JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SOUFFLET

Thèse de géométrie analytique. Sur les surfaces du second ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 104-151.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__104_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

THÈSE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. L'ABBÉ SOUFFLET.

§ I^{er}.

Aperçu historique. — Comparaison des méthodes.

Euler a le premier traité des surfaces du second ordre dans son célèbre ouvrage *Introd. in Analys. infin.* Il a fait voir que toutes les formes sous lesquelles s'offrent les surfaces représentées par l'équation du second degré pouvaient se réduire à cinq, qu'elles avaient un centre et trois axes principaux rectangulaires; il a indiqué le cas dans lequel le centre s'éloigne à l'infini.

Cinquante années s'écoulèrent sans que cette belle discussion reçût aucun développement nouveau. Enfin l'illustre Monge, que M. Hachette aidait dans ses travaux, reprit l'examen approfondi des surfaces du second ordre. Ces deux géomètres entrèrent plus complétement qu'Euler lui-même dans tout le détail de la classification de ces surfaces et de leurs propriétés fondamentales. Ils apprirent à trouver les sections rectilignes entrevues déjà par quelques géomètres, et les sections circulaires indiquées par d'Alembert, et ils démontrèrent que les surfaces du second degré pouvaient être engendrées, soit par le mouvement réglé d'un cercle variable de rayon, soit, pour quelques-unes d'entre elles, par le mouvement d'une ligne droite.

Plusieurs élèves de l'École Polytechnique, que Monge et Hachette avaient initiés à ces premières notions, marchèrent à leur tour dans cette voie nouvelle, et poussèrent très-loin la recherche des propriétés des surfaces du second ordre. Nous citerons en particulier MM. J. Binet, Petit, Livet.

Plus tard, M. Cauchy eut l'idée heureuse et féconde de couper la surface du second degré par des droites issues d'un même point, et de fonder ainsi toute la théorie sur l'équation très-simple

$$sr^2 + 2\,tr + u = k,$$

dans laquelle r est le rayon vecteur mené du point fixe à la surface, s, t, u des fonctions des cosinus des angles que fait le rayon vecteur avec les trois axes rectangulaires et des coordonnées du point fixe, et k un coefficient constant. Ce mode de discussion simple, naturel et éminemment remarquable, ouvrait une ère nouvelle à l'étude des surfaces du second degré. On en déduit immédiatement l'équation des plans diamétraux, les équations du centre, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un plan diamétral soit perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales, l'équation du troisième degré qui donne les directions des axes et des plans diamétraux principaux et les longueurs des carrés des demi-axes principaux.

M. Cauchy démontra encore directement la réalité des racines de l'équation caractéristique des axes principaux, en faisant remarquer que son premier membre changeait trois fois de signe entre des limites connues; et montra, en même temps que M. l'abbé Moigno, que l'équation du plan tangent se déduisait immédiatement des deux équations

$$u = k, \quad t = 0.$$

Il est grandement à regretter que M. Cauchy, emporté par des recherches d'un plus haut intérêt, n'ait pas tiré de l'équation

$$sr^2 + 2\,tr + u = k$$

tout le parti possible; car cette équation, comme M. l'abbé Moigno l'a remarqué dans la préface à ses *Leçons de calcul différentiel,* contient la théorie complète des surfaces du second degré, et doit conduire, par la voie la plus large et la plus droite, à la connaissance de toutes leurs propriétés.

En 1836, M. Saint-Guilhem, ingénieur des Ponts et Chaussées, reprit, dans un Mémoire inséré au Journal de M. Liouville, la détermination des plans principaux des surfaces du second degré rapportées à trois axes quelconques; c'était une généralisation naturelle de la méthode de M. Cauchy, et un moyen d'établir, d'une manière plus courte et plus élémentaire, les théorèmes de M. Binet sur les relations qui lient les demi-axes principaux à trois demi-diamètres conjugués quelconques, théorèmes que M. Saint-Guilhem étendit, en les modifiant, au paraboloïde hyperbolique.

En rappelant le beau travail de Monge sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde, et la première étude des foyers faite par M. Chasles, nous aurons tracé avec assez de détails l'histoire des travaux qui ont eu les surfaces du second degré pour objet, et que M. Leroy a développés dans son Traité de l'analyse appliquée à la géométrie.

Ce Traité éminemment classique ne laisse rien à désirer quant à l'énoncé des théorèmes et à la rigueur des démonstrations; mais il n'est personne qui, en le lisant et en étudiant consciencieusement les divers et nombreux Mémoires analysés dans cette Notice historique, n'ait vivement regretté de voir que l'on ne soit arrivé jusqu'ici à établir l'ensemble de toutes les propriétés des courbes et des surfaces du second degré qu'en recourant tour à tour à une multitude de restrictions, à des procédés indépendants les uns des autres, etc. On désirait depuis longtemps que, sans rien supposer sur la nature des axes au point de départ, que sans changement de coordonnées, etc., on pût arriver à mettre en évidence, par des considérations géométriques saillantes et des formules peu compliquées, la nature des surfaces du second degré, leur séparation immédiate, leur centre, leurs plans diamétraux, leurs axes, leurs plans tangents, les sections rectilignes et circulaires, les cônes et cylindres tangents et asymptotiques, les foyers, etc. Or tel est le but que nous avons voulu atteindre et que nous croyons avoir atteint en substituant à une analyse multiple une analyse uniforme qui puise dans sa généralité même un plus grand degré d'élégance et de clarté. Il n'est pas une des propriétés des surfaces du second degré qui ne se déduise par des raisonnements élémentaires de l'équation si simple

$$sr^2 + 2tr + u = 0,$$

sorte de lien universel, qui enchaîne tout, amène tout, rappelle tout, etc., etc. Dans l'ancienne méthode, ces diverses propriétés étaient comme étrangères l'une à l'autre; elles ne se supposaient pas mutuellement; il fallait tour à tour deviner, reconnaître et démontrer chacune d'entre elles par un tour de force particulier. Aujourd'hui, elles sont étroitement unies, elles se donnent la main, ou mieux, elles se montrent d'elles-mêmes, et on les retrouvera bon gré mal gré en égalant à zéro un ou plusieurs des coefficients s, t, u, et des fonctions de ces coefficients qui, séparés et réunis, ont des significations précises qu'il est impossible de méconnaître.

§ II.

Notions préliminaires. — Coordonnées. — Plan. — Valeurs limites.

1. Nous croyons utile d'établir d'abord quelques principes sur lesquels il faudra nous appuyer plus tard.

Concevons dans l'espace trois axes quelconques OX, OY, OZ et une droite indéfinie; prenons sur cette droite deux points (x_1, y_1, z_1), (x, y, z), et sur la distance ρ, qui les sépare, une longueur égale à l'unité. En désignant les projections de cette unité sur les axes par p, q, r, on aura cette suite de rapports égaux :

$$(1) \qquad \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}=\frac{\rho}{1},$$

ou bien les équations

$$x=x_1+p\rho, \quad y=y_1+q\rho, \quad z=z_1+r\rho.$$

Il est essentiel d'observer :

1°. Que les quantités p, q, r sont liées entre elles par la relation

$$(2) \quad p^2+q^2+r^2+2qr\cos(q,r)+2rp\cos(r,p)+2pq\cos(p,q)=1;$$

2°. Que la direction d'une ligne droite sera déterminée par les projections p, q, r de l'unité de longueur prise sur cette ligne, ou seulement par les rapports $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ de ces mêmes projections.

2. Supposons qu'on nous donne un plan; abaissons de l'origine sur ce plan une perpendiculaire qui fasse avec les axes des angles α, β, γ et rencontre le plan à une distance d: en projetant orthogonalement sur cette perpendiculaire les coordonnées x, y, z d'un point quelconque du plan donné, nous aurons l'équation

$$(1) \qquad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=d,$$

dont tous les coefficients ont une signification géométrique, bien que les axes ne soient pas rectangulaires.

Les cosinus des angles α, β, γ, relatifs à la droite d, dépendent de p, q, r: en projetant, en effet, orthogonalement, sur chacun des axes l'unité de longueur prise sur la droite d, on obtient les relations suivantes :

$$\cos\alpha = p + q\cos(p, q) + r\cos(r, p),$$
$$\cos\beta = q + r\cos(q, r) + p\cos(p, q),$$
$$\cos\gamma = r + p\cos(r, p) + q\cos(q, r).$$

Recherchons maintenant les conditions de perpendicularité d'un plan quelconque

$$(2)\qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

sur une droite donnée p, q, r. Pour y parvenir, exprimons d'abord que le plan (2) est parallèle au plan (1) ou qu'il est perpendiculaire à la droite d, en posant

$$\frac{A}{\cos\alpha} = \frac{B}{\cos\beta} = \frac{C}{\cos\gamma};$$

puis éliminons $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ à l'aide des relations précédentes; nous trouverons ainsi les conditions demandées

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{A}{p + q\cos(p, q) + r\cos(r, p)} \\ &= \frac{B}{q + r\cos(q, r) + p\cos(p, q)} \\ &= \frac{C}{r + p\cos(r, p) + q\cos(q, r)}. \end{aligned}\right.$$

En éliminant x, y, z de l'équation (2) au moyen de leurs valeurs en coordonnées polaires (1), n° **1**, on obtiendra

$$(Ap + Bq + Cr)\rho + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0:$$

or si l'on fait simultanément

$$(4)\qquad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad Ap + Bq + Cr = 0,$$

le rayon ρ devenu indéterminé se confondra tout entier avec la surface (2); ce qui montre à la fois que cette surface est réellement un plan, et que les équations (4) expriment la coïncidence de ce plan avec une droite p, q, r quelconque.

Quand on pose seulement

$$Ap + Bq + Cr = o,$$

le rayon ρ devient infini, et, par conséquent, parallèle au plan (2); nous avons donc, dans cette dernière équation, la condition du parallélisme d'une droite et d'un plan.

Déterminons enfin le volume d'un parallélipipède en fonction de ses arêtes p, q, r; ce volume étant égal au produit de l'arête r par la *section droite* correspondante, on aura, en désignant par R le dièdre dont l'arête est r,

$$\text{vol}(p, q, r) = r.p\sin(p, r).q\sin(q, r).\sin R.$$

Mais, en vertu d'une formule connue de trigonométrie, on a

$$\sin(p, r).\sin(q, r).\sin R = \sqrt{1 - \cos^2(p, q) - \ldots},$$

donc

$$\text{vol}(p, q, r)$$
$$= p.q.r\sqrt{1 - \cos^2(p, q) - \cos^2(q, r) - \cos^2(r, p) + 2\cos(p, q)\cos(q, r)\cos(r, p)}.$$

3. Si une fonction $\varphi(v)$ entière et algébrique est assujettie à la condition $\varphi(v) =$ ou $> o$, en sorte que l'on ait $\varphi(v) = u^2$, u étant réel; alors les racines réelles et inégales de l'équation $\varphi(v) = o$, seront des valeurs maximum ou minimum de v, considéré comme fonction de u.

