JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TH. DIEU

Thèse d'astronomie. Sur les réfractions atmosphériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 372-400.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__372_0>

THÈSE D'ASTRONOMIE.

Sur les réfractions atmosphériques;

PAR M. TH. DIEU,
Professeur de Mathématiques supérieures au Lycée de Dijon.

Préliminaires.

1. La simple inspection du mouvement des corps célestes, un petit nombre étant exceptés, a conduit à cette idée fondamentale qu'on peut s'en rendre compte en les supposant enchâssés dans une sphère qui tournerait autour d'un diamètre fixe passant par l'œil de l'observateur et incliné à son horizon.

Le plus grand nombre d'entre eux a donc reçu le nom d'*astres fixes*, et quelques-uns celui de *planètes;* parce que les premiers se lèvent et se couchent aux mêmes points de l'horizon, et semblent décrire respectivement les mêmes cercles dans le ciel; tandis que les derniers se déplacent parallèlement à l'axe fixe du mouvement général, et que leur mouvement paraît pouvoir être décomposé en deux autres fictifs, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à cet axe.

Les observations faites au moyen des gnomons et du cadran équinoxial pour le Soleil, des armilles, des cercles ou secteurs équatoriaux et des machines parallactiques pour le Soleil et les autres astres visibles avec ces instruments, confirment cette première apparence.

Cependant les anciens astronomes avaient remarqué vers l'horizon une irrégularité qu'ils n'avaient guère, dit Delambre, le moyen de mesurer, et qu'ils attribuèrent à l'existence des vapeurs qui s'y trouvent en plus grande abondance qu'à une certaine hauteur.

Grâce à l'invention des lunettes, à celle des horloges, et aux perfectionnements apportés dans la construction des instruments, les astronomes modernes ont fini par reconnaître que cette irrégularité se faisait sentir à toute distance zénithale; et comme elle s'explique par la théorie physique de la simple réfraction, le nom de *réfraction atmosphérique* lui a été attribué.

Voici comment on peut s'assurer de l'existence de cette irrégularité.

Soient P le pôle, Z le zénith de l'observateur, PMP′ son méridien, et A la position apparente d'une étoile.

On obtient de diverses manières la distance zénithale PZ du pôle; on peut observer la distance méridienne PA′ de l'étoile au pôle qui est le complément de sa déclinaison, ainsi que sa distance zénithale AZ et son azimut PZA; enfin, on peut déduire de l'observation du passage de l'étoile au méridien, l'angle horaire APZ, différence des ascensions droites du zénith et de l'astre, d'après la loi probable du mouvement diurne circulaire et uniforme, de laquelle il résulte que

$$PA = PA'.$$

Or, si l'on calcule, par la trigonométrie sphérique, l'angle PZA et le côté AZ du triangle APZ, d'après les trois autres parties connues: on trouve généralement :

1°. Une valeur de cet angle qui s'accorde à peu près avec l'azimut observé;

2°. Une valeur de ce côté supérieure à la distance zénithale également observée.

En outre, on reconnaît que l'excès dont il s'agit, fort petit jusqu'à 45 degrés où il n'atteint pas 1 minute, croît avec la distance apparente au zénith, qu'il dépasse 30 minutes à l'horizon, et qu'il est à très-peu près le même pour toute étoile à la même distance zénithale, lorsque les circonstances météorologiques dans lesquelles on observe ne diffèrent pas beaucoup; ce qui éloigne l'idée que cette circonstance tienne à une irrégularité dans le mouvement circulaire apparent du ciel.

On sait d'ailleurs que la masse gazeuse qui entoure la Terre et forme son atmosphère, présente des densités décroissantes à mesure que l'on s'éloigne de la surface, et que l'air sec ou mêlé de vapeur aqueuse, à des degrés de condensation différents, n'a pas le même pouvoir réfringent; d'où il suit que la trace, dans l'atmosphère, d'un rayon de lumière émis ou réfléchi par un astre semble devoir être une courbe concave vers le plan horizontal de l'observateur; ce qui s'accorde avec le résultat fourni par la combinaison de la loi si simple du mouvement circulaire et de l'observation, puisque cela aurait évidemment pour effet d'élever cet astre.

Le phénomène de la réfraction était connu des anciens astronomes, au moins depuis Ptolémée; mais ils ne pouvaient l'appliquer à l'explication de l'irrégularité dont il s'agit, faute d'idées justes sur la constitution de l'atmosphère, et parce que leurs instruments n'étaient pas assez précis pour qu'elle ne se confondît pas le plus souvent avec les erreurs d'observation. Parmi les modernes, Tycho-Brahé croyait encore que les réfractions étaient nulles pour les hauteurs apparentes plus grandes que 45 degrés; Dominique Cassini (auteur d'une Table de réfraction publiée en 1661) a le premier proposé une hypothèse au moyen de laquelle il les a calculées pour toute hauteur, et Newton a commencé (suivant M. Biot) à en fonder la véritable théorie vers la fin du XVII^e siècle.

