JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Développements sur une classe d'équations

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 152-168.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__152_0>

DÉVELOPPEMENTS

SUR

UNE CLASSE D'ÉQUATIONS,

PAR M. J.-A. SERRET.

1. Dans un Mémoire, publié au tome IX de ce Journal, M. Lobatto a fait connaître la forme générale des équations du troisième degré *dépourvues du second terme* qui possèdent une propriété remarquable observée depuis longtemps [*]. Cette propriété des équations dont je parle consiste en ce que, si l'on développe leurs trois racines en fraction continue, d'après la méthode de Lagrange, les trois fractions continues que l'on obtient sont terminées par les mêmes quotients.

J'ai reproduit l'analyse de M. Lobatto dans mon *Cours d'Algèbre supérieure,* avec quelques modifications (pages 208 et suivantes), et j'ai indiqué aussi comment on pourrait former les équations complètes du troisième degré qui ont cette même propriété.

Je me propose, dans cet article, de résoudre le problème plus général dont voici l'énoncé :

Quelles sont les équations irréductibles jouissant de la propriété que, si l'on développe leurs racines réelles en fraction continue par la méthode de Lagrange, deux ou plusieurs de ces fractions continues soient terminées par les mêmes quotients?

On verra que les équations irréductibles dont il s'agit ont un degré de la forme $2n$ ou de la forme $3n$. On peut partager leurs racines

[*] M. Vincent, dans son remarquable Mémoire *Sur la résolution des équations numériques,* l'a observée sur l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$ (tome I$^{\text{er}}$ de ce Journal), et il ajoute : « Cette propriété mériterait peut-être un examen spécial. »

en n groupes composés chacun de deux ou trois racines, suivant que le degré est $2n$ ou $3n$; si les racines d'un même groupe sont réelles, les fractions continues qui les représentent sont terminées par les mêmes quotients.

Je donnerai, en même temps, la forme générale des équations qui possèdent cette singulière propriété.

Condition pour que les fractions continues qui représentent deux irrationnelles soient terminées par les mêmes quotients.

2. Si deux irrationnelles x et x' sont telles, que les fractions continues dans lesquelles elles se développent aient un même quotient complet y, on aura, par les propriétés des fractions continues,

$$x = \frac{qy + p}{q'y + p'}, \quad x' = \frac{sy + r}{s'y + r'}, \tag{1}$$

p, q, p', etc., étant des entiers qui satisfont aux deux conditions

$$qp' - pq' = \pm 1, \quad sr' - rs' = \pm 1; \tag{2}$$

en outre, on peut supposer p', q', r', s' positifs, q et p seront de même signe que x, r et s de même signe que x'. Des équations (1) on tire

$$x' = \frac{ax + b}{a'x + b'},$$

en posant

$$a = rq' - sp', \qquad b = sp - rq,$$
$$a' = r'q' - s'p', \quad b' = s'p - r'q,$$

équations dont on déduit

$$ab' - ba' = (qp' - pq')(sr' - rs') = \pm 1.$$

Donc, pour que deux irrationnelles positives ou négatives x et x' puissent se développer en des fractions continues terminées par les mêmes quotients, il faut qu'elles soient liées l'une à l'autre par une équation de la forme

$$x' = \frac{ax + b}{a'x + b'}, \tag{3}$$

où a, b, a', b' désignent des entiers positifs ou négatifs satisfaisant à la condition

$$ab' - ba' = \pm 1. \tag{4}$$

3. Je dis maintenant que cette condition est suffisante. Pour le démontrer, remarquons d'abord qu'on peut supposer x et x' positives, car si l'une d'elles ou toutes deux sont négatives, on peut les remplacer par leurs valeurs absolues en changeant les signes de quelques-uns des coefficients a, b, a', b', changement qui n'altérera pas la condition (4).

