JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-M.-C. DUHAMEL

Note sur la théorie des tuyaux d'orgues, dits tuyaux à cheminée

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 197-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__197_0>

NOTE

SUR LA

THÉORIE DES TUYAUX D'ORGUES,

DITS TUYAUX A CHEMINÉE;

PAR M. J.-M.-C. DUHAMEL.

1. Daniel Bernoulli a donné le premier une théorie mathématique du mouvement de l'air dans les tuyaux à cheminée, c'est-à-dire dans les tuyaux composés de deux parties de grosseur différente. Cette théorie est inexacte; elle est fondée sur une supposition dont il est facile de démontrer la fausseté : mais il est à remarquer que l'erreur n'affecte pas les résultats les plus importants, ceux qui se rapportent aux sons que le tuyau peut faire entendre. Je me propose ici de rectifier cette théorie, et d'expliquer par quelle compensation d'erreurs la supposition fausse de ce grand physicien ne l'a pas empêché d'obtenir les mêmes sons auxquels on est conduit par une analyse exacte.

Soit AB un tuyau cylindrique, bouché en A, suivi d'un tuyau cylindrique BC, ouvert en C et en B. Soient ω, ω' les aires des bases de ces deux cylindres; l, l' leurs longueurs. Il s'agit de déterminer les mouvements périodiques simples, très-petits, que peuvent prendre toutes les tranches du gaz. Par *mouvement simple,* nous entendons un mouvement où les déplacements de tous les points varient en conservant toujours les mêmes rapports, et, par conséquent, où le déplacement est exprimable par le produit d'une même fonction du temps par un coefficient, différent d'un point à l'autre : de sorte que, pour l'ensemble des points, le déplacement est le produit d'une fonction du temps t par une fonction de l'abscisse x.

D'après la théorie du mouvement longitudinal d'un gaz dans un tuyau cylindrique, on sait que le déplacement u d'une tranche est assujetti à l'équation aux différentielles partielles,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}, \tag{1}$$

a étant une constante dépendante du gaz dont il s'agit; et que, par conséquent, dans une portion cylindrique de gaz, tout mouvement périodique simple ne peut donner, pour u, qu'une expression de la forme

$$u = \mathrm{A}\sin(mx + \alpha)\sin(amt + \beta). \tag{2}$$

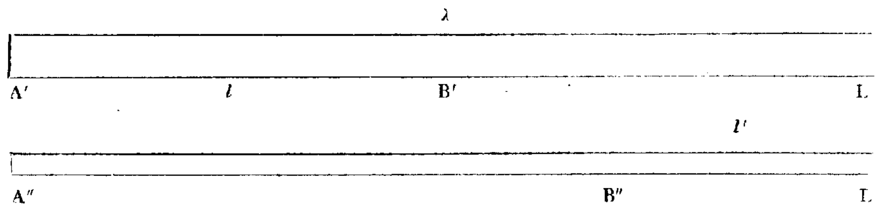
Cette forme conviendra exclusivement à toute portion cylindrique d'une masse quelconque de gaz, animée d'un mouvement simple, soit que cette portion soit isolée, au moyen de cloisons fixes à ses deux extrémités, soit qu'elle communique à d'autres portions de gaz. Elle résulte de la simple supposition que le gaz situé dans la partie cylindrique ne puisse s'y déplacer que de quantités infiniment petites, et soit animé d'un mouvement périodique simple.

Nous admettons ici que tous les points du gaz se meuvent par tranches parallèlement aux génératrices du tuyau; ce qui ne peut être entièrement exact à cause du changement de diamètre qui doit apporter un trouble, non calculable, aux environs de la jonction : nous sommes obligé, comme D. Bernoulli, de négliger cette cause d'erreur, dont l'influence doit être faible dans les mouvements infiniment petits.

