JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Théorème sur les arcs des lignes aplanétiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 194-196.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__194_0>

THÉORÈME

SUR LES ARCS DES LIGNES APLANÉTIQUES;

PAR M. WILLIAM **ROBERTS**.

Les arcs des ovales de Descartes, ou, comme on a coutume de dire aujourd'hui, des lignes *aplanétiques*, quoique dépendant, en général, d'une transcendante fort compliquée, jouissent d'une propriété assez simple qui n'a pas encore, je crois, été remarquée.

On doit se rappeler que la courbe complète se compose de deux ovales conjugués [*]. Maintenant voici la propriété que je veux établir :

« Soient P_1, P_2 deux points qu'un rayon vecteur, issu d'un foyer, » détermine sur la courbe; soient aussi P'_1, P'_2 deux points qu'un » second rayon vecteur, tiré du même foyer, détermine d'une ma- » nière semblable. La différence des deux arcs $P_1P'_1$ et $P_2P'_2$ sera » égale à un arc d'ellipse. »

Pour le faire voir, nous chercherons d'abord une formule pour la rectification des courbes comprises dans l'équation générale

$$(1) \qquad r^2 - 2r\Omega + \alpha = 0,$$

dans laquelle Ω désigne une fonction quelconque de l'angle polaire ω, et α une quantité constante. On trouvera facilement que si s_1, s_2 sont les arcs qui répondent à la même valeur de ω, on aura, en

---

[*] *Voir* un article de M. Quételet, *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles*, tome V, et l'*Aperçu historique* de M. Chasles, page 350, note XXI.

faisant $d\Omega = \Omega' d\omega$,

$$s_1 + s_2 = 2\int \sqrt{\frac{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}{\Omega^2 - \alpha}}\, \Omega\, d\omega,$$

$$s_1 - s_2 = 2\int \sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}\, d\omega.$$

Cela posé, considérons une ligne aplanétique. Sa propriété fondamentale s'exprime par la formule

$$r + mr' = n,$$

où r, r' sont les rayons vecteurs tirés de deux points fixes à un point quelconque sur la courbe, et m, n sont des constantes. En désignant par ω l'angle que fait le rayon r avec la droite (c) qui joint les deux points fixes, on trouvera, pour l'équation polaire de la courbe,

$$r^2 - 2r\left(\frac{n - m^2 c \cos\omega}{1 - m^2}\right) + \frac{n^2 - m^2 c^2}{1 - m^2} = 0.$$

Cette équation s'identifie avec l'équation (1) en faisant

$$\Omega = \frac{n - m^2 c \cos\omega}{1 - m^2}, \quad \alpha = \frac{n^2 - m^2 c^2}{1 - m^2},$$

ce qui donne

$$\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha = \frac{m^2(n^2 - 2nc\cos\omega + c^2)}{(1 - m^2)^2};$$

et, par conséquent, il vient, en prenant ω entre deux limites quelconques ω_0 et ω_1,

$$s_1 - s_2 = \frac{2m}{1 - m^2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{n^2 - 2nc\cos\omega + c^2}\, d\omega.$$

Mais l'intégrale

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{n^2 - 2nc\cos\omega + c^2}\, d\omega$$

est un arc d'ellipse, ayant pour grand axe $2(n + c)$, et pour excentricité $\frac{2\sqrt{nc}}{n + c}$: ce qui démontre le théorème que nous nous avions énoncé plus haut.

La méthode des coordonnées elliptiques fournit très-simplement la valeur générale de l'arc, sous la forme d'une fonction ultra-elliptique. En nommant $2b$ la distance donnée des foyers dans ce système des coordonnées, on sait que pour l'élément ds d'un arc de courbe quelconque, la formule suivante a lieu :

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right).$$

Mais l'équation d'une aplanétique, entre les coordonnées μ et ν, est évidemment du premier degré, en sorte qu'on a, p et q étant des constantes,

$$\mu + p\nu = q;$$

de là on déduit, pour la rectification de cette courbe,

$$ds = d\nu\sqrt{\frac{[q^2 - 2pq\nu + (p^2 - 1)\nu^2][(p^2 - 1)b^2 + q^2 - 2pq\nu]}{(b^2 - \nu^2)(q^2 - b^2 - 2pq\nu + p^2\nu^2)}},$$

expression dans laquelle la quantité soumise au signe radical monte jusqu'au septième degré, lorsqu'on la ramène à la forme ordinaire.

Dublin, le 10 avril 1850.