Cela étant, on peut évidemment supposer a positif, car on ramènerait le cas contraire à celui-là en changeant les signes des quatre coefficients a, b, a', b'; quant à b, il peut être positif ou négatif. Si b est positif, a' et b' sont de même signe à cause de l'équation (4), et ils sont tous deux positifs à cause de l'équation (3), parce qu'on suppose x et x' positives. Si b est négatif, a' et b' sont de signes contraires à cause de l'équation (4); d'où il suit qu'en mettant en évidence les signes des nombres a, b, a', b', l'équation (3) a l'une des trois formes suivantes :

$$x' = \frac{ax+b}{a'x+b'},$$

$$x' = \frac{ax-b}{-a'x+b'},$$

$$x' = \frac{ax-b}{a'x-b'},$$

et, dans tous les cas, on a

$$ab' - ba' = \pm 1.$$

Dans le premier cas, on démontre aisément que x et x' se développent en des fractions continues terminées par les mêmes quotients (*voyez* mon *Cours d'Algèbre supérieure,* page 212). Le second cas se ramène au premier, car, en exprimant x en fonction de x', on trouve

$$x = \frac{b'x'+b}{a'x'+a}.$$

Pour démontrer que la même chose a lieu dans le troisième cas, réduisons x en fraction continue. Soient $\frac{g}{g'}$ et $\frac{h}{h'}$ deux réduites consécutives aussi éloignées qu'on voudra, et z le quotient complet qui correspond à la réduite $\frac{h}{h'}$, on aura

$$x = \frac{hz + g}{h'z + g'},$$

et, par conséquent,

$$x' = \frac{(ah - bh')z + (ag - bg')}{(a'h - b'h')z + (a'g - b'g')} = \frac{cz + d}{c'z + d'};$$

on a d'ailleurs

$$cd' - dc' = (ab' - ba')(gh' - hg') = \pm 1;$$

le troisième cas se trouve donc ramené au premier si les entiers c, d, c', d' sont positifs, ou du moins sont tous quatre de même signe. Or c et d sont de même signe; en effet, ils ont respectivement le même signe que les différences

$$\frac{h}{h'} - \frac{b}{a}, \quad \frac{g}{g'} - \frac{b}{a},$$

lesquelles différences sont de même signe, puisque les fractions $\frac{h}{h'}$ et $\frac{g}{g'}$ diffèrent l'une de l'autre d'aussi peu qu'on veut. Pour une raison semblable, c' et d' sont de même signe, et parce que x' et z sont positives, on voit que les nombres c, d, c', d' sont de même signe; donc x' et z, par suite x' et x se développeront en des fractions continues terminées par les mêmes quotients.

Sur les fonctions linéaires de la forme $\frac{ax + b}{a'x + b'}$.

4. Soit posé

$$\theta x = \frac{ax + b}{a'x + b'}, \tag{1}$$

a, b, a', b' étant des quantités quelconques données; posons aussi

$$\theta^2 x = \theta\theta x, \quad \theta^3 x = \theta\theta^2 x, \ldots, \quad \theta^m x = \theta\theta^{m-1} x,$$

il est très-aisé d'avoir l'expression générale de $\theta^m x$. Posons, en effet,

(2) $$\theta^m x = \frac{a_m x + b_m}{a'_m x + b'_m};$$

on pourra écrire, d'après la formation des fonctions $\theta^2 x$, $\theta^3 x$, etc.,

(3) $$\left\{\begin{aligned} a_m &= a\, a_{m-1} + b\, a'_{m-1}, \\ a'_m &= a' a_{m-1} + b' a'_{m-1}, \\ b_m &= a\, b_{m-1} + b\, b'_{m-1}, \\ b'_m &= a' b_{m-1} + b' b'_{m-1}. \end{aligned}\right.$$

Pour tirer de ces équations les valeurs de a_m, a'_m, b_m, b'_m en fonction des quantités connues a, a', b, b', désignons par z une quantité telle, que l'on ait

(4) $$1 : z :: a + a'z : b + b'z,$$

on déduira des équations (3),

$$\begin{aligned} a_m + a'_m z &= (a + a'z)(a_{m-1} + a'_{m-1} z), \\ b_m + b'_m z &= (a + a'z)(b_{m-1} + b'_{m-1} z); \end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément

