre des valeurs que prend la fonction X par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, V aura 2μ valeurs, et comme on suppose $2\mu > 2n$, ce nombre sera au moins égal à $4n$, d'après la proposition XIX, et, par conséquent, la fonction X aura au moins $2n$ valeurs, c'est-à-dire plus de $2(n-2)$ par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$; donc, puisque la proposition énoncée est supposée vraie pour les fonctions de $n-2$ lettres, la fonction X aura au moins $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ valeurs par les permutations de c, d,..., k, l, et, par suite, la fonction V aura au moins $(n-2)(n-3)$ valeurs, c'est-à-dire plus de $\frac{n(n-1)}{2}$, car on suppose $n > 14$. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

2°. Supposons que la fonction V ait $\mu + \nu$ valeurs, et qu'elle ne prenne que μ valeurs par les permutations des $n-2$ lettres c, d,..., k, l.

Soit μ' le nombre, égal ou inférieur à ν, des valeurs que prend V par les permutations de $n-2$ lettres.

Comme dans les deux propositions précédentes où j'ai employé le même raisonnement, on fera voir que si l'un des nombres μ et μ' ne surpasse pas $2(n-2)$, la fonction V ne peut avoir moins de $\frac{n(n-1)}{2}$ valeurs. Supposons donc μ et μ' supérieurs à $2(n-2)$: alors, comme on suppose le théorème énoncé vrai pour les fonctions de $n-2$ lettres, chacun des nombres μ et μ' sera au moins égal à $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$; par conséquent, la somme $\mu + \nu$, qui représente le nombre total des valeurs de V, sera égale ou supérieure à $(n-2)(n-3)$ et, à fortiori, supérieure à $\frac{n(n-1)}{2}$.

La proposition est donc démontrée.