La densité ne pouvant varier brusquement d'un point à un autre dans une masse quelconque de gaz, d'une manière permanente (sans quoi une tranche infiniment mince prendrait une vitesse infinie), nous devrons admettre qu'à la section de jonction des deux tuyaux la densité soit la même dans l'un et dans l'autre, et, par suite, la force élastique. De plus, pour qu'il n'y ait ni discontinuité ni pénétration dans le gaz, il faut que les vitesses des tranches infiniment voisines de cette section soient en raison inverse des aires des bases des deux tubes.

Enfin, nous supposerons que, si l'une des deux extrémités est en communication avec une masse indéfinie de gaz, la force élastique y soit la même dans ce tuyau que dans ce gaz, et, par conséquent, invariable; et que, si le tuyau est fermé à une de ses extrémités, la tranche de gaz qui y est contiguë soit constamment immobile.

Quand les mouvements simples seront déterminés, rien ne sera plus facile que d'exprimer par leur moyen les mouvements les plus composés.



2. Nous allons chercher à ramener le mouvement dans le tuyau composé au mouvement dans des tuyaux uniformes, c'est-à-dire dont la section soit partout la même.

Admettons donc que le tuyau composé soit animé d'un mouvement simple; nous remarquerons d'abord que, dans toute l'étendue de la portion AB, le déplacement relatif à un mouvement simple quelconque sera représenté par une expression de la forme (2), et que, par conséquent, il existe un tuyau uniforme A'L, fermé en A', ouvert en L, d'une certaine longueur λ, et qui sera susceptible d'avoir un mouvement qui coïncide dans une longueur $A'B' = l$ avec celui de AB.

Il existera de même un tuyau uniforme A''L, dont le mouvement, dans une longueur $LB'' = l'$ prise à partir de l'extrémité ouverte L, sera le même que celui qui a lieu dans la partie BC. Ce second tuyau devra avoir la même longueur λ que le premier, afin qu'il puisse avoir les mouvements simples de même durée, comme cela doit être, puisqu'il en est ainsi, par hypothèse, dans AB et BC.

Mais il n'est nullement démontré que le mouvement doive être identiquement le même dans ces deux tuyaux de longueur λ; il en est même tout autrement; et c'est précisément l'erreur que Bernoulli a commise en admettant qu'un seul tuyau, d'une longueur convenable, pouvait, dans des longueurs l, l' prises respectivement à partir de ses deux extrémités, présenter les mouvements qui ont lieu dans les deux parties du tuyau proposé.

Désignons par v, v' les déplacements des tranches dans ces deux tuyaux; on aura d'abord les deux équations indéfinies,

$$\frac{d^2v}{dt^2} = a^2\frac{d^2v}{dx^2}, \quad \frac{d^2v'}{dt^2} = a^2\frac{d^2v'}{dx^2}.$$

Un mouvement simple quelconque du premier sera représenté par une équation semblable à l'équation (2), et l'on aura

$$v = \mathrm{M}\sin(nx+\alpha)\sin(ant+6),$$

ou seulement, en observant que l'on doit avoir $v = 0$ pour $x = 0$,

$$(3)\qquad v = \mathrm{M}\sin nx\sin(ant+6).$$

La valeur de v' sera de même forme, et le facteur fonction de t devra être identique à celui de v, d'après ce qui a été dit précédemment; on devra donc avoir nécessairement

$$(4)\qquad v' = \mathrm{M}'\sin nx\sin(ant+6).$$

Il faut maintenant assujettir ces valeurs de v, v' aux conditions particulières que nous avons indiquées.

A l'extrémité L, on doit avoir

$$\frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{dv'}{dx} = 0,$$

ce qui exige

$$\cos n\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad n\lambda = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

k pouvant être un nombre entier quelconque. Mais, comme il suffit de prendre la plus petite longueur pour le tuyau simple, on prendra $k = 0$ et

$$(5)\qquad n\lambda = \frac{\pi}{2}.$$

De plus, la densité en B′ devant être la même qu'en B″, on aura

$$(6) \qquad M \cos nl = M' \cos n(\lambda - l') = M' \sin nl'.$$

Enfin, les vitesses en B′ et B″ devant être en raison inverse des sections ω, ω', on aura cette dernière condition

$$(7) \qquad M\omega \sin nl = M'\omega' \sin n(\lambda - l') = M'\omega' \cos nl'.$$