(5) $$\left\{\begin{aligned} a_m + a'_m z &= (a + a'z)^m, \\ b_m + b'_m z &= z(a + a'z)^m. \end{aligned}\right.$$

En outre, comme l'équation (4) est du second degré, en appelant z et z' ses deux racines, on aura encore

(6) $$\left\{\begin{aligned} a_m + a'_m z' &= (a + a'z')^m, \\ b_m + b'_m z' &= z'(a + a'z')^m. \end{aligned}\right.$$

Des équations (5) et (6) on peut maintenant tirer les valeurs de a_m, a'_m, b_m, b'_m.

En faisant, pour abréger,

(7) $$t = \sqrt{(a + b')^2 - 4(ab' - ba')},$$

et

$$(8)\quad \begin{cases} P_m = (a + b' + t)^m + (a + b' - t)^m, \\ Q_m = \dfrac{(a + b' + t)^m - (a + b' - t)^m}{t}. \end{cases}$$

on trouve aisément

$$(9)\quad \begin{cases} a_m = \dfrac{P_m + (a - b')\, Q_m}{2^{m+1}}, \\ a'_m = a' \dfrac{Q_m}{2^m}, \\ b_m = b \dfrac{Q_m}{2^m}, \\ b'_m = \dfrac{P_m - (a - b')\, Q_m}{2^{m+1}}, \end{cases}$$

équations dont on déduit

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{a_m - b'_m}{a'_m} = \dfrac{a - b'}{a'}, \\ \dfrac{b_m}{a'_m} = \dfrac{b}{a'}, \\ a_m\, b'_m - b_m\, a'_m = (ab' - ba')^m; \end{cases}$$

en sorte que, si

$$ab' - ba' = \pm 1,$$

on aura aussi

$$a_m\, b'_m - b_m\, a'_m = \pm 1.$$

On connaît donc les coefficients de la fonction $\theta^m x$ en fonction des quantités connues a, b, a', b'. A la vérité, notre analyse semble en défaut si t est nulle, car alors, z et z' étant égales, les équations (6) ne diffèrent pas des équations (9); mais, comme les équations (8) et (9) ont lieu quelque petite que soit t, elles seront vraies encore pour $t = 0$: on a, dans ce cas,

$$P_m = 2(a + b')^m,$$
$$Q_m = 2m(a + b')^{m-1},$$

et, par suite,

$$(11)\quad \begin{cases} a_m = \dfrac{(a+b')^m + m(a-b')(a+b')^{m-1}}{2^m}, \\ a'_m = \dfrac{ma'(a+b')^{m-1}}{2^{m-1}}, \\ b_m = \dfrac{mb(a+b')^{m-1}}{2^{m-1}}, \\ b'_m = \dfrac{(a+b')^m - m(a-b')(a+b')^{m-1}}{2^m}. \end{cases}$$

Dans ce cas, les quantités a, b, a', b' doivent vérifier l'équation

$$(12)\qquad (a+b')^2 = 4(ab' - ba'),$$

et l'on peut écrire la valeur de $\theta^m x$ comme il suit :

$$\theta^m x = \frac{\left(a - b' + \dfrac{a+b'}{m}\right)x + 2b}{2a'x - \left(a - b' - \dfrac{a+b'}{m}\right)}.$$

On voit que, pour $m = \infty$, $\theta^m x$ converge vers la quantité

$$\frac{(a-b')x + 2b}{2a'x - (a-b')},$$

qui n'est autre chose que l'une des constantes $\frac{a-b'}{2a'}$, $\frac{-2b}{a-b'}$, lesquelles sont égales à cause de la relation (12).