Calcul de la force qui dévie la lumière quand elle traverse l'atmosphère.

2. La force qui dévie la lumière lorsqu'elle traverse un milieu dont la densité et même la composition peuvent varier d'un point à un autre, est de l'espèce des forces moléculaires; car on admet qu'elle décroît avec une excessive rapidité lorsque la distance augmente, et qu'elle devient insensible à de très-petites distances.

L'expression de cette force a d'abord été donnée par Kramp [*], puis ensuite par l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* [**].

Ces deux géomètres supposent que la Terre est sphérique et entourée

---

[*] *Analyse des réfractions.*

[**] Chap. II, liv. X, tome IV.

d'une atmosphère formée de couches d'air également sphériques et concentriques à la Terre, dont la densité est une fonction de la hauteur à partir de sa surface. Ils ne tiennent pas compte de la vapeur aqueuse qui est mêlée à l'air en différentes proportions [*]; mais Laplace remarque que son équation différentielle de la réfraction peut toujours être employée, en y mettant *la force réfractive* au lieu de la densité, et il indique l'influence qu'une humidité extrême dans le lieu de l'observation peut avoir sur la réfraction calculée d'après ses formules.

Le raisonnement de Kramp me paraissant le plus direct, je vais l'exposer avec quelques modifications.

La lumière étant parvenue en m au sein de l'atmosphère, à la distance r du centre de la Terre; la force qui la dévie est dirigée suivant la droite mO menée de m à ce centre, pourvu seulement que l'atmosphère soit décomposable en couches sphériques d'égal pouvoir réfringent dans la partie où passe le rayon que l'on considère, et que ce pouvoir croisse quand on se rapproche de la surface de la Terre.

Soient yy' la trace sur un plan quelconque conduit suivant mO de la sphère de rayon r concentrique à la Terre; et $\gamma\rho$ la *force réfractive* de Laplace à la distance r, ρ étant la densité. Décrivons de m comme centre, avec les rayons z et $z + dz$, deux surfaces sphériques dont les traces sur le plan $y\mathrm{O}y'$ sont les circonférences AB et CD; partageons l'air compris entre elles par des surfaces sphériques concentriques à la Terre; et soient MM' et NN' les traces sur $y\mathrm{O}y'$ de deux de ces surfaces dont les rayons sont supérieurs ou inférieurs à r, de x et de $x + dx$.

L'action exercée en m sur la lumière par l'air compris entre les quatre sphères AB, CD, MM' et NN', peut être considérée comme proportionnelle à son volume et à son pouvoir réfractif. Or, ce volume est exprimé par $2\pi z\, dz\, dx$, en négligeant un infiniment petit par rapport à ce produit; et ce pouvoir est exprimé par $\gamma\rho \pm \frac{d(\gamma\rho)}{dr}\, x$ [**], en né-

---

[*] M. Biot a beaucoup insisté sur cette circonstance dans son Mémoire sur les réfractions lu à l'Institut en 1836.

[**] Je mets le double signe parce que je suppose x positif au dedans comme au dehors de la sphère yy'.

gligeant les puissances supérieures à la première de l'accroissement x de r, ce qui ne saurait produire une erreur sensible, puisque x ne peut surpasser le rayon extrêmement petit de la sphère d'action de l'air sur la lumière. Donc, si l'on observe que les droites menées de m aux molécules qui composent cette petite masse d'air, font avec mO des angles dont les cosinus sont sensiblement égaux à $\pm \frac{x}{z}$, et qu'on représente par $\varphi(z)$ une fonction très-rapidement décroissante lorsque z croît à partir de zéro, qui devienne nulle pour une valeur très-petite de z, on a

$$\pm 2\pi x dx \left[\gamma\rho \mp \frac{d(\gamma\rho)}{dr} x\right] \varphi(z)\, dz$$

pour l'action de cette partie, les signes supérieurs se rapportant au cas où elle est intérieure, et les autres à celui où elle est extérieure à la sphère yy'.

La somme des actions produites par deux parties correspondantes, situées de part et d'autre de yy', est

$$-4\pi x^2 dx \cdot \frac{d(\gamma\rho)}{dr} \cdot \varphi(z)\, dz;$$

et, pour avoir celle de l'air compris entre les sphères AB et CD, il suffirait d'intégrer, par rapport à x, depuis o jusqu'à $z + dz$; mais on peut substituer z à cette dernière limite, ce qui n'altérera le résultat que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même, de sorte que l'on a

$$-4\pi \cdot \frac{d(\gamma\rho)}{dr} \cdot \varphi(z) \cdot \frac{z^3}{3} \cdot dz.$$

Enfin, l'action totale de l'atmosphère sur la lumière parvenue en m, s'obtient en intégrant de nouveau, par rapport à z, depuis o jusqu'à z_1 (z_1 étant le rayon de la sphère d'action); ce qui donne

$$-2K \cdot \frac{d(\gamma\rho)}{dr},$$

en posant

$$4\pi \int_0^{z_1} \varphi(z) \cdot \frac{z^3}{3} dz = 2K:$$

mais, comme on admet que K varie très-lentement par rapport à r, on fait entrer cette quantité sous le signe de différentiation, et l'on prend

$$-2\frac{d(k\rho)}{dr},$$

en remplaçant $K\gamma$ par k; ce qui revient évidemment à ajouter à l'expression précédente, la quantité $-2\gamma\rho\frac{d.K}{dr}$, que l'on regarde comme relativement insensible.