Divisons les deux membres de l'équation (7) par ceux de l'équation (6), ce qui peut se faire, à moins que ces derniers ne soient nuls; nous aurons

$$(8) \qquad \omega \operatorname{tang} nl = \omega' \cot nl' \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} nl \operatorname{tang} nl' = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Si l'on introduisait λ au lieu de n, cette équation deviendrait

$$\operatorname{tang}\frac{\pi l}{2\lambda}\operatorname{tang}\frac{\pi l'}{2\lambda} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Quant au cas où l'on satisferait à l'équation (6) en annulant ses deux membres, c'est-à-dire en posant

$$\cos nl = 0, \quad \sin nl' = 0,$$

on pourra, par extension, le regarder comme renfermé dans l'équation (8), où l'on admettrait la solution

$$\operatorname{tang} nl = \infty, \quad \cot nl' = \infty.$$

De cette manière, les équations (7) et (8) peuvent remplacer complétement les équations (6) et (7).

L'équation (8) détermine pour n une infinité de valeurs, à chacune desquelles correspond une période θ pour les mouvements de chaque tranche, et, par suite, un son déterminé. La valeur de cette période est

$$\theta = \frac{2\pi}{an}.$$

La valeur correspondante du tuyau simple consonnant avec le tuyau composé est

$$\lambda = \frac{a\theta}{4},$$

et le rapport $\frac{M}{M'}$ a pour valeur

$$\frac{M}{M'} = \frac{\sin nl'}{\cos nl}.$$

3. Nous concluons de tout ce qui précède que, si le tuyau proposé AC est susceptible d'un mouvement simple, le gaz contenu dans la partie AB aura le même mouvement que celui qui sera contenu dans la partie $A'B' = l$ du tuyau uniforme $A'L$ ayant pour longueur λ et pour section ω, et que le gaz contenu dans BC aura le même mouvement que celui de la partie $B''L = l'$ du tuyau uniforme $A''L$ qui a pour longueur λ et pour section ω'.

Mais, comme on ne peut admettre, à priori, que le tuyau proposé soit susceptible d'un mouvement simple, il n'y a jusqu'ici qu'une solution hypothétique; et il reste à démontrer que les divers mouvements auxquels nous venons de parvenir peuvent, en effet, exister dans ce tuyau : ce qui nous donnera la solution complète du problème des mouvements simples.

Remarquons d'abord que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placé, une tranche de gaz se trouve dans les mêmes conditions si on lui offre un même volume où elle puisse se répandre, quelle que soit la section qu'on lui donne, pourvu que le gaz qui la suit immédiatement soit de même densité dans tous les cas. Or, si l'on considère simultanément les mouvements des tranches en B', B'', les volumes qu'elles traversent en un même temps dans les deux tuyaux sont égaux, et leurs densités sont toujours égales, d'après les équations (6) et (7). D'où il suit que le mouvement de B' ne serait nullement altéré si l'on arrêtait le tuyau $A'L$ en B' et qu'on le fît suivre de la partie $B''L$ du tuyau $A''L$, à la condition que le mouvement y aurait lieu comme il avait effectivement lieu dans $A''L$. Et de même, si l'on coupait le tuyau $A''L$ en B'' et qu'on substituât à la partie $A''B''$ le tuyau $A'B'$, à la condition que le mouvement y resterait ce qu'il était dans cette partie de $A'L$, le mouvement du gaz situé dans la partie $B''L$ ne serait pas altéré. Donc, si dans le tuyau proposé AL on part d'un état initial formé dans AB et BL des deux états initiaux respectifs qui avaient lieu dans $A'B'$ et $B''L$, le mouvement qu'on observera dans ce tuyau composé sera identique en AB et BL à ce qu'il serait respectivement dans les deux portions $A'B'$, $B''L$ des deux tuyaux uniformes vibrant isolément.