5. Proposons-nous maintenant de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait identiquement

$$(13)\qquad \theta^\mu x = x,$$

c'est-à-dire

$$(14)\qquad a_\mu = b'_\mu,\quad a'_\mu = 0,\quad b_\mu = 0.$$

On voit tout de suite qu'on doit exclure le cas particulier où l'on aurait

$$(a+b')^2 = 4(ab' - ba'),$$

car les équations (11) indiquent que, pour satisfaire aux équations (14), il faudrait que l'on eût

$$a + b' = 0,$$

par suite,

$$ab' - ba' = 0,$$

et alors la fonction θx ne dépendrait pas de x. Cela étant, les équations (9) montrent que, pour satisfaire aux équations (14), il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$Q_\mu = 0,$$

ou

$$(a + b' + t)^\mu = (a + b' - t)^\mu.$$

On tire de là

$$a + b' + t = (a + b' - t)\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{\mu}\right)$$

et

$$(15) \qquad t = (a + b')\operatorname{tang}\frac{\lambda\pi}{\mu}\sqrt{-1},$$

en désignant par λ un nombre entier qu'on doit supposer premier avec μ pour qu'il faille effectivement exécuter μ fois sur x l'opération désignée par θ avant de reproduire x.

En comparant cette valeur de t avec celle qu'on tire de l'équation (7), on a

$$(16) \qquad (a + b')^2 - 4(ab' - ba')\cos^2\frac{\lambda\pi}{\mu} = 0.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait identiquement

$$\theta^\mu x = x.$$

Si l'on suppose que a, b, a', b' soient réelles, l'équation (16) montre que la quantité $ab' - ba'$ est positive. Et comme on peut, sans changer la fonction θx, multiplier les constantes a, b, a', b' par un facteur quelconque, on voit que, sans faire aucune particularisation, on peut supposer

$$(17) \qquad ab' - ba' = 1,$$

et alors l'équation (16) donne

$$a + b' = 2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}. \tag{18}$$

Nous ne mettons pas le signe $\pm$ devant le second membre, parce qu'on peut, si on le juge à propos, changer les signes des quatre quantités a, b, a', b'. Des équations (17) et (18) on tire

$$\left\{\begin{aligned} b' &= -\left(a - 2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}\right), \\ b &= -\frac{a^2 - 2a\cos\frac{\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'}; \end{aligned}\right. \tag{19}$$

la fonction θx a pour valeur

$$\theta x = \frac{ax - \dfrac{a^2 - 2a\cos\frac{\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'}}{a'x - \left(a - 2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}\right)}; \tag{20}$$

les quantités a et a' demeurent indéterminées; quant à λ, c'est un nombre entier quelconque premier avec μ. Si l'on continue de poser

$$\theta^m x = \frac{a_m x + b_m}{a'_m x + b'_m},$$

on trouvera aisément

$$\left\{\begin{aligned} a_m &= \frac{a\sin\frac{m\lambda\pi}{\mu} - \sin\frac{(m-1)\lambda\pi}{\mu}}{\sin\frac{\lambda\pi}{\mu}}, \\ a'_m &= a'\frac{\sin\frac{m\lambda\pi}{\mu}}{\sin\frac{\lambda\pi}{\mu}}, \\ b_m &= -\frac{a^2 - 2a\cos\frac{\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'}\,\frac{\sin\frac{m\lambda\pi}{\mu}}{\sin\frac{\lambda\pi}{\mu}}, \\ b'_m &= \frac{\sin\frac{(m+1)\lambda\pi}{\mu} - a\sin\frac{m\lambda\pi}{\mu}}{\sin\frac{\lambda\pi}{\mu}}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

6. Des équations (19) et (21), on déduit

$$(22)\quad \begin{cases} b'_m = -\left(a_m - 2\cos\dfrac{m\lambda\pi}{\mu}\right), \\[2ex] b_m = -\dfrac{a_m^2 - 2a_m\cos\dfrac{m\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'_m}, \end{cases}$$