Équation de la trajectoire lumineuse.

3. Cela posé, le principe des forces vives, qui est applicable au mouvement de la lumière, entendu ainsi, fournit

$$\frac{1}{2}d.v^2 = 2\frac{d(k\rho)}{dr}dr;$$

et, en intégrant depuis une valeur de r pour laquelle on ait $\rho = 0$ et $v = v_0$, il vient

$$v^2 = v_0^2 + 4k\rho.$$

Le principe des aires est aussi applicable, puisque ce mouvement est considéré comme produit par une force centrale, et l'on a

$$(1) \qquad \frac{r\sin\omega}{r_1\sin\omega_1} = \frac{\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}}{\sqrt{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}}},$$

en désignant par ω et ω_1 les angles que les tangentes à la trajectoire lumineuse aux extrémités des rayons r et r_1 font avec ces rayons; car les distances $r\sin\omega$, $r_1\sin\omega_1$ du centre à ces tangentes sont, d'après un théorème connu, inversement proportionnelles aux vitesses correspondantes.

L'élimination de ω entre l'équation (1) et l'équation connue

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\omega = r : \frac{dr}{d\varphi},$$

dans laquelle φ est l'angle du rayon variable r et du rayon fixe r_1 aboutissant au spectateur, donne

$$(3) \qquad d\varphi = \frac{r_1 \sin\omega_1 \sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}\cdot dr}{r^2\sqrt{\left(1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)-\frac{r_1^2\sin^2\omega_1}{r^2}\left(1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\right)}},$$

d'où se déduirait entre r et φ l'équation polaire de la trajectoire lumineuse, par une simple intégration de fonction d'une seule variable, si l'expression de $k\rho$ était connue en fonction de r.

Il n'est pas possible d'avoir cette expression, mais on peut du moins reconnaître que $4\frac{k\rho}{\rho_0^2}$ doit toujours être une petite fraction. En effet, on trouve facilement

$$\frac{r\sin\omega}{r_1\sin\omega_1} = i,$$

en s'appuyant sur ce que l'indice de réfraction relatif au passage d'un milieu A_1 dans un autre A_n est le produit de ceux qui se rapportent aux passages successifs de A_1 dans A_2, de A_2 dans A_3,..., enfin de A_{n-1} dans A_n, et en désignant par i l'indice relatif au passage de la couche sphérique dont le moindre rayon est r dans celle où il est r_1; donc, on a, d'après l'équation (1),

$$(3\ bis) \qquad 4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2} = i_1^2 - 1,$$

i_1 étant l'indice relatif au passage du vide dans l'air doué du pouvoir réfringent $4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}$.

Cette équation donne, d'après les expériences de MM. Biot et Arago, $4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2} = 0,000588768$ environ pour de l'air sec, à la température o degré, sous la pression $0^{\text{m}},76$; et, si l'on étend par induction à toute hauteur l'identité de composition de l'air constatée pour celles où l'on a pu s'élever jusqu'à présent, il résulte des mêmes expériences que k est constant, quelle que soit la quantité proportionnelle de vapeur aqueuse mêlée à l'air, de sorte que $4\frac{k\rho}{v_0^2}$ est proportionnelle à la densité ρ. Donc, ce pouvoir est d'abord fort petit, puis décroît à mesure qu'on s'élève.

Enfin, même quand on n'admet pas l'identité de composition, il paraît infiniment probable que le pouvoir réfringent décroît encore, suivant une loi moins simple.

Il est utile de remarquer que, d'après cela, la dérivée $4\frac{d}{dr}\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)$ est toujours négative, très-petite en valeur absolue, et décroissante; ce que l'on rend sensible, en se figurant la courbe dont les abscisses seraient les valeurs de r, et les ordonnées, celles de $4\frac{k\rho}{v_0^2}$ respectivement correspondantes.

Diverses formes de l'équation de la réfraction.

4. Ce qui importe, ce n'est pas de connaître la forme d'un rayon de lumière [*], mais bien la réfraction relative à un astre vu dans une certaine position, et il est permis de prendre pour cette réfraction, même lorsqu'il s'agit de la Lune, la somme des flexions que le rayon éprouve dans l'atmosphère, en négligeant le diamètre apparent de cette partie de la trajectoire vue de l'astre.