En effet, soient v' une de ces racines et h un accroissement infiniment petit, en posant $v = v' + h$, on trouvera

$$\varphi(v) = \varphi(v' + h) = \varphi(v') + h\varphi'(v') + \ldots.$$

Or, par hypothèse, on a $\varphi(v) > o$, $\varphi(v') = o$, et h est infiniment petit; donc, le terme $h.\varphi'(v')$ est essentiellement positif, et, par suite, h et $\varphi'(v')$ sont toujours de même signe; donc à partir de la valeur v', v ne peut que diminuer si $\varphi'(v')$ est $<o$, et ne peut qu'augmenter si $\varphi'(v')$ est $>o$; donc enfin la racine v' est une valeur maximum ou minimum de v, selon que $\varphi'(v')$ est négative ou positive.

On prouverait de la même manière que les racines égales, dont le nombre est impair, jouissent de la même propriété que la racine simple v'. Avant de passer à l'analyse des surfaces du second ordre, qui font le principal objet de ce travail, nous ferons encore remarquer que nous comprenons les valeurs maximum et minimum sous la dénomination commune de *valeurs limites*.

§ III.

Transformation de l'équation du second degré à trois variables. — Plans diamétraux. — Classification. — Centre.

4. L'équation générale du second degré à trois variables, rapportée à des axes quelconques, peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy \\ \quad + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = u = 0. \end{array} \right.$$

En substituant aux coordonnées x, y, z, dans cette équation, leurs valeurs en coordonnées polaires

$$x = x_1 + p\rho, \quad y = y_1 + q\rho, \quad z = z_1 + r\rho,$$

on obtient

$$(2) \qquad s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$s = ap^2 + a'q^2 + a''r^2 + 2bqr + 2b'rp + 2b''pq,$$

$$\begin{aligned} t = (ax_1 + b'z_1 + b''y_1 + c)\,p + (a'y_1 + bz_1 + b''x_1 + c')\,q \\ + (a''z_1 + by_1 + b'x_1 + c'')\,r = \mathrm{X}_1 p + \mathrm{Y}_1 q + \mathrm{Z}_1 r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 = ax_1^2 + a'y_1^2 + a''z_1^2 + 2by_1z_1 + 2b'z_1x_1 + 2b''x_1y_1 \\ + 2cx_1 + 2c'y_1 + 2c''z_1 + d: \end{aligned}$$

L'équation (2) sera le point de départ de notre analyse des surfaces du second ordre.

5. Un plan diamétral étant celui qui divise en parties égales un système de cordes parallèles à une droite donnée p, q, r, pour déduire ce plan de l'équation

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0,$$

il suffit de poser

$$t = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(1)\left\{\begin{aligned}(ap + b'r + b''q)x_1 + (a'q + br + b''p)y_1 + (a''r + bq + b'p)z_1 \\ + cp + c'q + c''r = 0.\end{aligned}\right.$$

En effet, si nous faisons glisser le pôle x_1, y_1, z_1 sur le plan (1) sans faire varier p, q, r, tous les rayons vecteurs ρ resteront parallèles entre eux, et leurs valeurs tirées de l'équation

$$s\rho^2 + u_1 = 0$$

seront deux à deux égales et de signe contraire; donc l'équation (1) représente un plan diamétral.

Si les coefficients de ce plan ou des quantités proportionnelles à ces coefficients étaient donnés à priori, on en déduirait sans peine la direction p, q, r des cordes conjuguées correspondantes.

Soient maintenant deux plans diamétraux

$$(ap + \ldots)x_1 + (a'q + \ldots)y_1 + (a''r + \ldots)z_1 + cp + c'q + c''r = 0,$$
$$(ap' + \ldots)x'_1 + (a'q' + \ldots)y'_1 + (a''r' + \ldots)z'_1 + cp' + c'q' + c''r' = 0;$$

chacun d'eux sera parallèle aux cordes conjuguées de l'autre, si les paramètres p, q, r et p', q', r' de ces cordes vérifient simultanément les deux conditions

$$(ap + \ldots)p' + (a'q + \ldots)q' + (a''r + \ldots)r' = 0,$$
$$(ap' + \ldots)p + (a'q' + \ldots)q + (a''r' + \ldots)r = 0;$$

or ces conditions de parallélisme peuvent être vérifiées d'une infinité de manières, puisqu'elles se ramènent à une seule; donc, à un même plan diamétral donné correspond une infinité de plans diamétraux conjugués.

Cela posé, concevons deux plans diamétraux réciproquement conjugués; prenons pour axe des z le diamètre déterminé par leur intersection; enfin supposons que le plan des xy soit parallèle à leurs cordes conjuguées: d'après cette disposition, les cordes conjuguées aux plans zy et zx étant respectivement parallèles aux axes des x et des y, l'équation (1), n° 4, des surfaces du second ordre deviendra, sans rien perdre de sa généralité,

$$(2)\qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + 2Qz + H = 0,$$

d'où l'on conclut que toutes les sections planes de ces surfaces seront des ellipses ou des hyperboles. Cependant si le diamètre formé par l'intersection de l'axe des z avec la surface est infini, le coefficient P'' s'évanouira, et alors les sections planes parallèles à ce diamètre seront des paraboles.

Ainsi donc, d'après la nature des sections déduites de l'équation (2), les surfaces du second ordre peuvent se diviser en cinq genres principaux : ellipsoïdes, hyperboloïdes à une et à deux nappes, paraboloïdes elliptiques et hyperboliques.

6. Pour reconnaître si ces différents genres de surfaces sont doués de centre, il faut essayer de réduire leur équation polaire à

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

en posant

$$t = X_1 p + Y_1 q + Z_1 r = 0,$$

afin que, comme l'exige la nature du centre, les rayons diamétralement opposés soient égaux entre eux ; mais pour que cela ait lieu dans toutes les directions possibles, il faut évidemment que la condition

$$t = 0,$$

à laquelle est assujettie la direction de ρ, soit identique ; nous aurons donc pour les équations du centre,

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0.$$

Le dénominateur commun D des expressions des coordonnées du centre x_1, y_1, z_1 se présente sous là forme

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' :$$

s'il n'est pas nul, les valeurs des coordonnées étant alors finies et déterminées, il y aura un centre unique ; mais, dans le cas contraire, le centre sera impossible ou deviendra indéterminé; il y aura, dans ce dernier cas, une infinité de centres situés sur une même droite ou un même plan.

En prenant le centre pour origine des coordonnées, l'équation (2), n° 5, se ramène aux suivantes :

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A'^2}+\frac{z^2}{A''^2}-1=0,\quad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A'^2}-\frac{z^2}{A''^2}\pm 1=0,$$

desquelles on conclut que les ellipsoïdes et les hyperboloïdes sont seuls doués de centre.

Les genres les plus remarquables des surfaces dénuées de centre, ou dont les diamètres sont infinis, sont renfermés dans l'équation

$$\frac{x^2}{P^2}\pm\frac{y^2}{Q^2}-z=0;$$

nous ne dirons rien pour le moment des autres cas.

§ IV.

Plans principaux. — Équation du troisième degré.

7. Voyons s'il n'existe pas de plans diamétraux perpendiculaires à leurs cordes conjuguées. D'après les conditions (3), n° 2, pour rendre les cordes p, q, r perpendiculaires à leur plan diamétral (1), n° 5, il suffit de poser les relations

$$\frac{ap+b''q+b'r}{p+q\cos pq+r\cos rp}=\frac{a'q+br+b''p}{q+r\cos qr+p\cos pq}=\frac{a''r+bq+b'p}{r+p\cos rp+q\cos rq}=\frac{s}{1}:$$

le dernier membre $\frac{s}{1}$ se forme en multipliant respectivement par p, q, r les deux termes de chacun des rapports précédents, et en divisant la somme des antécédents par celle des conséquents.

Maintenant faisons, pour abréger,

$$a-s=A,\ldots,\quad b-s\cos(q,r)=B,\ldots,$$

nous obtiendrons ainsi les équations

$$Ap+B''q+B'r=0,\quad B''p+A'q+Br=0,\quad B'p+Bq+A''r=0.$$

Des deux premières nous tirerons, pour déterminer la direction des cordes principales, les relations

$$(1)\qquad \frac{q}{r} = \frac{AB - B'B''}{B''^2 - AA'}, \quad \frac{p}{r} = \frac{A'B' - BB''}{B''^2 - AA'};$$

et ces valeurs, substituées dans la troisième équation, donneront pour calculer s l'équation

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0,$$

qui peut être mise sous la forme

$$(2)\qquad Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0.$$

8. Pour que la discussion de l'équation précédente ne dépende que de son dernier terme D, commençons par discuter la fonction

$$(1)\qquad s = ap^2 + a'q^2 + a''r^2 + 2bqr + 2b'rp + 2b''pq,$$

après l'avoir divisée préalablement par $p^2 + q^2 \ldots = 1$. Nous trouverons alors, en supposant $a > 0$, que s est positif, si l'on a, quels que soient q, r,

$$(2)\qquad (b''^2 - aa')q^2 + (b'^2 - aa'')r^2 + 2(b'b'' - ab)qr < 0;$$

or cette condition entraîne nécessairement les suivantes :

$$(3)\qquad b''^2 - aa' < 0 \quad \text{et} \quad (ab - b'b'')^2 - (b''^2 - aa')(b'^2 - aa'') < 0,$$

donc, à cause de

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D,$$

on aura

$$s > 0,$$

si

$$a > 0, \quad b''^2 - aa' < 0, \quad D < 0.$$

Dans le cas particulier où

$$D = 0 \quad \text{et} \quad b''^2 - aa' < 0,$$

l'inégalité (2) subsiste encore; mais comme elle peut alors passer par zéro, il en résulte que, si

$$a > 0, \quad b''^2 - aa' < 0 \quad D = 0,$$

on aura

$$s = \text{ou} > 0.$$

En supposant

$$b''^2 - aa' > 0 \quad \text{et} \quad D < 0,$$

ou bien seulement

$$D > 0,$$

nous conclurons de l'inégalité (2) que, dans ces deux cas, on a

$$s > \text{ou} < 0.$$

Il en sera de même si

$$D = 0 \quad \text{et} \quad b''^2 - aa' > 0.$$

A l'inspection du second polynôme (3), on voit que les binômes

$$(4) \qquad b''^2 - aa', \quad b'^2 - aa'', \quad b^2 - a'a'',$$

sont nécessairement de même signe dans les deux cas $D < 0$ et $D = 0$, à cette différence près que, dans le second cas, ils peuvent être nuls tous ou quelques-uns d'entre eux. Les signes des mêmes binômes restent quelconques lorsque $D > 0$.

Remarquons encore que les trois équations

$$D = 0, \quad b''^2 - aa' = 0, \quad b'^2 - aa'' = 0,$$

entraînent

$$ab - b'b'' = 0,$$

et, par suite,

$$b^2 - a'a'' = 0:$$

donc, quand les binômes (4) seront nuls, D sera lui-même nul, de sorte que l'on sera dispensé, dans certaines discussions numériques, de faire le calcul du polynôme D.