et

$$(23)\quad \begin{cases} a = \dfrac{a_m \sin\dfrac{\lambda\pi}{\mu} + \sin\dfrac{(m-1)\lambda\pi}{\mu}}{\sin\dfrac{m\lambda\pi}{\mu}}, \\[3ex] a' = a'_m \dfrac{\sin\dfrac{\lambda\pi}{\mu}}{\sin\dfrac{m\lambda\pi}{\mu}}, \\[3ex] b = -\dfrac{a_m^2 - 2a_m\cos\dfrac{m\lambda\pi}{\mu} + 1}{a_m}\,\dfrac{\sin\dfrac{\lambda\pi}{\mu}}{\sin\dfrac{m\lambda\pi}{\mu}}, \\[3ex] b' = \dfrac{\sin\dfrac{(m+1)\lambda\pi}{\mu} - a_m \sin\dfrac{\lambda\pi}{\mu}}{\sin\dfrac{m\lambda\pi}{\mu}}. \end{cases}$$

Ces formules permettent de résoudre la question suivante :

Étant donnée une fonction linéaire $\dfrac{a_m x + b_m}{a'_m x + b'_m}$, *trouver une fonction linéaire* $\theta x = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$ *telle, que l'on ait identiquement*

$$\theta^m x = \frac{a_m x + b_m}{a'_m x + b'_m} \quad \text{et} \quad \theta^\mu x = x.$$

On voit que le problème n'est possible que si les quantités données a_m, b_m, a'_m, b'_m satisfont aux équations (22).

Des équations irréductibles dont deux racines x et x' sont liées par la relation linéaire $x' = \frac{ax+b}{a'x+b'}$, où a, b, a', b' sont des constantes données.

7. Soit

$$\chi(x) = 0 \tag{1}$$

une équation irréductible, et supposons qu'entre deux racines x et x' on ait la relation

$$x' = \frac{ax+b}{a'x+b'} = \theta x, \tag{2}$$

où a, b, a', b' sont des constantes données. On sait que toutes les quantités comprises dans la série indéfinie

$$x,\quad \theta x,\quad \theta^2 x,\quad \theta^3 x, \ldots,$$

doivent être racines de l'équation (1), ce qui exige que l'une des fonctions θx, $\theta^2 x$, etc., soit égale à x. Supposons

$$\theta^\mu x = x. \tag{3}$$

Cette équation aura lieu identiquement, si l'on suppose que a, b, a', b' soient commensurables, ou, du moins, que ce soient des fonctions rationnelles des quantités que l'on considère comme connues et dont dépendent rationnellement les coefficients de l'équation proposée. Par conséquent, d'après ce qu'on a vu précédemment, on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned} b' &= -\left(a - 2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}\right), \\ b &= -\frac{a^2 - 2a\cos\frac{\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

en désignant toujours par λ un nombre entier premier avec μ.

Cela posé, on sait que le degré de l'équation (1) doit être un multiple $n\mu$ de μ, et que ses $n\mu$ racines peuvent être représentées comme il suit [*] :

(5)
$$\begin{cases} x, & \theta x, & \theta^2 x, \ldots, & \theta^{\mu-1} x, \\ x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1, \ldots, & \theta^{\mu-1} x_1, \\ x_2, & \theta x_2, & \theta^2 x_2, \ldots, & \theta^{\mu-1} x_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-1}, & \theta x_{n-1}, & \theta^2 x_{n-1}, \ldots, & \theta^{\mu-1} x_{n-1}. \end{cases}$$

Soit

(6)
$$x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x = y,$$

y dépendra d'une équation

(7)
$$F(y) = 0,$$

de degré n et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités connues de l'équation (1) et de la fonction θ. L'équation (7) peut n'être pas résoluble algébriquement, mais les quantités

$$x, \quad \theta x, \quad \theta^2 x, \ldots, \quad \theta^{\mu-1} x$$

dépendent d'une équation de degré μ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de y, et qui est, comme on sait, toujours résoluble algébriquement. Dans le cas qui nous occupe, et où la fonction θ est linéaire, cette dernière équation n'est autre que l'équation (6), et l'on voit, en résumé, que l'équation proposée (1) doit résulter de l'élimination de y entre les deux équations (6) et (7), dont la seconde peut être considérée comme ayant pour premier membre un polynôme irréductible quelconque de degré n.