θ représentant l'angle variable que la tangente à la trajectoire fait avec le prolongement du rayon r, il s'agit donc de calculer l'intégrale de $d\theta$ depuis $r = r_1$ jusqu'à $r = r_2$, r_2 étant la valeur de r correspondante à la limite de l'atmosphère.

On peut déduire de la relation évidente

$$(4) \qquad \theta = \varphi + \omega,$$

de l'équation (1) et de l'équation (2), qui est préférable à l'équation (3) en raison de sa simplicité, plusieurs expressions de $d\theta$.

[*] Newton paraît s'y être attaché. (Mémoire de M. Biot.)

1°. On tire de l'équation (1)

$$\sin\omega\, dr + \cos\omega\, .\, r\, d\omega$$

$$= -r_1 \sin\omega_1 \sqrt{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}} \cdot \frac{2d\left(\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)}{\left(1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2r\sin\omega\, d\left(\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)}{1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}},$$

de l'équation (2)

$$\sin\omega\, dr = \cos\omega\, .\, r\, d\varphi,$$

et de l'équation (4)

$$d\omega + d\varphi = d\theta;$$

donc on a

$$(5) \qquad d\theta = -\frac{2\tan g\,\omega\, d\left(\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)}{1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}},$$

puis, en remplaçant $\tan g\,\omega$ par la valeur

$$\frac{\frac{r_1}{r}\sin\theta_1 \sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}}{\sqrt{1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2} - \frac{r_1^2}{r^2}\sin^2\theta_1\left(1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\right)}},$$

qu'on tire de l'équation (1) en écrivant θ_1 au lieu de ω_1, puisque ces deux arcs sont égaux, il vient

$$(6) \qquad d\theta = -\frac{2r_1\sin\theta_1\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}\cdot d\left(\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)}{\left(1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)\sqrt{r^2\left(1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right) - r_1^2\sin^2\theta_1\left(1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\right)}},$$

les radicaux devant être pris positivement afin que $d\theta$ soit positive.

2°. Si l'on remplace dans l'équation (5) $\tan g\,\omega$ par sa valeur (2), on a

$$(7) \qquad d\theta = -\frac{2\frac{d}{dr}\left(\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)\cdot r\, d\varphi}{1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}},$$

qui se réduit à

$$(7\ bis)\qquad d\theta = -\frac{2\frac{k}{\nu_0^2}\cdot\frac{d\rho}{dr}\cdot r\,d\varphi}{1+4\frac{k\rho}{\nu_0^2}},$$

en supposant k constant, et qui, suivant M. Biot, a été employée par Newton.

3°. Enfin, si l'on remplace, dans l'expression (7), $d\varphi$ par sa valeur tirée de l'équation (4), on trouve encore

$$(8)\qquad d\theta = \frac{2r\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{k\rho}{\nu_0^2}\right)\cdot d\omega}{1+4\frac{k\rho}{\nu_0^2}+2r\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{k\rho}{\nu_0^2}\right)}$$

Intégration de l'équation (6). — *Hauteurs apparentes supérieures à 10 degrés ou même à 15 degrés.*

5. L'équation (6), ou du moins celle qu'on en déduit par le changement de k en k_1, se trouve intégrée dans la *Mécanique céleste*, par le développement en série. Le premier terme de la série ne dépend que de données relatives à la station de l'observateur, et il est démontré que les suivantes n'ont qu'une très-petite influence quand la distance zénithale θ_1 ne surpasse pas 78 degrés [*]. La brièveté de cette exposition ne me permet pas d'entrer ici dans le détail du calcul.

Voici, à peu de chose près, comment M. Biot a traité le même sujet.

Soit ω' la valeur de ω correspondante à

$$\omega_1 = \theta_1 = 90°,$$

et qui varie seulement avec r. On a, d'après l'équation (1),

$$(8\ bis)\qquad \sin\omega' = \frac{r_1}{r}\cdot\frac{\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\nu_0^2}}}{\sqrt{1+4\frac{k\rho}{\nu_0^2}}},$$

[*] Ce cas d'approximation avait été signalé par Oriani (*Éphémérides de Milan*, 1788).

de laquelle il résulte d'abord que $r\sqrt{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}}$ croît avec r, bien que $4\frac{k\rho}{v_0^2}$ diminue en même temps, car l'observation exclut en général des trajectoires sinueuses, de sorte que ω' diminue constamment depuis 90 degrés. L'équation (1) se réduit à

$$\sin\omega = \sin\theta_1 \sin\omega',$$

et en chassant $\tan\omega$ de l'équation (5) au moyen de cette expression de $\sin\omega$, on a

$$d\theta = -\frac{2\tan\theta_1 . \sin\omega' . d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{\left(1+4\frac{k\rho}{v_0^2}\right)\sqrt{1+\tan^2\theta_1\cos^2\omega'}},$$

que M. Biot met sous la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} d\theta = &-\frac{2\tan\theta_1 . \sin\omega' . d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}} \\ &+\frac{2\tan^3\theta_1 . \sin\omega' . \cos^2\omega' . d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{\left(1+4\frac{k\rho}{v_0^2}\right)\left(1+\tan^2\theta_1\cos^2\omega'+\sqrt{1+\tan^2\theta_1\cos^2\omega'}\right)} \text{ [*]}. \end{aligned}\right.$$