Les quantités p, q, r étant essentiellement finies, la fonction entière s qui en dépend le sera elle-même; donc elle aura au moins deux valeurs limites. Ces deux limites, que je désigne par s' et s'', seront de même signe si $s > 0$ quels que soient p, q, r, et de signes contraires si $s >$ ou < 0. Ainsi en résumant toute cette discussion de s, nous aurons, a étant supposé positif:

1°. $s > 0$ et deux limites s', s'' positives, si

$$b''^2 - aa' < 0, \quad D < 0;$$

2°. $s \geqq 0$ et deux limites s', s'' positives, mais dont l'une est nulle, si

$$b''^2 - aa' < 0, \quad D = 0;$$

3°. $s \gtrless 0$ et deux limites s', s'' de signes contraires, si

$$b''^2 - aa' > 0, \quad D < 0,$$

ou

$$b''^2 - aa' > 0, \quad D = 0, \quad \text{ou seulement} \quad D > 0.$$

Maintenant constatons que les valeurs limites de s sont déterminées par l'équation (2), n° **7**: pour y parvenir, multiplions par s la relation

$$p^2 + \ldots + 2qr\cos(q, r) + \ldots = 1,$$

retranchons le résultat de l'expression (1) de s, et posons

$$a - s = A, \ldots, \quad b - s\cos(q, r) = B, \ldots,$$

nous aurons ainsi l'équation

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2Bqr + 2B'pr + 2B''pq = 0,$$

qui, étant ordonnée par rapport à p, devient

$$Ap^2 + 2B_1 p + C = 0.$$

Or, pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut que s satisfasse à la condition

$$B_1^2 - AC = \text{ou} > 0;$$

donc, d'après le principe n° **3**, les valeurs limites de s, devront vérifier l'équation $B_1^2 - AC = 0$, c'est-à-dire

$$(B''^2 - AA')q^2 + (B'^2 - AA'')r^2 + 2(B'B'' - AB)qr = 0.$$

Mais, pour que les valeurs de $\frac{q}{r}$, qui dépendent de cette équation, soient réelles, il faut aussi que s satisfasse à la condition

$$(B'B'' - AB)^2 - (B'^2 - AA')(B''^2 - AA') = \text{ou} > 0,$$

donc, d'après le principe invoqué plus haut, les valeurs limites de s seront enfin déterminées par l'équation

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0$$

ou bien

$$(5) \qquad Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0,$$

ce qu'il s'agissait de prouver. Les coefficients L, M, N, D sont d'ailleurs donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
L = {} & 1 - \cos^2(p, q) - \cos^2(q, r) - \cos^2(r, p) \\
& + 2\cos(p, q)\cos(q, r)\cos(r, p), \\
M = {} & -a\sin^2(q, r) - a'\sin^2(r, p) - a''\sin^2(p, q) \\
& + 2b\sin(r, p)\sin(p, q)\cos OX + 2b'\sin(p, q)\sin(q, r)\cos OY \\
& + 2b''\sin(q, r)\sin(r, p)\cos OZ, \\
N = {} & aa' - b''^2 + a'a'' - b^2 + aa'' - b'^2 - 2(ab - b'b'')\cos(q, r) \\
& - 2(a'b' - bb'')\cos(r, p) - 2(a''b'' - bb')\cos(p, q), \\
D = {} & ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''.
\end{aligned}$$

Nous avons désigné par OX, OY, OZ les angles dièdres des plans coordonnés.

9. Les trois racines de l'équation (5) sont réelles, puisque nous avons reconnu à priori la réalité de deux d'entre elles : en les désignant donc par s', s'', s''', il viendra

$$s'.s''.s''' = -D;$$

et, par conséquent :

Si $D < 0$ et $s' > 0$, $s'' > 0$, on aura $s''' > 0$;

Si $D < 0$ et $s' > 0$, $s'' < 0$, on aura $s''' < 0$;

Si $D > 0$ et $s' > 0$, $s'' < 0$, on aura $s''' > 0$.

En comparant ce tableau avec celui du n° **8**, on met en évidence les signes des racines de l'équation (5); elle a en effet :

1°. Trois racines positives, lorsque

$$b''^2 - aa' < 0 \quad \text{et} \quad D < 0;$$

2°. Une racine positive et deux négatives, quand

$$b''^2 - aa' > 0 \quad \text{et} \quad D < 0;$$

3°. Deux racines positives et une négative, quand seulement

$$D > 0.$$

Dans le premier cas, l'une des racines positives est nulle, quand

$$D = 0;$$

dans le second cas, l'une est nulle et les deux autres sont de signes contraires, lorsque

$$D = 0.$$

Ainsi par la seule inspection de l'équation donnée

$$u = 0,$$

il est possible de connaître directement les signes des racines de l'équation

$$Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0,$$

de laquelle dépendent les plans principaux et la nature de la surface.

Depuis M. Petit, les auteurs se servaient de la règle de Descartes, qui a l'inconvénient d'entraîner dans des calculs impraticables lorsque l'équation

$$u = 0$$

est rapportée à des axes quelconques.

La fonction s a une signification géométrique qu'il convient de remarquer. En désignant par ρ et ρ' les racines de l'équation

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0,$$

on trouve, en effet,

$$\rho \cdot \rho' = \frac{u_1}{s};$$

mais nous venons de voir que s a trois valeurs limites réelles, et, de plus, que les rayons vecteurs corespondants à ces trois valeurs sont perpendiculaires entre eux; donc par un pôle quelconque x_1, y_1, z_1 on peut mener trois sécantes perpendiculaires entre elles, telles que les rectangles $\rho, \rho', \ldots$ de leurs segments soient des maxima ou des minima. Déjà ce théorème avait été énoncé et démontré par M. Chasles pour les surfaces douées de centre.

§ V.

Caractères analytiques des surfaces du second ordre. — Paramètres relatifs aux plans diamétraux conjugués.

10. Soit, comme nous l'avons déjà vu,

$$s\rho^2 + u_1 = 0$$

l'équation des surfaces douées de centre, en y substituant les valeurs de s tirées de l'équation

$$Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0,$$

on connaîtra les demi-axes de ces surfaces et, par suite, leur nature.

1^er^ *Cas.* Lorsque les limites de s seront positives, les trois demi-axes seront réels pourvu que u_1 soit négatif; la surface est l'ellipsoïde réel qui a pour caractères analytiques

$$b''^2 - aa' < 0, \quad D < 0, \quad u_1 < 0.$$

2^me^ *Cas.* Deux des limites de s étant positives et l'autre négative, nous avons deux hypothèses à faire:

1°. Si u_1 est négatif, deux des demi-axes seront réels et le troisième imaginaire: la surface est l'hyperboloïde à une nappe qui a pour caractères

$$D > 0, \quad u_1 < 0;$$

2°. Si u_1 est positif, nous trouverons deux demi-axes imaginaires et un seul réel; la surface est l'hyperboloïde à deux nappes correspondant aux caractères suivants

$$D > 0, \quad u_1 > 0.$$

Les deux hyperboloïdes se reconnaissent encore à d'autres signes analytiques.

En effet, nous avons vu que des trois limites de s, l'une était positive et les deux autres négatives, lorsque l'on avait

$$D < 0, \quad b''^2 - aa' > 0;$$

donc, en raisonnant comme dans le cas précédent, on trouvera

$$b''^2 - aa' > 0, \quad D < 0, \quad u_1 < 0$$

pour caractères de l'hyperboloïde à deux nappes; et

$$b''^2 - aa' > 0, \quad D < 0, \quad u_1 > 0$$

pour ceux de l'autre hyperboloïde.

Comme le polynôme u_1 entre dans les caractères analytiques de toutes les surfaces douées de centre, nous devons faire observer que les équations du centre permettent de le réduire à la forme

$$u_1 = cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + d.$$

Remarquons encore que, dans le cas particulier où l'on a

$$u_1 = 0,$$

l'équation

$$s\rho^2 + u_1 = 0$$

devient simplement

$$s = 0;$$

et si de cette dernière équation on élimine p, q, r à l'aide des équations du rayon ρ,

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r},$$

on obtiendra pour l'équation de la surface celle du cône

$$a(x - x_1)^2 + \ldots + 2b(y - y_1)(z - z_1) + \ldots = 0:$$

nous verrons plus loin que ce cône est asymptote de l'hyperboloïde correspondant.

11. Désignons par R un demi-axe principal d'une surface douée de centre, et de l'équation

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

tirons

$$\lim s = -\frac{u_1}{R^2};$$

alors l'équation

$$Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0,$$

devenant

$$R^6 - \frac{Nu_1}{D}R^4 + \frac{Mu_1^2}{D}R^2 - \frac{Lu_1^3}{D} = 0,$$

nous aurons entre ses racines R, R′, R″ les trois relations

$$R^2+R'^2+R''^2=\frac{Nu_1}{D},\quad R^2.R'^2.R''^2=\frac{Lu_1^3}{D},\quad R^2R'^2+R'^2R''^2+R^2R''^2=\frac{Mu_1^2}{D};$$

enfin, si des équations relatives aux diamètres conjugués nous tirons les valeurs de u_1, M, N, D, nous arriverons aux trois théorèmes de M. J. Binet, qui lient entre eux les axes et les diamètres conjugués. En faisant le calcul pour l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A'^2} + \frac{z^2}{A''^2} - 1 = u = 0,$$

il vient

$$R^2 + R'^2 + R''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2,$$
$$R^2R'^2 + R'^2R''^2 + R^2R''^2 = A^2A'^2\sin^2(A, A') + A'^2A''^2\sin^2(A', A'') + A''^2A^2\sin^2(A'', A),$$
$$R^2.R'^2.R''^2 = A^2.A'^2.A''^2.L.$$

Les deux hyperboloïdes donnent, aux signes près, les mêmes résultats.

12. Occupons-nous à présent de déterminer les caractères analytiques des surfaces dépourvues de centre. Comme les deux paraboloïdes admettent, l'un des sections elliptiques, et l'autre des sections hyperboliques, l'équation polaire de l'une quelconque de ces sections rapportée à son centre sera

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

or cette équation représentera une ellipse ou une hyperbole, selon que les valeurs limites de s seront de mêmes signes ou de signes contraires;

donc, d'après ce que nous avons dit en discutant l'équation

$$Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0,$$

les caractères du paraboloïde elliptique seront

$$D = 0 \quad \text{et} \quad b''^2 - aa' < 0;$$

et ceux du paraboloïde hyperbolique,

$$D = 0 \quad \text{et} \quad b''^2 - aa' > 0:$$

cependant s'il arrivait que le binôme

$$b''^2 - aa'$$

fût nul, il faudrait recourir aux autres binômes

$$b^2 - a'a'', \quad b'^2 - aa''.$$

Lorsque les équations du centre

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$$

seront incompatibles, comme il arrive dans les deux cas précédents, et que les trois binômes seront nuls à la fois, la surface sera un cylindre parabolique.

Si les équations du centre se réduisent à deux, et qu'au moins l'un des binômes $b''^2 - aa', \ldots$ diffère de zéro, la surface sera un cylindre elliptique ou hyperbolique.

Enfin, si les équations du centre se réduisent à une seule et que les trois binômes soient nuls, l'équation

$$u = 0$$

représentera deux plans parallèles. Il nous suffit de rappeler ces faits sans qu'il soit nécessaire de les démontrer.