Il résulte de là que, par le procédé que nous avons suivi, nous sommes parvenu à obtenir un mouvement simple dans AL, et comme nous avons prouvé qu'il ne saurait y en avoir d'autres que ceux que fournit ce procédé, nous avons la solution complète des mouvements simples dans les tuyaux à cheminée.

4. Pour connaître tous ces mouvements simples, il faut déterminer toutes les valeurs de n qui peuvent satisfaire à l'équation (8),

$$\omega \operatorname{tang} nl = \omega' \cot nl'.$$

Soit μ la plus grande commune mesure de l, l', de sorte que l'on ait

$$l = p\mu, \quad l' = p'\mu;$$

l'équation (8) deviendra

$$\omega \operatorname{tang} np\mu = \omega' \cot np'\mu,$$

et, en faisant $n\mu = X$,

$$\omega \operatorname{tang} pX = \omega' \cot p'X.$$

Construisons maintenant les courbes dont les équations sont

$$Y = \frac{\omega}{\omega'} \operatorname{tang} pX, \quad Y = \cot p'X;$$

les abscisses de leurs points de rencontre, qui seront deux à deux égales et de signes contraires, donneront toutes les valeurs de $n\mu$, et, par suite, toutes les valeurs cherchées de n.

Quant aux racines exceptionnelles de l'équation (8), qui rendent $\operatorname{tang} nl$ et $\cos nl'$ infinies, elles rendront $\operatorname{tang} pX$ et $\cot p'X$ infinies et correspondront, par conséquent, aux valeurs de X, qui donneront une asymptote commune aux deux courbes, si toutefois il en existe. On peut donc les considérer comme fournies elles-mêmes par l'intersection de ces courbes, pourvu que l'on regarde deux branches de courbe, asymptotes d'une même droite et dans le même sens, comme se rencontrant à l'infini.

Pour qu'il y ait des asymptotes communes aux deux courbes, il faut que l'on puisse avoir en même temps, k, k' désignant deux nombres entiers,

$$pX = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad p'X = k'\pi,$$

ce qui exige la condition

$$\frac{p}{p'} = \frac{2k+1}{2k'} \quad \text{ou} \quad \frac{l}{l'} = \frac{2k+1}{2k'}.$$

Il faut donc que les deux longueurs l, l' aient une commune mesure, et qu'elle soit contenue un nombre impair de fois dans l, et pair dans l'. Soient $p = 2q+1$, $p' = 2q'$; toutes les valeurs de k et k' devront satisfaire à l'équation indéterminée

$$\frac{2k+1}{2k'} = \frac{2q+1}{2q'},$$

de sorte que k et k' devront croître de quantités correspondantes qui soient entre elles comme $2q+1$ et $2q'$, et, par conséquent, l'intervalle entre leurs valeurs consécutives sera $2q+1$ pour k et $2q'$ pour k': on aura donc

$$k' = q' + 2rq', \quad k = q + (2q+1)r.$$

Les valeurs de X sont données par la formule

$$X = (2r+1)\frac{\pi}{2},$$

et les valeurs correspondantes de n par celle-ci,

$$n = \frac{(2r+1)\pi}{2\mu}.$$

Si l'on veut déterminer les racines de l'équation (8) autrement que par des constructions, on pourra poser $\tang X = m$, exprimer $\tang pX$, $\tang p'X$ au moyen de m, d'après les formules relatives aux tangentes des arcs multiples. Il en résultera une équation algébrique en m qui déterminera un nombre fini de racines réelles, à chacune desquelles correspondra une infinité de valeurs équidifférentes de X, et, par suite, de n.

Les valeurs de n étant connues, si l'on en considère une quelconque, on aura, pour un mouvement simple quelconque du tuyau composé,

$$(9) \qquad \begin{cases} v = \mathrm{M} \sin nx \sin(ant + \epsilon), \\ v' = \mathrm{M} \dfrac{\cos nl}{\sin nl'} \sin nx \sin(ant + \epsilon), \end{cases}$$

M et ϵ restant indéterminés.