1°. Il pose alors

$$1-\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}}} = 2z,$$

---

[*] On y est conduit lorsqu'on essaye de décomposer le coefficient de $d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)$ en une somme de deux fractions, dont l'une soit rationnelle; si l'on égale pour cela ce coefficient à

$$-\frac{2\tan\theta_1 \sin\omega'}{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}} + \frac{A}{\sqrt{1+\tan^2\theta_1\cos^2\omega'}};$$

on tire effectivement de cette égalité

$$A = \frac{2\tan\theta_1 \sin\omega'}{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}}\left(\sqrt{1+\tan^2\theta_1\cos^2\omega'}-1\right).$$

de sorte que le premier terme de cette expression de $d\theta$ devient

$$-2\tang\theta_1\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}\cdot\frac{r_1 dz}{r},$$

en vertu de l'équation (8 *bis*); et l'intégrale de ce premier terme, prise depuis $\rho=\rho_1$ jusqu'à $\rho=0$, se ramène, au moyen de l'intégration par parties, à

$$\tang\theta_1\left[\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}\left(1+\frac{l}{r_1}\int_{\rho_1}^{0}\frac{4\frac{k}{\rho_0^2}\cdot\rho_1\cdot\frac{dp}{p_1}}{1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}+\sqrt{1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}}}\right)-1\right],$$

en remplaçant $\frac{r_1 dr}{r^2}$ par sa valeur $-\frac{l}{r_1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho}\cdot\frac{dp}{p_1}$, déduite de l'équation d'équilibre des couches de l'atmosphère, qui est

$$dp=-g\frac{r_1^2}{r^2}\rho\,dr,$$

et de

$$p_1=g\rho_1 l.$$

L'intégrale non encore effectuée tombe évidemment entre

$$\int_{\rho_1}^{0}2\frac{k}{\rho_0^2}\cdot\rho_1\cdot\frac{dp}{p_1}=-2\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\cdot\text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)\ldots\text{(limite inférieure)}$$

et

$$\frac{4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}+\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}}\int_{\rho_1}^{0}\frac{k}{k_1}\frac{dp}{p_1}$$

$$=-\frac{4\frac{k_1\rho}{\rho_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}+\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}}\cdot\text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)\ldots\text{(limite supérieure)}:$$

donc, celle du premier terme dont il s'agit est comprise entre

$$\tang\theta_1\left\{\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}\left[1-\frac{4\frac{l}{r_1}\cdot\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\cdot\text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)}{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}+\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}}\right]-1\right\}$$

$$=\text{R}'_1\tang\theta_1\ldots\text{(limite supérieure)},$$

et

$$\tang\theta_1\left\{\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\left[1-2\frac{l}{r_1}\cdot\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\operatorname{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)\right]}-1\right\}$$
$$=R_1\tang\theta_1\ldots\text{(limite inférieure)}.$$

2°. Le facteur

$$\frac{2\tang^3\theta_1.\sin\omega'}{\left(1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)\left(1+\tang^2\theta_1\cos^2\omega'+\sqrt{1+\tang^2\theta_1\cos^2\omega'}\right)}$$

du second terme de l'expression (9) de $d\theta$ tombe entre $\tang^3\theta_1$ (limite supérieure), et

$$\frac{2\tang^3\theta_1.\sin\omega'_2}{\left(1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\right)\left(1+\tang^2\theta_1.\cos^2\omega'_2+\sqrt{1+\tang^2\theta_1\cos^2\omega'_2}\right)}\text{ (limite inférieure)},$$

ω'_2 étant la valeur de ω' qui répond à $\rho=0$; car ω' décroît depuis $\frac{\pi}{2}$. L'intégrale de ce terme, prise depuis $\rho=\rho_1$ jusqu'à $\rho=0$, est donc le produit de $\int_{\rho_1}^{0}\cos^2\omega'.d\left(\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)$ par une quantité comprise entre ces deux limites.