15. La direction de l'axe principal d'un paraboloïde se déduit des équations (2), n° **7**, en faisant $s' = 0$; on trouve ainsi

$$(1) \qquad \frac{q}{r} = \frac{ab - b'b''}{b''^2 - aa'}, \quad \frac{p}{r} = \frac{a'b' - bb''}{b''^2 - aa'}.$$

Mais il importe de plus de connaître le point où cet axe perce le paraboloïde afin de déterminer sa position absolue : or, l'équation d'une section principale rapportée à son centre étant

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

il en résulte que la direction du rayon vecteur dont les équations sont

$$(2) \qquad \frac{x - x_1}{p'} = \frac{y - y_1}{q'} = \frac{z - z_1}{r'},$$

est assujettie, en outre, à la condition

$$t = X_1 p' + Y_1 q' + Z_1 r' = 0,$$

et que, par suite, le plan de la section principale a pour équation

$$X_1 (x - x_1) + Y_1 (y - y_1) + Z_1 (z - z_1) = 0.$$

Maintenant, si nous exprimons que ce plan est perpendiculaire à l'axe principal p, q, r en posant

$$\frac{X_1}{p + q \cos pq + r \cos rp} = \frac{Y_1}{q + r \cos qr + p \cos pq} = \frac{Z_1}{r + p \cos rp + q \cos qr},$$

et si nous concevons ensuite qu'il soit transporté parallèlement à lui-même jusqu'au sommet principal ; alors nous aurons, pour déterminer les coordonnées x_0, y_0, z_0 de ce sommet, les deux équations précédentes avec $u_1 = 0$. Enfin, des équations (1) et (2), nous tirerons l'équation de l'axe

$$\frac{x - x_0}{a' b' - b b''} = \frac{y - y_0}{ab - b' b''} = \frac{z - z_0}{b''^2 - a a'}.$$

14. On peut déduire de l'équation

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0$$

la distance ρ_1 d'un point x_1, y_1, z_1 de l'axe au sommet principal d'un paraboloïde : prenons, en effet, ce point pour pôle et faisons $s = 0$, nous obtiendrons ainsi

$$\rho_1 = -\frac{u_1}{2t};$$

mais il faut observer que les paramètres p, q, r qui entrent dans t

doivent convenir à la direction directe ou inverse de l'axe principal suivant le signe de u_1.

En supposant que le paraboloïde est rapporté à deux plans diamétraux conjugués et à un plan tangent, son équation sera

$$u = \frac{x^2}{P^2} \pm \frac{y^2}{Q^2} - z = 0; \tag{1}$$

et alors les relations (1), n° **13**, devenant

$$\frac{q}{r} = 0, \quad \frac{p}{r} = 0,$$

il en résultera

$$p = 0, \quad q = 0,$$

et, par suite,

$$r = \pm 1:$$

ainsi donc nous aurons, dans le cas de l'équation (1),

$$2t = \mp 1 \quad \text{et} \quad u_1 = \pm \rho_1,$$

ou bien

$$u_1 = \pm 1,$$

en supposant

$$\rho_1 = 1.$$

Cette hypothèse est remarquable, car si dans l'équation (1) on pose $z = 1$, on reconnaît que les paramètres P, Q sont les demi-diamètres conjugués d'une section parallèle au plan xy et faite à la distance 1 de l'origine.

15. L'équation (5), n° **8**, devient

$$Ls^2 + Ms + N = 0, \tag{1}$$

dans le cas des paraboloïdes. Pour déduire de cette équation les paramètres principaux de ces surfaces, désignons par R un demi-axe quelconque de la section principale faite à la distance 1 du sommet; ensuite de l'équation de cette section

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

tirons

$$\lim s = -\frac{u_1}{R^2},$$

et substituons cette valeur dans l'équation (1), nous aurons ainsi la relation

$$(2) \qquad \mathrm{NR}^4 - \mathrm{MR}^2 u_1 + \mathrm{L} u_1^2 = 0,$$

pour calculer les demi-axes R, R′ de la section définie ci-dessus.

Pour déterminer les paramètres P, Q relatifs à des plans diamétraux quelconques, tirons de l'équation (1), n° **14**, les valeurs de N, M, u_1, et substituons-les dans les deux équations

$$\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2 = \frac{\mathrm{M}u_1}{\mathrm{N}}, \quad \mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2 = \frac{\mathrm{L}u_1^2}{\mathrm{N}},$$

nous aurons ainsi les deux relations suivantes :

$$\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2 = \mathrm{P}^2 \sin^2 pr + \mathrm{Q}^2 \sin^2 qr, \quad \mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2 = \mathrm{P}^2\mathrm{Q}^2\mathrm{L},$$

qui renferment les théorèmes énoncés par M. Saint-Guilhem, en 1836, dans le Journal de M. J. Liouville, comme on le voit en remarquant que les côtés des parallélogrammes et des parallélipipèdes dont les carrés forment les équations précédentes, sont

$$(\mathrm{P}, 1), \quad (\mathrm{Q}, 1), \quad (\mathrm{P}, \mathrm{Q}, 1), \quad (\mathrm{R}, 1), \quad (\mathrm{R}', 1), \quad (\mathrm{R}, \mathrm{R}', 1).$$

Ce que nous venons de dire du paraboloïde elliptique s'applique, à un signe près, à l'autre paraboloïde.

§ VI.

Contact des surfaces du second ordre avec un plan, un cylindre,... — Cône et plans asymptotes. — Sections rectilignes. — Plan polaire.

16. Les conditions de contact d'une surface du second ordre avec un plan, un cylindre, un cône, etc., ressortent facilement de l'équation

$$(1) \qquad s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0;$$

en effet, le plan, le cylindre,... ont une ligne droite pour génératrice, et, pour exprimer qu'une droite issue d'un pôle quelconque $x_1 y_1 z_1$ est tangente à une surface du second ordre, il suffit de rendre égales les racines de l'équation (1) en faisant

$$(2) \qquad t^2 - su_1 = 0;$$

or cette relation très-simple conduit directement aux équations d'un plan, d'un cylindre, etc., tangents à une surface du second ordre.

17. En plaçant d'abord le pôle $x_1 y_1 z_1$ sur la surface du second ordre, on a

$$u_1 = 0;$$

l'équation (2) se réduit à celle-ci,

$$t = X_1 p + Y_1 q + Z_1 r = 0;$$

et si l'on élimine p, q, r à l'aide des relations

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r},$$

on trouvera

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + Z_1(z - z_1) = 0.$$

Cette équation représente un plan tangent; et, à cause de $u_1 = 0$, elle devient

$$X_1 x + Y_1 y + Z_1 z + cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + d = 0.$$

18. Lorsqu'en supposant p, q, r constants, on considère x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées courantes; alors l'équation

$$t^2 - su_1 = 0$$

représente un cylindre circonscrit : en effet, lorsque p, q, r sont invariables, il est évident que les coordonnées x_1, y_1, z_1 qui vérifient la condition de contact $t^2 - su_1 = 0$, conviennent à un point quelconque d'un ensemble de droites parallèles entre elles et tangentes à la surface $u = 0$; elles sont donc les coordonnées d'un cylindre circonscrit.

En désignant par x', y', z' les coordonnées courantes des points communs au cylindre et à la surface u, on aura d'abord

$$u' = 0,$$

et, par suite,

$$t' = 0,$$

ce sont les deux équations de la courbe de contact située à la fois sur la surface $u = 0$ et sur le cylindre $t^2 - su_1 = 0$; et l'équation $t' = 0$ montre, en outre, que cette courbe de contact est située dans le plan diamétral conjugué aux cordes p, q, r parallèles aux génératrices.

En supprimant les accents des coordonnées courantes et en remplaçant u et t par leurs valeurs, on ramène l'équation

$$t^2 - su_1 = 0$$

à la forme

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &[(ap + \ldots)x + (a'q + \ldots)y + (a''r + \ldots)z + cp + \ldots]^2 \\ &= s(ax^2 + \ldots + 2byz + \ldots + d). \end{aligned} \right.$$

Lorsque l'on prend le centre $x_1 y_1 z_1$ de la surface u pour pôle et qu'on désigne par R le rayon parallèle aux génératrices, on peut, à l'aide de la relation

$$sR^2 + u_1 = 0,$$

éliminer s de l'équation (1) du cylindre. Si la surface était dénuée de centre, on parviendrait encore à éliminer s; car, en plaçant le pôle au centre d'une section quelconque parallèle aux génératrices du cylindre, on aurait

$$sR^2 + u_1 = 0.$$

19. Supposons maintenant que le pôle $x_1 y_1 z_1$ est fixe, et que le rayon vecteur passant toujours par ce point, reste tangent à la surface $u = 0$; alors, en éliminant p, q, r de $t^2 - su_1 = 0$, à l'aide des équations d'un rayon quelconque, nous trouverons

$$\begin{aligned} &[X_1(x' - x_1) + Y_1(y' - y_1) + Z_1(z' - z_1)]^2 \\ &= u_1[a(x' - x_1)^2 + \ldots + 2b(y' - y_1)(z' - z_1) + \ldots], \end{aligned}$$

et cette équation sera nécessairement celle du cône circonscrit.

Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la courbe de contact devant vérifier l'équation

$$u = 0$$

de la surface donnée et celle de l'un quelconque des plans tangents qui passent par le sommet du cône, cette courbe sera nécessairement représentée par les deux relations

$$ax^2 + \ldots + 2byz + \ldots + d = 0,$$
$$X(x_1 - x) + Y(y_1 - y) + Z(z_1 - z) = 0;$$

or en les ajoutant et en ordonnant leur somme par rapport à x, y, z, on a

$$X_1 x + Y_1 y + Z_1 z + cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + d = 0;$$

ce qui prouve que la courbe de contact est plane. Nous verrons plus loin que son plan divise harmoniquement tous les rayons vecteurs compris dans l'intérieur du cône et issus de son sommet.

20. Lorsque dans l'équation polaire

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0$$

on fait simultanément $s = 0$ et $t = 0$, le rayon ρ devient infini et la condition de contact

$$t^2 - su_1 = 0$$

se trouve en même temps vérifiée; donc alors les rayons vecteurs sont des asymptotes dont les directions seront données par les deux équations

$$s = 0, \quad t = 0:$$

et maintenant si de ces équations on élimine les directions variables p, q, r, on trouvera les équations

$$(1) \qquad a(x - x_1)^2 + \ldots + 2b(y - y_1)(z - z_1) + \ldots = 0,$$
$$(2) \qquad X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + Z_1(z - z_1) = 0,$$

qui représentent, l'une un cône, l'autre un plan. Ces deux équations, combinées avec $u = 0$, déterminent une courbe du second ordre avec ses asymptotes, pourvu toutefois que le pôle $x_1 y_1 z_1$ ne coïncide pas avec le centre, car si le pôle coïncidait avec le centre même de la surface u, on aurait

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0;$$

et alors, l'équation du plan (2) devenant identique, le cône (1) deviendrait un cône asymptotique.

Cette théorie des asymptotes ne s'applique tout entière qu'aux deux hyperboloïdes : en effet, l'ellipsoïde n'admettant pas l'hypothèse $s = 0$, il s'ensuit qu'il n'a jamais d'asymptotes. Le paraboloïde elliptique admet bien l'équation

$$s = 0;$$

mais, comme cette équation se ramène à la forme

$$ap + b''q + b'r = 0,$$

elle ne conduirait qu'à un plan diamétral parallèle à l'axe principal.