En d'autres termes, les équations que nous étudions peuvent être considérées comme obtenues en multipliant un certain nombre n

---

[*] *Voir* le Mémoire d'Abel *Sur une classe d'équations résolubles algébriquement*, ou mon *Cours d'Algèbre supérieure*, vingt-sixième Leçon.

d'équations de la forme

$$\begin{aligned}
&x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x - y = 0,\\
&x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x - y_1 = 0,\\
&x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x - y_2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x - y_{n-1} = 0,
\end{aligned}$$

où $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ désignent les n racines d'une équation irréductible dont les coefficients sont des quantités absolument arbitraires.

Des équations irréductibles à coefficients numériques et dont deux ou plusieurs racines se développent en des fractions continues terminées par les mêmes quotients.

8. Cherchons maintenant dans quel cas les fractions continues, dans lesquelles se développent deux racines réelles x' et x d'une équation irréductible, sont terminées par les mêmes quotients.

Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi (n° **2**), que l'on ait

$$x' = \frac{ax + b}{a'x + b'} = \theta x,$$

a, b, a', b' étant des entiers positifs ou négatifs liés par la relation

$$ab' - ba' = \pm 1;$$

en outre, pour que x et θx puissent représenter deux racines d'une équation irréductible, il faut qu'on puisse assigner un nombre entier μ, tel qu'on ait identiquement

$$\theta^{\mu} x = x,$$

ce qui exige, comme nous l'avons vu, qu'on ait

$$b' = -\left(a - 2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}\right),$$

$$b = -\frac{a^2 - 2a\cos\frac{\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'},$$

λ étant un nombre entier premier avec μ. Or puisque a, b, a', b' sont des nombres entiers, on voit que $2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}$ doit être un nombre entier, ce qui ne peut arriver que si μ est égal à 2 ou à 3. On voit par là que la propriété que nous étudions ne peut se rencontrer que chez les équations irréductibles dont le degré a la forme $2n$ ou la forme $3n$. Nous examinerons successivement ces deux classes d'équations.

9. Si l'on suppose $\mu = 2$ et $\lambda = 1$ (λ doit être premier avec μ), on a

$$\theta x = \frac{ax - \frac{a^2+1}{a'}}{a'x - a},$$

et

$$\theta^2 x = x;$$

a désigne un nombre entier quelconque, et a' un diviseur de a^2+1. Si l'on prend pour $F(y)$ un polynôme irréductible quelconque de degré n, et qu'on élimine y entre les deux équations

$$x + \theta x = y, \quad F(y) = 0,$$

ou

$$x^2 - yx + \left(\frac{ay}{a'} - \frac{a^2+1}{a'^2}\right) = 0, \quad F(y) = 0,$$

on aura la forme générale des équations de degré $2n$ jouissant de cette propriété que les $2n$ racines se partageront en n groupes tels, que dans chaque groupe de deux racines réelles les fractions continues qui représentent ces racines seront terminées par les mêmes quotients.

Ce résultat peut être énoncé différemment :

Soit a un nombre entier quelconque, a' un diviseur quelconque de a^2+1, y une quantité réelle quelconque commensurable ou incommensurable, les deux racines de l'équation

$$x^2 - yx + \left(\frac{ay}{a'} - \frac{a^2+1}{a'^2}\right) = 0,$$

si elles sont réelles, se développeront en des fractions continues terminées par les mêmes quotients.

On déduit de là une conséquence assez remarquable, lorsque y est commensurable. Dans ce cas, on sait, en effet, que les deux racines de l'équation précédente se développent en des fractions continues périodiques, et que les périodes de ces deux fractions continues sont formées des mêmes termes écrits en ordre inverse. D'où il suit que si la période de la fraction continue qui représente l'une des racines est, par exemple,