Or on a

$$\cos^2\omega'=1-\frac{r_1^2}{r^2}\frac{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}{1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}},$$

d'après l'équation (8 *bis*), et, par conséquent,

$$\cos^2\omega'<2\left(1-\frac{r_1}{r}\right)-\frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{4\left(\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}-\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)}{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}},$$

et

$$>\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right)-4\left(\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}-\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right),$$

r_2 désignant la valeur de r correspondante à $\rho=0$; puis l'intégration par parties donne

$$\int_{\rho_1}^{0}\frac{r_1}{r}\cdot d\left(\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)=-\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\left[1-\frac{l}{r_1}\cdot\operatorname{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)\right],$$

en remplaçant $\frac{r_1 dr}{r^2}$ par la valeur déjà employée dans le calcul précédent. Donc, eu égard aux signes, il vient

$$\int_{\rho_1}^{0} \cos^2.\omega'.d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right) > -2\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\left[\frac{l}{r_1}\cdot \text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right) - \frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}\right]$$

et

$$< -2\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{l}{r_1}\,\text{moy}\left(\frac{k}{k_2}\right) - \frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right];$$

de sorte qu'en multipliant respectivement les seconds membres de ces inégalités par la limite supérieure et par la limite inférieure du coefficient de $\int_{\rho_1}^{0} \cos^2\omega'.d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)$, on a

$$-2\tan^3\theta_1\cdot\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\left[\frac{l}{r_1}\cdot \text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right) - \frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}\right] = -R_2\,\text{tang}^3\theta_1.$$

et

$$\frac{4\,\text{tang}^3\theta_1.\sin\omega_2'\cdot\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{\left(1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right)\left(1+\text{tang}^2\theta_1\cos^2\omega_2'+\sqrt{1+\text{tang}^2\theta_1\cos^2\omega_2'}\right)}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{l}{r_1}\cdot\text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)-\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right] = -R_2'\,\text{tang}\,\theta_1,$$

pour deux limites, la première inférieure et la seconde supérieure, de l'intégrale du terme dont il s'agit.

3°. D'après cela,

$$R_{\theta_1} > R_1\,\text{tang}\,\theta_1 - R_2\,\text{tang}^3\theta_1 \quad \text{et} \quad R_{\theta_1} < R_1'\,\text{tang}\,\theta_1 - R_2'\,\text{tang}^3\theta_1,$$

et l'on prendra

$$R_{\theta_1} = \frac{R_1+R_1'}{2}\,\text{tang}\,\theta_1 - \frac{R_2+R_2'}{2}\,\text{tang}^3\theta_1, \tag{10}$$

afin d'avoir une erreur moindre que la demi-différence des seconds membres des inégalités précédentes.

Pour traduire cette formule en nombres, on remplace $\text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)$ par 1, ce qui revient à supposer invariable le coefficient k, et n'est d'une exactitude bien constatée que pour les hauteurs jusqu'auxquelles on a pu s'élever; mais l'erreur provenant de cette substitution dans les calculs de R_1, R_2, R'_1 et R'_2 est certainement très-atténuée, s'il y en a une, par la petitesse relative des facteurs qui multiplient la moyenne de $\frac{k}{k_1}$ qu'il faudrait prendre si k était variable.

On détermine $\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}$ par l'équation (3 *bis*), à l'aide d'une Table d'indices de réfraction, en tenant compte des indications météorologiques recueillies au moment où l'on a observé la distance apparente.

On prend pour l la valeur qui se déduit de $p_1 = g\rho_1 l$ d'après ces indications, en remplaçant g par la valeur de la gravité au lieu de l'observation; et pour r_2 la valeur de Delambre, qui est la plus généralement admise.

Enfin, l'angle ω'_2 se déduira de la formule (8 *bis*) en y faisant $\rho = 0$, $r = r_2$ et $\frac{r_2}{r_1} = 1,01122$.

M. Biot a trouvé ainsi qu'à la température 10 degrés et sous la pression $0^{m},762$ la limite d'erreur

$$\frac{R'_1 - R_1}{2}\operatorname{tang}\theta_1 + \frac{R_2 - R'_2}{2}\operatorname{tang}^3\theta_1$$

était inférieure à $0'',3$ jusqu'à 74 degrés de distance au zénith, et qu'elle devenait supérieure à 2 secondes vers 80 degrés.

Il a constaté d'ailleurs une concordance assez parfaite entre quelques réfractions, calculées d'après la formule (10), et les réfractions correspondantes, prises dans la Table de M. Ivory, ou dans celle qui est publiée par le Bureau des Longitudes [*].

Intégration de l'équation (8). — *Règle de Bradley.* — *Quadratures.*

6. D'après les remarques qui terminent l'article **5**, le coefficient de $d\omega$ dans l'équation (8) est renfermé dans des limites assez étroites pour que, si l'on désigne par $\frac{1}{2n}$ une moyenne convenable de ce coefficient, on ait

$$R_{\theta_1} = -\frac{1}{2n}\int_{\rho_1}^{0} d\omega = \frac{1}{2n}\int_{0}^{\rho_1} d\omega,$$

[*] Elle a été calculée par MM. Bouvard et Arago, d'après les formules de Laplace.