Lorsque le paraboloïde est hyperbolique, le cône (1) se transforme en deux plans asymptotes qui se coupent suivant un diamètre : en effet, les caractères analytiques de ce paraboloïde permettent de décomposer la fonction $s = 0$ en deux autres,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} ap + (b'' + \sqrt{b''^2 - aa'})\, q + (b' + \sqrt{b'^2 - aa''})\, r = 0, \\ ap + (b'' - \sqrt{b''^2 - aa'})\, q + (b' - \sqrt{b'^2 - aa''})\, r = 0; \end{array}\right.$$

de sorte qu'en éliminant les variables p, q, r, on obtient les équations des deux plans suivants :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad a(x - x_1) + (b'' + \sqrt{b''^2 - aa'})(y - y_1) \\ + (b' + \sqrt{b'^2 + aa''})(z - z_1) = 0, \\ \quad a(x - x_1) + (b'' - \sqrt{b''^2 - aa'})(y - y_1) \\ + (b' - \sqrt{b'^2 - aa''})(z - z_1) = 0. \end{array}\right.$$

Ces plans se coupent suivant un diamètre, ou suivant une ligne parallèle à l'axe principal : en effet, retranchons l'une de l'autre les équations (3), en tenant compte de la condition

$$D = (b''^2 - aa')(b'^2 - aa'') - 2(b'b'' - ab)^2 = 0$$

relative au paraboloïde, nous retrouverons ainsi un des coefficients angulaires de l'axe

$$\frac{q}{r} = \frac{ab - b'b''}{b''^2 - aa'}.$$

Si nous ajoutons ensuite les mêmes équations (3), nous aurons

$$ap + b''q + b'r = 0,$$

et en substituant dans ce résultat la valeur de $\frac{q}{r}$, nous retomberons sur le second coefficient angulaire de l'axe

$$\frac{p}{r} = \frac{a'b' - bb''}{b''^2 - aa'};$$

donc les plans (4) se coupent réellement suivant un diamètre.

Si le pôle $x_1 y_1 z_1$ est placé en un point quelconque de ce diamètre, le plan (2) coupera le paraboloïde suivant une hyperbole qui aura son centre en ce point; et il coupera en même temps les deux plans (4) suivant les asymptotes de cette courbe. Il suit de là que les plans (4) sont le lieu géométrique des asymptotes de toutes les sections conjuguées au diamètre qui résulte de leur intersection.

21. Si l'on vérifie la condition de contact

$$t^2 - su_1 = 0,$$

en posant

$$s = 0, \quad t = 0, \quad u_1 = 0,$$

on rendra identique l'équation

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0;$$

et dans ce cas le rayon ρ devenant indéterminé se confondra tout entier avec la surface $u = 0$: donc les surfaces pour lesquelles les équations

$$s = 0, \quad t = 0$$

seront compatibles, admettront en chaque point des sections rectilignes. Les directions p, q, r de ces sections rectilignes seront données par les équations précédentes, et comme l'une d'elles est du second degré, il s'ensuit que par chaque pôle pris sur la surface $u_1 = 0$, on pourra tracer deux droites indéfinies qui coïncideront avec elle.

En éliminant p, q, r de $t = 0$, à l'aide des équations connues du rayon vecteur ρ, on reconnaît que ces deux droites sont situées dans le plan tangent au point $(x_1 y_1 z_1)$, et, par suite, que ce plan coupe la surface suivant des sections rectilignes.

En faisant la même élimination pour $s = 0$, on obtient une surface parallèle au cône ou aux plans asymptotes dont nous avons parlé;

ce qui démontre que les sections rectilignes faites sur la surface $u = 0$ par le plan tangent, sont parallèles à deux génératrices du cône ou des plans asymptotes.

Pour reconnaître d'une manière générale dans quel cas les équations

$$s = 0, \quad t = 0$$

sont compatibles, il faudra éliminer $\frac{q}{r}$ de l'une d'elles, et dans le résultat poser les conditions propres à rendre réelles les valeurs de $\frac{p}{r}$; par ce moyen, on reconnaîtra que l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique admettent seuls des sections rectilignes réelles : mais il conviendra d'employer dans le calcul les équations simplifiées des surfaces du second ordre.

22. L'équation

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0$$

conduit immédiatement au théorème du plan polaire. En effet, soient ρ et ρ' les deux racines de cette équation; leur produit sera égal à $\frac{u_1}{s}$, leur somme à $\frac{-2t}{s}$, et le rapport du produit à la somme sera enfin

$$(1) \qquad \frac{\rho\rho'}{\rho+\rho'} = -\frac{u_1}{2t}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2\rho\rho'}{\rho+\rho'} = -\frac{u_1}{t}.$$

Maintenant sur la sécante indéfinie issue du pôle P, qui nous donne ρ' et ρ'' par ses rencontres en M et N avec la surface $u = 0$, prenons une longueur $\mathrm{PK} = \rho_0$ telle, que nous ayons la relation

$$\rho_0 = \frac{2\rho\rho'}{\rho+\rho'} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\rho_0} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'},$$

ou enfin la proportion harmonique

$$\mathrm{MP} : \mathrm{MK} :: \mathrm{NP} : \mathrm{NK};$$

substituons ensuite ρ_0 dans la seconde équation (1) au lieu de son expression; nous aurons ainsi

$$\rho_0 = -\frac{u_1}{t}.$$

Cette équation représente un plan lieu géométrique des points K qui divisent harmoniquement toutes les sécantes issues du même pôle P. Elle peut s'écrire sous la forme

$$\rho_0 t + u_1 = 0;$$

laquelle, à cause de $x - x_1 = p\rho, \ldots$, devient

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + Z_1(z - z_1) + u_1 = 0,$$

ou, enfin,

$$X_1 x + Y_1 y + Z_1 z + cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + d = 0,$$

x, y, z étant les coordonnées courantes et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du pôle. Si ce pôle est convenablement placé pour mener des tangentes, il sera possible de former un cône circonscrit à la surface u; et alors le plan polaire

$$X_1 x + Y_1 y + Y_1 z + cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + d = 0,$$

sera le plan de la courbe de contact.

§ VII.

Sections circulaires. — Surfaces de révolution.

23. Recherchons s'il est possible qu'un plan coupe les surfaces du second ordre suivant un cercle. Désignons par $x_1 y_1 z_1$ les coordonnées du centre de la section, et prenons ce point pour pôle, alors la section devra avoir pour équation

$$sp^2 + u_1 = 0,$$

et son plan sera représenté par la relation

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + Z_1(z - z_1) = 0$$

qu'on obtient en éliminant de $t = 0$ les variables p, q, r, relatives à la direction d'un rayon ρ quelconque. Maintenant il reste à déterminer la position de ce plan de manière que s soit constant, afin que l'équation

$$s\rho^2 + u_1 = 0$$

représente un cercle.

Pour parvenir à ce but, multiplions par s la relation (2), n° **1**, et retranchons le résultat de l'expression de s; en posant ensuite

$$a - s = \mathrm{A},\ldots, \quad b - s\cos(q, r) = \mathrm{B},\ldots,$$

comme nous l'avons fait ailleurs, nous aurons

$$\mathrm{A}p^2 + \mathrm{A}'q^2 + \mathrm{A}''r^2 + 2\mathrm{B}qr + 2\mathrm{B}'rp + 2\mathrm{B}''pq = 0;$$

et cette équation devra exister en même temps que la suivante

$$t = \mathrm{X}_1 p + \mathrm{Y}_1 q + \mathrm{Z}_1 r = 0.$$

En éliminant le rapport $\frac{p}{r}$, nous aurons un résultat de la forme

$$\mathrm{M}q^2 + 2\mathrm{N}qr + \mathrm{L}r^2 = 0,$$

et afin que le rayon ρ puisse tourner en tous sens dans le plan de la section, nous poserons

$$\mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0, \quad \mathrm{L} = 0.$$

Ces conditions, qui vont nous servir à déterminer s, $\frac{\mathrm{Y}_1}{\mathrm{X}_1}$, $\frac{\mathrm{Z}_1}{\mathrm{X}_1}$, deviennent, lorsqu'elles sont développées,

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \mathrm{A}\mathrm{Y}_1^2 + \mathrm{A}'\mathrm{X}_1^2 - 2\mathrm{B}''\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1 = 0,\\
\mathrm{L} &= \mathrm{A}\mathrm{Z}_1^2 + \mathrm{A}''\mathrm{X}_1^2 - 2\mathrm{B}'\mathrm{X}_1\mathrm{Z}_1 = 0,\\
\mathrm{N} &= \mathrm{A}\mathrm{Y}_1\mathrm{Z}_1 - \mathrm{B}'\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1 - \mathrm{B}''\mathrm{X}_1\mathrm{Z}_1 + \mathrm{B}\mathrm{X}_1^2 = 0;
\end{aligned}$$

et puisque l'on peut les vérifier en posant

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{Y}_1 = \mathrm{Z}_1 = 0,$$

il s'ensuit évidemment que le lieu géométrique des centres des sections circulaires passe par le centre même de la surface $u = 0$.

Tirons de $M = 0$, $L = 0$ les valeurs des rapports $\frac{Y_1}{X_1}$, $\frac{Z_1}{X_1}$ et formons leur somme; de plus, tirons cette même somme de l'équation

$$M + L + 2N = 0$$

et comparons les deux résultats : nous retrouverons ainsi la fonction de s relative aux axes principaux sous la forme connue

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0.$$

Cette équation, combinée avec $M = 0$, $L = 0$, donne la solution du problème des sections circulaires. On en déduit trois valeurs de s, à chacune desquelles répondent deux valeurs de $\frac{Y_1}{X_1}$, $\frac{Z_1}{X_1}$, tirées de $M = 0$, $L = 0$; mais comme il faut, pour que ces racines soient réelles, vérifier les deux conditions

$$B''^2 - AA' > 0, \quad B'^2 - AA'' > 0,$$

le nombre des solutions réelles sera ainsi réduit à deux. Pour rendre la discussion plus facile, rapportons la surface $u = 0$ à deux plans diamétraux principaux et à un troisième parallèle à leurs cordes conjuguées; nous aurons alors à opérer sur l'équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2cz + d = u = 0.$$

En substituant pour A, A',... leurs valeurs dans les équations précédentes, nous les réduirons à

$$(a - s)(a' - s)(a'' - s) = 0, \tag{1}$$

$$(a - s)Y_1^2 + (a' - s)X_1^2 = 0, \tag{2}$$

$$(a - s)Z_1^2 + (a'' - s)X_1^2 = 0, \tag{3}$$

et nous aurons enfin

$$X_1 = ax_1, \quad Y_1 = a'y_1, \quad Z_1 = a''z_1 + c.$$

D'après l'équation (1), il faut que s soit égal à l'une des quantités a, a', a''; et, d'après les équations (2) et (3), il doit être compris entre a et a' ou a''; donc, en supposant $a > a' > a''$, nous aurons $s = a'$, et, par suite, en consultant l'équation (2), nous trouverons Y_1, et, par suite, $y_1 = 0$. Ce résultat nous apprend que le lieu des centres $x_1 y_1 z_1$ des sections circulaires est situé sur le plan coordonné zx.