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \ldots, \quad \omega,$$

on pourra, si l'on veut, prendre pour période la suite inverse

$$\omega, \ldots, \quad \gamma, \quad \beta, \quad \alpha.$$

10. Supposons $\mu = 3$, on aura, en faisant $\lambda = 2$ (le cas de $\lambda = 1$ est identique à celui de $\lambda = 2$, on passe de l'un à l'autre en changeant les signes de a et a'),

$$\theta x = \frac{ax - \dfrac{a^2 + a + 1}{a'}}{a'x - (a+1)},$$

$$\theta^2 x = \frac{(a+1)x - \dfrac{a^2 + a + 1}{a'}}{a'x - a},$$

$$\theta^3 x = x,$$

a est un nombre entier quelconque et a' un diviseur de $a^2 + a + 1$. Quelle que soit l'irrationnelle x, les fractions continues dans lesquelles se développent

$$x, \quad \theta x, \quad \theta^2 x,$$

se termineront par les mêmes quotients. Si donc $F(y)$ désigne un polynôme irréductible quelconque de degré n, et qu'on élimine y entre les équations

$$x + \theta x + \theta^2 x = y, \quad F(y) = 0,$$

ou

$$x^3 - yx^2 + \left[\frac{(2a+1)y}{a'} - \frac{3(a^2+a+1)}{a'^2}\right]x - \left[\frac{a(a+1)y}{a'^2} - \frac{(2a+1)(a^2+a+1)}{a'^2}\right] = 0,$$

$$F(y) = 0,$$

on obtiendra la forme générale des équations de degré $3n$ jouissant de la propriété que les $3n$ racines se partageront en n groupes, tels que, dans chaque groupe de trois racines réelles, les fractions continues qui représentent ces racines seront terminées par les mêmes quotients.

On voit, en particulier, que les équations du troisième degré qui ont cette propriété sont comprises dans la forme générale suivante :

$$x^3 - yx^2 + \left[\frac{(2a+1)y}{a'} - \frac{3(a^2+a+1)}{a'^2}\right]x - \left[\frac{a(a+1)y}{a'^2} - \frac{(2a+1)(a^2+a+1)}{a'^3}\right] = 0,$$

où a désigne un entier quelconque, a' un diviseur quelconque de a^2+a+1, et y une quantité réelle quelconque, commensurable ou incommensurable. En faisant $y=0$, on obtient la solution du cas particulier que M. Lobatto a examiné.

11. Les équations du troisième degré qui proviennent de la division du cercle en sept ou neuf parties égales, celle du quatrième degré qui provient de la division en quinze parties égales, jouissent de la propriété remarquable qu'on vient d'étudier.

La division du cercle en sept parties égales conduit à l'équation

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

et si x désigne la racine positive, $-x_1$ et $-x_2$ les deux racines négatives, on a

$$x_1 = \frac{1}{1+x}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x};$$

la racine x est comprise entre 1 et 2, on aura par conséquent, des résultats de cette forme :

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}, \quad x_1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}}, \quad x_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}}.$$

La division du cercle en neuf parties égales conduit à l'équation

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Si l'on désigne par $-x$ la racine négative, laquelle est comprise *entre*

-1 et -2, par x_1 et x_2 les deux racines positives, on aura

$$x_1 = \frac{1}{1+x}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x},$$

ce qui conduit aux mêmes résultats que le cas précédent.

Enfin, l'équation du quatrième degré dont dépend la division du cercle en quinze parties égales, est

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Si x et x_1 désignent les deux racines positives, $-x'$ et $-x'_1$ les deux négatives, on a

$$x = \frac{x'+2}{x'+1} = 1 + \frac{1}{1+x'},$$

$$x_1 = \frac{x'_1+2}{x'_1+1} = 1 + \frac{1}{1+x'_1};$$

des deux quantités x' et x'_1 l'une est comprise entre 0 et 1, l'autre entre 1 et 2, on aura donc des résultats de cette forme :

$$x' = \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \dots}}, \qquad x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \dots}}},$$

$$x'_1 = 1 + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{\beta' + \dots}}, \qquad x_1 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{\beta' + \dots}}}.$$

L'équation proposée résulte de l'élimination de y entre

$$x + \frac{x-2}{x-1} = y, \quad y^2 - y - 1 = 0.$$