avec une assez grande approximation ; or, on tire de l'équation (1),

$$\omega = \text{arc sin}\left[\frac{r_1}{r}\frac{\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}}{\sqrt{1+4\frac{k\rho}{\rho_0^2}}}\cdot\sin\theta_1\right];$$

donc il vient

$$R_{\theta_1} = \frac{1}{2n}\left[\theta_1 - \text{arc sin}\left(\frac{r_1}{r_2}\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}\cdot\sin\theta_1\right)\right],$$

d'où

$$m\sin\theta_1 = \sin(\theta_1 - 2nR_{\theta_1}),$$

en représentant $\frac{r_1}{r_2}\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}$ par m ; et l'on tire de là, par un calcul facile,

$$(11)\qquad \text{tang}.\,nR_{\theta_1} = \frac{1-m}{1+m}\,\text{tang}(\theta_1 - nR_{\theta_1}),$$

puis l'équation du deuxième degré

$$\text{tang}^2.\,nR_{\theta_1} + \frac{2}{(1+m)\,\text{tang}\,\theta_1}\cdot\text{tang}.\,nR_{\theta_1} - \frac{1-m}{1+m} = 0,$$

dont les racines sont réelles et de signes contraires, car $\frac{1-m}{1+m} > 0$.
Celle qui est positive et qui répond seule à la question, donne

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}\text{tang}.\,nR_{\theta_1} &= \frac{1-m}{2}\,\text{tang}\,\theta_1 - \frac{(1-m^2)(1-m)}{8}\,\text{tang}^3\theta_1\\ &+ \frac{(1-m^2)^2(1-m)}{16}\,\text{tang}^5\theta_1 - \ldots;\end{aligned}\right.$$

et il est assez remarquable que les deux premiers termes de cette série soient précisément de même forme que ceux de la valeur (10) de R_{θ_1}. En remplaçant tang nR_{θ_1} par l'arc, on a l'expression indiquée dans l'*Astronomie théorique et pratique* (vol. I, chap. XIII, n° 25).

Le coefficient, dont la moyenne valeur convenable a été représentée par $-\frac{1}{2n}$, ne dépend pas de θ_1, de sorte que n doit conserver la même valeur pour toute distance apparente au zénith, et, d'ailleurs,

m est dans le même cas; donc il est possible de déterminer n et m par un certain nombre d'observations, et ensuite l'une des formules (11) ou (12) fournira une valeur approchée de R_{θ_1}. Je reviendrai sur ce sujet à la fin de cette Thèse.

L'équation (11) renferme la règle de Bradley; car si l'on y remplace $\tang nR_{\theta_1}$ par nR_{θ_1}, ce qui ne peut entraîner qu'une légère erreur lorsque nR_{θ_1} est un arc assez petit, on en déduit que

« *Dans un même état de l'air, les réfractions à diverses distances* » *apparentes du zénith sont proportionnelles aux tangentes de ces* » *distances, diminuées du produit de la réfraction par un coefficient* » *constant* [*]. »

Cet astronome y a été conduit par une voie bien différente : « Halley, » dit M. Biot [**], ayant remarqué, d'après la Table qu'il publia, » en 1721, sous le nom de Newton, que, pour des distances zénithales » apparentes peu considérables, les réfractions étaient à peu près pro- » portionnelles aux tangentes de ces distances; Bradley eut l'heureuse » idée d'introduire, sous la caractéristique tang, un multiple des » réfractions, et de le déterminer de manière à pouvoir tirer de la » formule celles que des observations très-précises lui indiquaient. »

Des formules qui offrent une grande analogie avec l'équation (11) ont été obtenues de différentes manières par plusieurs astronomes, soit en supposant une atmosphère de densité moyenne, comme Cassini, soit un pouvoir réfringent constant [***]; et Laplace a fait sortir cette équation d'une hypothèse purement analytique, en remarquant que son équation différentielle de la réfraction (différant seulement de l'équation (6) par la substitution de k_1 à k) deviendrait intégrable si l'on avait

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{1 + 4\frac{k_1\rho}{\nu_0^2}}{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{\nu_0^2}}\right)^{m'}$$

m' étant une constante.

---

[*] *Astronomie physique* de M. Biot.

[**] *Astronomie physique* de M. Biot.

[***] *Astronomie théorique et pratique* de Delambre.

Or, Newton avait finalement adopté une constitution atmosphérique d'après laquelle la température ne varierait pas avec la hauteur, et l'hypothèse de Laplace conduit (n° **7**) à des températures décroissantes en progression arithmétique pour des élévations équidifférentes, ce qui ne paraît pas moins inadmissible que l'hypothèse de Cassini, ou que celle qui lui a succédé.

En conséquence, l'exactitude relative de la règle de Bradley, employée pour construire la Table de Lalande, et dont on se sert encore aujourd'hui pour des observations de premier ordre, semblerait être un fait singulier, si l'on ne voyait qu'on y parvient sans supposer telle ou telle constitution atmosphérique.

Elle tombe, du reste, en défaut pour des distances zénithales considérables.