Il nous reste à tenir compte de l'équation (3) : or, en y substituant pour X_1, Z_1 et s leurs valeurs, nous en tirons

$$\frac{a'' z_1 + c}{a x_1} = \pm \sqrt{\frac{a' - a''}{a - a'}},$$

et combinant ensuite cette double équation avec $y_1 = 0$, nous aurons, pour lieu des centres, deux droites situées sur le plan zx et passant, de plus, par le centre de la surface, comme nous l'avons déjà dit.

A cause de $Y_1 = 0$, l'équation générale du plan des sections circulaires se réduit à la suivante

$$X_1 (x - x_1) + Z_1 (z - z_1) = 0,$$

et, l'élimination de X_1, Z_1 étant faite, elle devient

$$\frac{x - x_1}{z - z_1} = \pm \sqrt{\frac{a' - a''}{a - a'}}.$$

Les deux plans représentés par cette équation sont parallèles à l'axe oy et forment avec l'axe oz des angles supplémentaires, qui deviendront égaux, et, par suite, droits, lorsque les deux sections se réduiront à une seule. Dans le cas du paraboloïde hyperbolique, on a

$$a'' = 0, \quad a' < 0;$$

et le radical précédent devenant $\sqrt{\frac{-a'}{a + a'}}$, est alors imaginaire. Ce genre de surface du second ordre est le seul qui n'admette pas de sections circulaires.

24. La surface du second ordre sera de révolution, si les deux systèmes des sections circulaires se réduisent à un seul; cherchons donc, d'après cela, les caractères de ce genre de surface. Les équations

$$M = 0, \quad L = 0,$$

donnent, comme nous l'avons vu, les coefficients X_1, Y_1, Z_1 du plan d'une section circulaire quelconque; or il suffit que leurs racines soient égales, pour qu'il n'y ait qu'une série de sections circulaires; donc les conditions des surfaces de révolution seront

$$B''^2 - AA' = 0, \quad B'^2 - AA'' = 0.$$

Si nous tirons alors de $M = 0$, $L = 0$, les relations

$$(1) \qquad \frac{Y_1}{X_1} = \frac{B''}{A}, \quad \frac{Z_1}{X_1} = \frac{B'}{A},$$

nous aurons pour plan d'une section circulaire quelconque

$$A(x - x_1) + B''(y - y_1) + B'(z - z_1) = 0,$$

et le lieu des centres ou l'axe de révolution sera enfin donné par les deux équations (1).

25. Examinons maintenant ce que devient l'équation

$$AB^2 + \ldots = 0.$$

Si on la met sous la forme

$$(B''^2 - AA')(B'^2 - AA'') - (B'B'' - AB)^2 = 0,$$

il est évident que les conditions

$$B''^2 - AA' = 0, \quad B'^2 - AA'' = 0,$$

posées plus haut, la réduiront à

$$B'B'' - AB = 0,$$

d'où il résulte

$$B^2 - A'A'' = 0;$$

et puisque ces binômes ne sont que du second degré en s, il s'ensuit que les trois racines de l'équation primitive se réduisent à deux, et que la troisième est égale à l'une d'elles. Remarquons, de plus, que ces mêmes équations binômes rendent indéterminés les coefficients angulaires des cordes conjuguées (2), n° **7**.

Les valeurs de s, déduites de chacune des trois équations

$$B''^2 - AA' = 0, \quad B'^2 - AA'' = 0, \quad B^2 - A'A'' = 0,$$

doivent être égales entre elles. Pour déterminer les conditions de cette égalité, substituons à A, A',... leurs valeurs $a - s$, etc., dans les équations précédentes, nous aurons ainsi

$$(a - s)(a'' - s) = [b' - s\cos(p, r)]^2, \ldots,$$

ou bien

$$s^2 \sin^2(p, r) - [(a + a'' - 2b'\cos(p, r)]\, s + aa'' - b'^2 = 0, \ldots,$$

et éliminant ensuite s^2 entre ces équations prises deux à deux, nous obtiendrons enfin les conditions suivantes

$$\begin{aligned}
s &= \frac{(aa' - b''^2)\sin^2(q, r) - (a'a'' - b^2)\sin^2(p, q)}{[a + a' - 2b''\cos(p, q)]\sin^2(q, r) - [a' + a'' - 2b\cos(q, r)]\sin^2(p, q)}, \\
&= \frac{(a'a'' - b^2)\sin^2(p, r) - (aa'' - b'^2)\sin^2(q, r)}{[a' + a'' - 2b\cos(q, r)]\sin^2(p, r) - [a + a'' - 2b'\cos(p, r)]\sin^2(q, r)}, \\
&= \frac{(aa'' - b'^2)\sin^2(p, q) - (aa' - b''^2)\sin^2(p, r)}{[a + a'' - 2b'\cos(p, r)]\sin^2(p, q) - [a + a' - 2b''\cos(p, q)]\sin^2(p, r)},
\end{aligned}$$

que devront vérifier les surfaces de révolution.

Terminons l'article des sections circulaires, en faisant observer qu'il n'y a que les surfaces de révolution qui puissent être touchées suivant une courbe plane par une sphère.

§ VIII.

Foyers des surfaces du second ordre. — Sections rapportées a leurs foyers.

26. Adoptant la définition analytique ordinaire, supposons que tous les rayons ρ issus d'un foyer seront des fonctions rationnelles de p, q, r, et, en conséquence, proposons-nous de rendre rationnelle l'équation

$$\rho = \frac{u_1}{-t \mp \sqrt{t^2 - su_1}}.$$

Il ne serait pas possible d'admettre que l'on ait

$$\sqrt{t^2 - su_1} = lp + mq + nr,$$

car cette hypothèse réduirait la surface du second ordre à un plan; il nous reste donc à poser

$$t^2 - su_1 = k^2 \text{ constant},$$

ce qui donne

$$(X_1^2 - au_1)p^2 + (Y_1^2 - a'u_1)q^2 + \ldots + 2(Y_1Z_1 - bu_1)qr$$
$$+ 2(Z_1X_1 - b'u_1)rp + \ldots = k^2.$$

En multipliant l'équation de condition $p^2 + \ldots = 1$ par k^2, et identifiant le produit avec la relation précédente, afin que la direction de ρ reste arbitraire, nous aurons, en posant $k^2 = -\mu u_1$,

$$X_1^2 = u_1(a-\mu), \quad Y_1^2 = u_1(a'-\mu), \quad Z_1^2 = u_1(a''-\mu),$$
$$X_1Y_1 = u_1[b'' - \mu\cos(p,q)], \quad Y_1Z_1 = u_1[b - \mu\cos(q,r)],$$
$$Z_1X_1 = u_1[b' - \mu\cos(r,p)].$$

Éliminant ensuite X_1, Y_1, Z_1, on déduit de ces équations

$$(1)\qquad \begin{cases}(a-\mu)(a'-\mu) = [b'' - \mu\cos(p,q)]^2,\\ (a'-\mu)(a''-\mu) = [b - \mu\cos(q,r)]^2,\\ (a''-\mu)(a-\mu) = [b' - \mu\cos(r,p)]^2.\end{cases}$$

D'autres combinaisons, faciles à apercevoir, conduisent encore aux relations

$$(2)\qquad \begin{cases}Y_1[b' - \mu\cos(r,p)] = X_1[b - \mu\cos(q,r)],\\ Z_1[b'' - \mu\cos(p,q)] = X_1[b - \mu\cos(q,r)];\end{cases}$$

$$(3)\qquad X_1^2 - au_1 = Y_1^2 - a'u_1.$$

Ces six nouvelles équations tenant lieu des premières dont elles ont été déduites, c'est elles qu'il convient d'interpréter. Or on reconnaît dans le système (1), en remplaçant μ par s, les conditions des surfaces de révolution que nous avons étudiées : de plus, les deux valeurs de μ ou de s, tirées de l'une de ces équations, devant vérifier les deux autres, vérifieront aussi, comme nous l'avons déjà vu, l'équation

$$Ls^3 + \ldots + D = 0$$

relative aux plans principaux.

Le système des équations (2) représentera l'axe de révolution ou une droite quelconque perpendiculaire à cet axe, selon la valeur de μ que l'on aura substituée dans (2). Enfin, les intersections de l'axe avec la surface du second ordre (3) achèveront de déterminer les foyers. S'il arrivait que ces foyers vinssent à coïncider avec le centre de la surface, il en résulterait

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0,$$

et, par suite, nous aurions

$$\rho = \frac{u_1}{-k},$$

c'est-à-dire, l'équation de la sphère; les caractères de cette surface, déduits des équations (1) et (2), seront donc

$$a = a' = a'', \quad b = a\cos(q, r), \quad b' = a\cos(r, p), \quad b'' = a\cos(p, q).$$

27. Dans le cas des courbes du second ordre, représentées par

$$ax^2 + a'y^2 + 2bxy + 2cx + 2c'y + d = u = 0,$$

les conditions relatives aux foyers se réduisent à

$$X_1^2 = u_1(a - \mu), \quad Y_1^2 = u_1(a' - \mu), \quad X_1Y_1 = u_1[b - \mu\cos(p, q)];$$

d'où l'on tire

$$(1) \quad \begin{cases} (a - \mu)(a' - \mu) = [b - \mu\cos(p, q)]^2, \quad Y_1 = X_1\sqrt{\dfrac{a' - \mu}{a - \mu}}, \\ X_1^2 - au_1 = Y_1^2 - a'u_1. \end{cases}$$

La première de ces équations donne deux valeurs de μ; la deuxième, les deux axes correspondants; la troisième représente une hyperbole dont l'équation développée a la forme

$$(2) \quad \begin{cases} (b^2 - aa')(x_1^2 - y_1^2) + 2(bc' - ca')x_1 + 2(ac' - cb)y_1 \\ \quad + c'^2 - c^2 + ad - a'd = 0. \end{cases}$$

Si cette courbe pouvait couper les deux axes en quatre points, il y aurait autant de foyers; mais, à l'aide des équations aux axes, on démontre sans peine qu'il y a deux foyers au plus et un au moins.

L'équation (2) se réduit au premier degré dans le cas de $b^2 - aa' = 0$, c'est-à-dire quand la courbe est une parabole. On retrouve l'équation (2) en résolvant successivement $u = 0$ par rapport à x et à y, et en égalant entre eux les polynômes entiers qui se trouvent sous les radicaux.

L'équation focale

$$\rho = \frac{u_1}{k - t}$$

se ramène, quand on la développe, à la forme

$$k\rho = X_1 p\rho + Y_1 q\rho + u_1 = X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + u_1.$$

En plaçant l'origine des coordonnées au foyer, et en désignant par m, n, d les constantes X_1, etc., on trouve

$$\rho = mx + ny + d,$$

équation connue, qui sert de vérification à la première.

28. Par un point F, (x_1, y_1, z_1), mener un plan

$$(1) \qquad m(x - x_1) + n(y - y_1) + z - z_1 = 0,$$

qui coupe la surface $u = 0$, de manière que F soit le foyer de la section; et, réciproquement, chercher le foyer d'une section donnée.