On pourra ensuite, au moyen de ces mouvements simples, former tous les mouvements qui peuvent avoir lieu dans le tuyau; il suffira de faire la somme des expressions (9) prises pour toutes les valeurs de n en changeant de l'une à l'autre les coefficients M, ϵ, et de déterminer, suivant la méthode ordinaire, ces coefficients de manière à représenter un état initial arbitraire.

5. On aurait pu procéder d'une autre manière, en exprimant les conditions particulières à certains points du tuyau composé, sans chercher à ramener son mouvement à celui de deux tuyaux composés. C'est la marche que l'on suit ordinairement dans les questions de ce genre; et il est facile de voir qu'elle conduit aux mêmes calculs.

Soient v, v' les déplacements des tranches de gaz, prises respectivement dans les parties AB, BC du tuyau proposé. On aura d'abord les équations générales

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad \frac{d^2 v'}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 v'}{dx^2},$$

et les conditions particulières suivantes :

$$\begin{cases} x = 0, \\ v = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = l + l', \\ \dfrac{dv'}{dx} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = l; \\ \omega v = \omega' v'; \\ \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{dv'}{dx}. \end{cases}$$

On satisfera aux équations générales et aux deux premières équations particulières en prenant

$$v = \mathrm{M} \sin nx \sin(ant + \epsilon),$$
$$v' = \mathrm{M}' \cos n(l + l' - x) \sin(ant + \epsilon).$$

Les deux dernières conditions donnent

$$\mathrm{M} \cos nl = \mathrm{M}' \sin nl', \quad \mathrm{M}\omega \sin nl = \mathrm{M}'\omega' \cos nl'.$$

Éliminant entre elles $\frac{M}{M'}$, on obtient l'équation

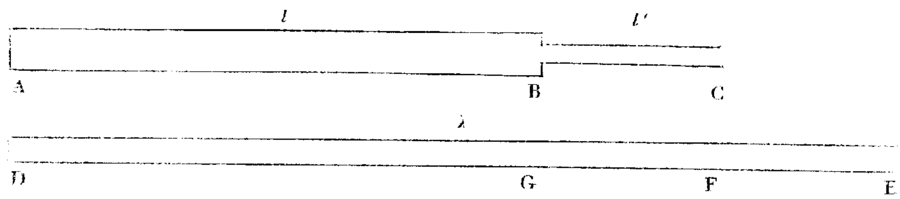
$$\tang nl \tang nl' = \frac{\omega'}{\omega},$$

qui coïncide avec l'équation (8). On trouvera donc pour φ les mêmes valeurs que par la méthode précédente, et, par conséquent, on aura, non-seulement les mêmes sons, mais encore les mêmes mouvements pour les tranches de gaz de la partie AB.

Il semble au premier abord que, dans la partie BC, le mouvement n'est pas le même que dans le cas précédent, parce que la valeur de φ' n'est pas la même. Mais il faut bien remarquer que x désigne ici la distance d'un point de BC au point A, et que, dans le calcul précédent, x désignait la distance d'un point de BC à l'extrémité fermée du tuyau de longueur $\lambda = \frac{\pi}{2n}$. Il faudrait donc, pour établir l'identité des deux expressions, remplacer dans notre dernière valeur de φ', x par $(x + l + l' - \lambda)$. Elle devient alors, en effet,

$$\varphi' = M \frac{\cos nl}{\sin nl'} \sin nx \sin (ant + \beta).$$

6. Examinons maintenant la marche suivie par Daniel Bernoulli.



Soit de même ABC un tuyau fermé en A, ouvert en C, ayant pour section ω dans une étendue AB $= l$, et pour section ω' dans l'étendue BC $= l'$. Les conditions qu'il s'impose en B font encore que la densité soit la même dans les deux parties du tuyau, et que les vitesses y soient en raison inverse des sections.

Il admet d'abord, par des considérations très-sommaires, qu'il existe un tuyau simple DE, d'une certaine longueur inconnue λ, non-seulement qui puisse rendre le même son, mais encore tel, que le mouvement y soit identique à celui de AB, dans une étendue DG.

prise égale à AB à partir de l'extrémité bouchée D, et que le mouvement y soit identique à celui de BC dans une étendue FE prise égale à BC à partir de l'extrémité ouverte E. En conséquence, il admet que dans le tuyau DE les densités aux points G, F seront égales entre elles, et les vitesses dans le rapport de ω à ω'.

