JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Observation sur une note de M. Lobatto

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 47-48.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__47_0>

OBSERVATION SUR UNE NOTE DE M. LOBATTO;

PAR M. J.-A. SERRET.

Dans une Note publiée au tome IX de ce Recueil, page 177, M. Lobatto a fait connaître une propriété curieuse appartenant à une classe assez étendue d'équations du troisième degré dont les racines sont réelles. Voici quelle est cette propriété :

L'équation du troisième degré étant ramenée à la forme

$$x^3 - px + q = 0,$$

où p et q sont positifs, si l'on pose $r = \sqrt{4p^3 - 27q^2}$ et

$$\frac{9q - r}{2r} = A, \quad \frac{p^2}{r} = B, \quad \frac{3p}{r} = A', \quad \frac{9q + r}{2r} = B',$$

d'où il suit nécessairement $AB' - BA' = -1$, *il arrivera, si* A, B, A', B' *sont des entiers, qu'en développant en fraction continue les trois racines de l'équation proposée, ces trois fractions continues se termineront par les mêmes quotients incomplets.*

M. Lobatto prouve bien dans son Mémoire que A, B, A', B' doivent être entiers, pour que cette propriété ait lieu, mais il ne prouve pas du tout que cela suffit. La démonstration peut se faire en quelques mots. Si l'on désigne par $-x$ la racine négative de la proposée, par x_1 et x_2 les deux racines positives, on a

$$x_1 = \frac{Ax + B}{A'x + B'}, \quad x_2 = \frac{B'x + B}{A'x + A},$$

ainsi que M. Lobatto l'a trouvé. Nous ne considérerons que x_1, la même chose ayant lieu pour x_2. Si x était > 1, $A > B$, $A' > B'$, x serait un quotient complet de la fraction continue égale à x_1 ; car, à cause de $AB' - BA' = -1$, on peut considérer $\frac{A}{A'}$ et $\frac{B}{B'}$ comme deux réduites successives d'une même fraction continue : notre propriété serait donc démontrée. Cela n'ayant pas lieu, soit $x = a + \frac{1}{y}$, a étant l'entier le plus grand contenu dans x; on aura

$$x_1 = \frac{(Aa + B)y + A}{(A'a + B')y + A'} = \frac{Cy + A}{C'y + A'},$$

et l'on a ici $C > A$, $C' > A'$ et $CA' - AC' = +1$: donc y sera un quotient complet de x_1, et notre propriété est démontrée.

Ceci suppose que a n'est pas nul ou que $x > 1$; mais si le contraire avait lieu, on poserait $y = b + \frac{1}{z}$, et l'on prouverait, comme précédemment, que z est alors un quotient complet de x_1.