Le pôle $x_1 y_1 z_1$ étant placé en F, il suffira de rendre $\sqrt{t^2 - su_1}$ constant, pour que ce pôle soit un foyer; posons donc

$$(X_1^2 - au_1)p^2 + \ldots + 2(Y_1 Z_1 - bu_1)qr + 2(X_1 Z_1 - b'u_1)pr + 2(X_1 Y_1 - b''u_1)pq = k^2 \text{ constant},$$

ou, pour abréger,

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2Bqr + 2B'pr + 2B''pq = k^2.$$

Maintenant, multiplions l'équation (2), n° **1**, par k^2, retranchons le résultat de l'équation précédente, et posons ensuite

$$A - k^2 = A_1, \ldots, \quad B - k\cos(q, r) = B_1, \ldots,$$

nous obtiendrons ainsi

$$(2) \qquad A_1 p^2 + A'_1 q^2 + A''_1 r^2 + 2B_1 qr + 2B'_1 pr + 2B''_1 pq = 0.$$

Or si on élimine p, q, r, cette équation représentera une surface conique dont le pôle F sera le sommet, qui coupera la surface $u = 0$ suivant les courbes cherchées, et qui prendra, du reste, autant de formes que k^2 aura de valeurs différentes.

Le rayon ne devant tourner sur son pôle que dans le plan (1), il faudra que la relation

$$mp + nq + r = 0,$$

qui exprime le parallélisme d'une droite avec ce plan, soit vérifiée en même temps que l'équation (2). Éliminons donc r entre ces deux équations, nous aurons alors un résultat de la forme

$$Mp^2 + Nq^2 + 2Lpq = 0;$$

cette équation devra être identique, afin que le rayon ρ tourne en tous sens dans le plan (1): nous aurons donc enfin, pour déterminer m, n et k, les équations

$$M = 0, \quad N = 0, \quad L = 0,$$

ou bien

$$(3) \quad M = A''_1 m^2 - 2B'_1 m + A_1 = 0, \quad N = A''_1 n^2 - 2B_1 n + A'_1 = 0,$$
$$L = A''_1 mn - B_1 m - B'_1 n + B''_1 = 0.$$

Des équations $M = N = 0$, tirons les valeurs de m et de n, et faisons la somme $m + n$; formons de plus l'équation

$$M + N + 2L = 0,$$

pour en tirer aussi la valeur de $m + n$, et égalons ces deux expressions de la même somme: nous trouverons ainsi une fonction de k^2 du troisième degré semblable à la fonction de s, relative aux plans principaux, savoir :

$$(4) \qquad A_1 B_1^2 + A'_1 B'^2_1 + A''_1 B''^2_1 - A_1 A'_1 A''_1 - 2B_1 B'_1 B''_1 = 0.$$

Or nous avons vu, en recherchant les plans principaux, que les racines d'une équation de cette forme sont toujours réelles, et que l'une d'elles au moins est positive; il existe donc pour k^2 au moins une valeur convenable à laquelle correspondront deux systèmes de valeurs pour m et n. Ces valeurs de m et de n se déduiront des équations (3), mais elles ne seront réelles qu'aux conditions

$$(5) \qquad B'^2_1 - A_1 A''_1 > 0, \quad B_1^2 - A'_1 A''_1 > 0,$$

que k^2 devra remplir.

D'après les conditions (5) et (4), on peut décomposer l'équation (2) en facteurs, et la ramener ainsi au système des deux relations

$$A''_1 r + (B_1 + \sqrt{B_1^2 - A'_1 A''_1})\, q + (B'_1 + \sqrt{B'^{\,2}_1 - A_1 A''_1})\, p = o,$$
$$A''_1 r + (B_1 - \sqrt{B_1^2 - A'_1 A''_1})\, q + (B'_1 - \sqrt{B'^{\,2}_1 - A'' A})\ r = o;$$

d'où, en éliminant p, q, r, on tire les équations des plans des sections cherchées. Les équations (3) et (1) produiraient les mêmes résultats.

L'analogie de forme entre les équations (3), (4) et celles relatives aux sections circulaires, nous permet d'affirmer que par le foyer F on ne fera au plus que deux sections réelles ayant ce point pour foyer.

29. Les constantes k, m, n étant déterminées, comme nous venons de le voir, les équations d'une section ayant son foyer en F, seront

$$(1) \qquad \rho = \frac{u_1}{\mp k - t}, \quad mp + nq + r = o.$$

Il nous reste à déterminer la grandeur et la position de l'axe focal; or nous y parviendrons en recherchant les valeurs limites du rayon ρ, ou, ce qui revient au même, celles de la fonction t. Élevons au carré l'expression de t et formons ainsi l'équation

$$X_1^2 p^2 + \ldots + 2 Y_1 Z_1 qr + \ldots = t^2;$$

multiplions la condition (2), n° 1, par t^2, pour la soustraire de l'équation précédente; et posons, pour abréger,

$$X_1^2 - t^2 = A, \ldots, \quad Y_1 Z_1 - t^2 \cos(q, r) = B, \ldots,$$

nous obtiendrons ainsi

$$(2) \qquad A p^2 + A' q^2 + A'' r^2 + 2 B qr + 2 B' rp + 2 B'' pq = o.$$

En éliminant ensuite r de cette équation, à l'aide de

$$mp + nq + r = o,$$

nous aurons un résultat de la forme

$$(3) \qquad M p^2 + N q^2 + 2 L pq = o;$$

or, pour que les valeurs du rapport $\frac{p}{q}$ tirées de cette équation soient réelles, il faut que k^2 satisfasse à la condition

$$L^2 - MN = \text{ou} > 0,$$

donc, d'après le principe n° **3**, les limites de t^2 seront données par l'équation

$$(4) \qquad L^2 - MN = 0,$$

c'est-à-dire par

$$(A''mn - Bm - B'n + B'')^2 = (A''m^2 - 2B'm + A)(A''n^2 - 2Bn + A').$$

Enfin désignant par μ le maximum de t, et par φ l'angle que fait un rayon vecteur quelconque p, q, r avec l'axe focal, nous aurons

$$t = \mu \cos\varphi,$$

et, par suite, l'équation (1) deviendra

$$\rho = \frac{u_1}{\mp k - \mu \cos\varphi}:$$

c'est l'équation d'une section rapportée à son foyer dans son plan. Cette section sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que l'on aura

$$\frac{\mu}{k} < 1, \quad \frac{\mu}{k} > 1, \quad \frac{\mu}{k} = 1.$$

La relation (3) et celle que l'on formerait par analogie en éliminant de l'équation (2) q au lieu de r, donnent les coefficients angulaires de l'axe focal sous la forme très-simple

$$\frac{q}{p} = -\frac{L}{N}, \quad \frac{r}{p} = -\frac{L'}{N'},$$

à cause de la condition (4) et de son homologue. Mais, au lieu de la relation

$$M'p^2 + N'r^2 + 2L'pr = 0,$$

analogue à l'équation (3), on peut encore se servir des équations

$$X_1 p + Y_1 q + Z_1 r = \mu \quad \text{et} \quad p^2 + \ldots + 2qr\cos(q, r) + \ldots = 1.$$

La question de trouver le foyer d'une section donnée peut se résoudre à l'aide des formules n° **28**. En effet, si le plan (1) de la section était connu d'avance, les trois équations (3) combinées avec celle de ce plan donneraient la constante k et les trois coordonnées x_1, y_1, z_1 du foyer de la section.

30 Appliquons maintenant le problème du n° **28** au cône elliptique : ce cône étant rapporté à des coordonnées rectangulaires, ayant leur origine O au sommet, aura pour équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0.$$

En supposant que l'axe Oz passe par le foyer F, les plans zx et zy couperont ce cône suivant deux droites, et il en résultera les conditions suivantes :

$$b^2 - a'a''' > 0 \quad \text{et} \quad b'^2 - aa'' > 0;$$

de plus, comme les sections parallèles au plan des xy seront alors des ellipses, nous aurons encore

$$b''^2 - aa' < 0.$$

Cela posé, les éléments du problème n° **28** seront pour le cas du cône, en désignant par δ la distance OF,

$$\begin{gathered} x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \delta, \quad u_1 = a''\delta, \quad A = (b'^2 - aa'')\delta^2 > 0, \\ A' = (b^2 - a'a'')\delta^2 > 0, \qquad A'' = (a''^2 - a''^2)\delta^2 = 0, \\ B'' = (bb' - a''b'')\delta^2, \qquad B' = B = 0. \end{gathered}$$

Or, d'après ces relations, l'équation (4), n° **28**, devient

$$(A - k^2)(A' - k^2) - B''^2 = 0,$$

et donne

$$2.k^2 = A + A' - \sqrt{(A + A')^2 + 4(B''^2 - AA')}.$$

Comme les équations (3), n° **28**, se réduisent dans les mêmes circonstances à

$$(1) \qquad m^2 = \frac{A - k^2}{k^2}, \quad n^2 = \frac{A' - k^2}{k^2}, \quad k^2 mn = B'';$$

il en résulte que k^2 est plus petit que A et A', et, par suite, plus petit que $\frac{A + A'}{2}$: c'est pour cela que nous avons omis le signe $+$ devant le radical précédent.

Puisque les signes de m et n dépendent de celui de B'' dans la troisième équation (1), il n'y aura que deux solutions, et, d'après ce qui a été dit n° **29**, on pourra déterminer la grandeur de l'axe focal de chacune des sections, la direction de ce même axe, l'excentricité, et, par suite, la nature de la courbe.

§ IX.

Similitude des surfaces du second ordre.

31. Les conditions de similitude des surfaces se déduisent aisément des conditions de similitude des polyèdres. Soient donc deux surfaces du second ordre semblables et semblablement placées

$$ax^2 + \ldots + 2byz + cx + \ldots + d = u = 0,$$

$$Ax^2 + \ldots + 2Byz + Cx + \ldots + D = U = 0,$$

ou bien en coordonnées polaires

$$u_1 + 2t\rho + s\rho^2 = 0, \tag{1}$$

$$U_1 + 2T\rho' + S\rho'^2 = 0. \tag{2}$$

Si l'on admet que les deux pôles x_1, y_1, z_1 et x'_1, y'_1, z'_1 sont des homologues pris dans l'espace ou sur les surfaces, deux rayons quelconques ρ et ρ', issus parallèlement de ces pôles, seront des lignes homologues ayant entre elles un rapport constant μ, indépendant de leur direction commune; posons donc

$$\rho = \mu\rho',$$

et, par suite, en éliminant ρ' de l'équation (2), nous aurons

$$U_1\mu^2 + 2T\mu\rho + S\rho^2 = 0. \tag{3}$$

Les valeurs de ρ, tirées des équations (3) et (1), devant être nécessairement égales, quelle que soit la grandeur du rayon, il faut que ces équations se réduisent à une seule. Multiplions donc la dernière par k et identifions le résultat avec (1), nous aurons ainsi

$$u_1 = \mu^2 k U_1, \quad s = Sk, \quad t = \mu k T.$$

Ces équations devront être vérifiées, quels que soient p, q, r, ou quelle que soit la direction commune des rayons ρ des deux surfaces semblables. Nous tirons de la seconde

$$s = \mathrm{S}k$$

les rapports égaux

$$\frac{a}{\mathrm{A}} = \frac{a'}{\mathrm{A}'} = \frac{a''}{\mathrm{A}''} = \frac{b}{\mathrm{B}} = \frac{b'}{\mathrm{B}'} = \frac{b''}{\mathrm{B}''} = k,$$

et de la troisième

$$t = \mu k \mathrm{T}$$

les trois relations

$$(4) \qquad \mathrm{X}_1 = \mu k \mathrm{X}'_1, \quad \mathrm{Y}_1 = \mu k \mathrm{Y}'_1, \quad \mathrm{Z}_1 = \mu k \mathrm{Z}'_1,$$

dans lesquelles $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}'_1, \ldots$, représentent les valeurs des dérivées de $u = 0$, $\mathrm{U} = 0$, pour x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1 coordonnées de deux points homologues. A l'inspection des équations (4), on reconnaît que ces dérivées sont proportionnelles, et, par suite, que les plans tangents aux points homologues sont parallèles entre eux.