Cela posé, il considère à une époque quelconque l'excursion c de la tranche en C; ce sera aussi à la même époque l'excursion de la tranche E du tuyau DE. Il en déduit, par la loi connue dans les tuyaux uniformes, l'excursion de la couche en F, qui sera la même que celle de la tranche B dans le tuyau CB. En la multipliant par le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, il en déduit celle de la tranche en B dans le tuyau AB, qui doit être la même que celle de la tranche en G dans le tuyau DE. Mais, d'après les lois des tuyaux uniformes, l'excursion ainsi calculée pour la tranche en G ne correspond plus à une excursion égale à c au point E. Et comme cette dernière ne peut avoir deux valeurs différentes au même instant, on trouverait, en les égalant, une première condition qui déterminerait λ, et qui serait

$$\sin\frac{\pi l}{2\lambda} = \frac{\omega'}{\omega}\cos\frac{\pi l'}{2\lambda}.$$

Cependant Bernoulli ne la pose pas parce qu'il ne pourrait plus disposer de λ de manière à satisfaire à la condition nécessaire de l'égalité des densités en F et G. Il se borne à dire que, relativement au mouvement dans la partie DG, l'excursion en E doit avoir une valeur différente de celle qu'on y avait supposée d'abord. Sans être arrêté par cette contradiction, il cherche la densité en G d'après cette seconde valeur de l'excursion en E, et calcule la densité en F d'après la première valeur c de l'excursion en E. Il égale ces deux densités et trouve l'équation suivante, qui ne diffère pas de la nôtre,

$$\operatorname{tang}\frac{\pi l}{2\lambda}\operatorname{tang}\frac{\pi l'}{2\lambda} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

7. Il est facile maintenant d'apercevoir comment ses erreurs se sont compensées, et l'ont conduit à une équation juste pour la détermination de λ, et, par suite, des sons que peut rendre le tuyau composé.

Sa première erreur a été de croire qu'un tuyau simple pouvait avoir dans deux de ses parties les mêmes mouvements qui ont lieu dans les deux parties du tuyau composé. Nous venons de voir que cela était impossible, parce que la longueur du tuyau simple serait déterminée sans que la dernière condition fût satisfaite. Sa seconde erreur a consisté dans la détermination de la densité en G, d'après une fausse valeur de l'excursion de la tranche en E; mais comme cette valeur, impossible dans le tuyau unique DE, est calculée précisément comme le serait celle d'un second tuyau, choisi comme nous l'avons fait dans notre première solution, il s'est trouvé naturellement conduit à la même équation que nous.

C'est ainsi que ses deux erreurs se sont compensées dans la recherche de l'équation qui détermine λ, et, par suite, le son du tuyau. Le reste de sa solution ne serait pas exact, puisque le mouvement des deux parties de AC ne peut coïncider avec celui des deux parties DG, FE. Mais comme il n'a pu faire d'expériences que sur les sons, et qu'il a dû les trouver d'accord avec les longueurs de λ qu'il tirait de son équation, il aura été confirmé par là dans l'opinion que sa théorie était exacte.

On peut conjecturer, d'après la marche de ses idées, que s'il avait reconnu sa théorie défectueuse, il aurait aperçu facilement que le seul moyen de faire disparaître les contradictions était de considérer deux tuyaux simples, et qu'il aurait obtenu précisément celle que nous avons établie en commençant.

Bernoulli traite ensuite un second cas qui se présente plus ordinairement dans la pratique; c'est celui des tuyaux à cheminée, ouverts des deux côtés. Ses hypothèses et ses erreurs sont les mêmes que dans le premier cas, et l'équation dont dépend l'évaluation des sons est encore inexacte. L'explication de ces diverses circonstances ne différant en rien de celle que nous venons de donner, nous laisserons de côté ces détails qui n'offriraient aucun intérêt nouveau.