Si l'on donne d'avance le pôle x_1, y_1, z_1, les équations (4) feront connaître son homologue x'_1, y'_1, z'_1.

Les équations des centres des deux surfaces u, U, c'est-à-dire

$$(5) \qquad \mathrm{X}_1 = \mathrm{Y}_1 = \mathrm{Z}_1 = 0, \quad \mathrm{X}'_1 = \mathrm{Y}'_1 = \mathrm{Z}'_1 = 0,$$

vérifient les relations (4); les centres sont donc des points homologues.

Il est facile de déterminer un point homologue commun aux deux surfaces u, U; il suffit, pour cela, de faire dans les équations (4)

$$x_1 = x'_1, \quad y_1 = y'_1, \quad z_1 = z'_1,$$

et de les résoudre.

Les coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre commun de similitude étant ainsi déterminées, la première équation

$$u_1 = \mu^2 k \mathrm{U}_1$$

fera enfin connaître le rapport de similitude μ.

Les surfaces semblables $u = 0$, $\mathrm{U} = 0$ seront concentriques, lorsque l'on aura

$$\frac{a}{\mathrm{A}} = \ldots = \frac{c}{\mathrm{C}} = \frac{c'}{\mathrm{C}'} = \frac{c''}{\mathrm{C}''} = k,$$

puisque, dans cette hypothèse, les deux systèmes d'équations (5), qui déterminent respectivement les centres des surfaces, deviennent identiques entre eux, quand on multiplie le second par k.

§ X.

Surfaces d'un degré quelconque. — Plan tangent. — Courbe indicatrice. Surface osculatrice. — Rayon et lignes de courbure.

32. Disons maintenant quelques mots des surfaces en général. En posant

$$x = x_1 + p\rho, \quad y = y_1 + q\rho, \quad z = z_1 + r\rho,$$

l'équation

$$f(x, y, z) = u = 0$$

d'une surface quelconque, prendra la forme polaire

$$\begin{aligned} u_1 &+ \left(\frac{du_1}{dx_1} p + \frac{du_1}{dy_1} q + \frac{du_1}{dz_1} r\right) \rho \\ &+ \left(\frac{d^2u_1}{dx_1^2} p^2 + \ldots + 2\frac{d^2u_1}{dx_1\,dy_1} pq + 2\frac{d^2u_1}{dy_1\,dz_1} qr + 2\frac{d^2u_1}{dz_1\,dx_1} pr\right)\frac{\rho^2}{1.2} \\ &+ \left(\frac{d^3u_1}{dx_1^3} p^3 + \frac{d^3u_1}{dy_1^3} q^3 + \ldots\right)\frac{\rho^3}{1.2.3} + \ldots = 0, \end{aligned}$$

ou

$$(1) \qquad u_1 + t\rho + s\frac{\rho^2}{1.2} + v\frac{\rho^3}{1.2.3} + \ldots + N\rho^{m-1} + M\rho^m = 0.$$

Si l'on place le pôle sur la surface, on a

$$u_1 = 0,$$

et, par suite, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad t + s\frac{\rho}{1.2} + v\frac{\rho^2}{1.2.3} + \ldots + N\rho^{m-2} + M\rho^{m-1} = 0:$$

or, lorsque l'on fait $\rho = 0$, la sécante indéfinie sur laquelle nous prenons ρ devient tangente, et la relation précédente se réduit à $t = 0$; donc, en éliminant p, q, r de $t = 0$, au moyen des équations

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$$

d'une tangente quelconque, on obtiendra l'équation

$$\frac{du_1}{dx_1}(x - x_1) + \frac{du_1}{dy_1}(y - y_1) + \frac{du_1}{dz_1}(z - z_1) = 0$$

du lieu géométrique de toutes les tangentes ou du plan tangent. Le plan tangent à $u = 0$ conduirait facilement à la tangente à une courbe considérée comme l'intersection de deux surfaces.

33. Pour étudier particulièrement un point $m(x, y, z)$ de la surface $u = 0$, plaçons le pôle x_1, y_1, z_1 très-près de ce point; nous pourrons, en conséquence, négliger les puissances de ρ supérieures à la seconde, et réduire ainsi l'équation (1), n° **32**, à celle-ci

$$(1) \qquad u_1 + t\rho + s\frac{\rho^2}{2} = 0,$$

qui ne représente plus qu'une surface de second ordre. On distinguera la nature de cette surface à l'aide des dérivées secondes de u qui entrent dans s; puisque ces dérivées remplacent ici les quantités a, a', a'', b, b', b'' qui nous ont conduit précédemment à la distinction des surfaces du second ordre.

L'équation (1) représentera une section parallèle au plan tangent en $m(x, y, z)$, ou la courbe indicatrice, si l'on assujettit ρ à demeurer parallèle à ce plan, en posant la condition

$$\frac{du}{dx}p + \frac{du}{dy}q + \frac{du}{dz}r = 0.$$

De cette même équation (1) on déduit facilement l'équation de la surface osculatrice au point m. En effet, le pôle étant placé en ce point sur la surface $u = 0$, l'équation (1) devient

$$2t\rho + s\rho^2 = 0,$$

ou bien

$$(2) \qquad 2\left(\frac{du}{dx}p + \frac{du}{dy}q + \frac{du}{dz}r\right)\rho + \left(\frac{d^2u}{dx^2}p^2 + \ldots + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}qr + \ldots\right)\rho^2 = 0,$$

en remplaçant t et s par leurs valeurs.

Désignons maintenant par x, y, z les coordonnées du point m pris pour pôle, et par x', y', z' les coordonnées courantes de la surface (2); nous aurons alors

$$x' - x = p\rho, \quad y' - y = q\rho, \quad z' - z = r\rho,$$

et, par suite, en éliminant $p\rho, \ldots$, nous ramènerons l'équation (2) à la suivante

$$2\left[\frac{du}{dx}(x'-x)+\frac{du}{dy}(y'-y)+\frac{du}{dz}(z'-z)\right]$$
$$+\frac{d^2u}{dx^2}(x'-x)^2+\ldots+2\frac{d^2u}{dy\,dz}(y'-y)(z'-z)+\ldots=0,$$

qui représentera la surface osculatrice dont il est question. Il est évident qu'autour et très-près du point m, le rayon vecteur ρ de la surface (2) ne diffère de celui de la surface (2), n° **32**, que d'un infiniment petit du second ordre.

L'équation (1), n° **32**, servirait encore à prouver que les surfaces de degré impair sont toutes infinies.

34. Il existe un moyen très-élémentaire pour déterminer l'expression du rayon de courbure ρ relatif à une section plane quelconque d'une surface; nous croyons devoir le faire connaître.

Soient

$$\rho\frac{d^2x}{ds^2},\quad \rho\frac{d^2y}{ds^2},\quad \rho\frac{d^2z}{ds^2}$$

les cosinus connus du rayon de courbure dont il s'agit; soient, en second lieu,

$$\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\qquad \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\qquad \frac{1}{\sqrt{p^2-q^2+1}}$$

les cosinus relatifs à la normale menée au point de rencontre du rayon avec la courbe; et soit enfin θ l'angle que fait la normale avec ce rayon.

En multipliant les cosinus correspondants aux mêmes axes et en ajoutant les produits, nous aurons

$$\cos\theta=\frac{\rho}{ds^2\sqrt{p^2+q^2+1}}(d^2z-pd^2x-qd^2y);$$

mais l'équation de la surface $z=\varphi(x,y)$, étant différentiée deux fois, donne

$$d^2z=pd^2x+qd^2y+rdx^2+2sdx\,dy+tdy^2;$$

donc, en éliminant

$$d^2z-pd^2x-qd^2y,$$

et en posant

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos6,$$

on trouvera enfin

$$(1) \qquad \rho = \frac{\cos\theta\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos6 + t\cos^26},$$

formule importante qu'il s'agissait d'établir.

La normale à la surface et la tangente à la section au point que nous considérons sont perpendiculaires entre elles, donc on aura, entre leurs cosinus, la relation

$$-p\cos\alpha - q\cos6 + \cos\gamma = 0,$$

ou bien, à cause de $\cos^2\alpha + \cos^26 + \cos^2\gamma = 1$,

$$(2) \qquad (1+p^2)\cos^2\alpha + 2qp\cos\alpha\cos6 + (1+q^2)\cos^26 = 1.$$

Sans nous arrêter à déduire de l'équation (1) les théorèmes de Meusnier et d'Euler, et les conditions des ombilics,..., cherchons le maximum R du rayon ρ en supposant $\cos\theta = 1$. Comme les valeurs limites de ρ ne dépendent que du dénominateur de son expression, égalons donc ce dénominateur à $\frac{1}{k}$, en posant

$$(3) \qquad r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos6 + t\cos^26 = \frac{1}{k},$$

multiplions ensuite cette équation par k et retranchons le résultat de l'équation (2), en faisant

$$\frac{\cos6}{\cos\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = m,$$

nous aurons ainsi

$$(1+q^2-kt)m^2 + 2(pq-ks)m + 1 + p^2 - kr = 0;$$

d'où il résulte, n° **3**, que les valeurs limites de k seront données par la relation

$$(4) \quad (s^2-tr)k^2 - [2pqs - t(1+p^2) - r(1+q^2)]k - (p^2+q^2+1) = 0.$$

En éliminant k, à l'aide de $R = k\sqrt{p^2+q^2+1}$, on aura enfin, pour déterminer les courbures maximum et minimum, l'équation connue de Monge

$$(s^2 - tr)\,R^2 - [2pqs - t(1+p^2) - r(1+q^2)]\sqrt{p^2+q^2+1}\,.R \\ -(p^2+q^2+1)^2 = 0.$$

Si l'on divise entre elles les équations (2) et (3) et qu'on remplace $\frac{\cos 6}{\cos\alpha}$ par m, on aura

$$k = \frac{(1+p^2) + 2pqm + (1+q^2)m^2}{r + 2sm + tm^2},$$

et, par suite, l'équation (4) deviendra

$$[s(1+p^2) - pqt]\,m^2 + [r(1+q^2) - t(1+p^2)]\,m \\ + pqr - s(1+p^2) = 0.$$

Cette équation fera connaître les directions des sections principales; elle sera de plus l'équation différentielle des lignes de courbure de Monge, si l'on remplace m par $\frac{dy}{dx}$.