M. Biot, dans la troisième partie de son remarquable Mémoire sur les réfractions, a montré que l'on peut obtenir, avec un degré suffisant d'approximation, celles qui répondent à toute distance zénithale, en se servant de l'équation (8), et après avoir adopté une constitution atmosphérique particulière, comme l'ont fait tous ceux qui ont traité le problème, du moins pour les grandes distances. Pour cela, il faut prendre un certain nombre de valeurs de $\frac{k\rho}{v_0^2}$ échelonnées depuis $\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}$ jusqu'à $0{,}01 \cdot \frac{k_1\rho_1}{v}$ par exemple, puis calculer les valeurs de r correspondantes, d'après les équations qui expriment la constitution atmosphérique admise, celles de ω', d'après la formule (8 *bis*), ou mieux, d'après

$$\text{cotang}^2\,\omega' = \frac{r^2 - r_1^2}{r_1^2} - \frac{r^2}{r_1^2}\,\frac{4\left(\frac{k_1\rho_1}{v_0^2} - \frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}$$

que l'on en tire facilement; et celles de ω, d'après les équations (1) et (8 *bis*) qui donnent

$$\text{cotang}^2\,\omega = \frac{\text{cotang}^2\,\omega'}{\sin^2\theta_1} + \text{cotang}^2\,\theta_1.$$

Ensuite, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, sont les valeurs de $\frac{k\rho}{v_0^2}$ que l'on a prises premièrement, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, celles de ω qu'on a obtenues comme il vient d'être indiqué, et Ω_1, Ω_2, Ω_3,..., celles que l'on trouve pour le coefficient de $d\omega$ dans l'équation (8), en faisant $\frac{d}{dr}\left(\frac{k\rho}{\rho_0^2}\right)$ égal à $\alpha_2 - \alpha_1$ pour avoir Ω_1, à $\alpha_3 - \alpha_2$ pour avoir Ω_2, etc., on pose

$$\Omega = \Omega_1 + \mathrm{A}(\omega - \omega_1) + \mathrm{B}(\omega - \omega_1)^2,$$

A et B étant déterminés par les conditions que $\Omega = \Omega_2$ puis $\Omega = \Omega_3$ pour $\omega = \omega_2$ et $\omega = \omega_3$, et l'on tire de là, en intégrant,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \Omega\, d\omega = \Omega_1(\omega_3 - \omega_1) + \frac{1}{2}\mathrm{A}(\omega_3 - \omega_1)^2 + \frac{1}{3}\mathrm{B}(\omega_3 - \omega_1)^3$$

pour la partie de la réfraction R_{θ_1} correspondante au passage de la lumière de la couche où $\frac{k\rho}{\rho_0^2} = \alpha_3$ à celle où se trouve l'observateur.

Par ce procédé, M. Biot a trouvé une valeur de la réfraction horizontale inférieure de moins que 1″,3 à celle qui a été donnée par M. Ivory, d'après une constitution atmosphérique hypothétique dont je parlerai dans l'article suivant; et cette différence est peu sensible, eu égard à la grandeur de cette réfraction, qui dépasse 34 minutes.

Des hauteurs apparentes, inférieures à 15 degrés. — Formule empirique de Laplace.

7. L'illustre auteur de la *Mécanique céleste* est parvenu à une formule empirique pour les distances zénithales considérables, en s'appuyant sur des considérations que je vais exposer succinctement.

1°. Si l'on admet que la densité de l'air soit constante dans l'atmosphère entière, et qu'elle varie seulement à sa limite, l'équation (6), dans laquelle on ferait $k = k_1$, s'intègre facilement, et l'on déduit de l'intégrale une valeur de $\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$, trop petite de plus que ses 0,5 par rapport à celle qui résulte des observations astronomiques.

Cette hypothèse revient à celle de Cassini.

2°. La supposition d'une température constante se confond avec celle de la pression proportionnelle à la densité à laquelle Newton avait fini par s'arrêter, comme je l'ai déjà indiqué, et d'après laquelle il a calculé la Table publiée par Halley [*].

Il en résulte des densités décroissantes à très-peu près en progression par quotient pour des élévations équidifférentes. Car en joignant

$$p = p_1 \frac{\rho}{\rho_1},$$

que l'on a seulement avec une température constante, aux équations

$$dp = -g \frac{r_1^2}{r^2} \rho\, dr, \quad \text{et} \quad p_1 = g \rho_1 l,$$

que l'on a toujours, on trouve facilement

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{r_1}{l} . d\left(\frac{r_1}{r}\right),$$

d'où, en intégrant,

$$\log\left(\frac{\rho}{C}\right) = \frac{r_1^2}{lr} = \frac{r - 2\varepsilon}{l} + \frac{\varepsilon^2}{lr},$$

C désignant une constante et ε l'élévation toujours assez petite relativement à r; de sorte que, abstraction faite de la fraction $\frac{\varepsilon^2}{lr}$, cette équation fournit bien des valeurs de ρ décroissantes en progression par quotient lorsque ε et r croissent par degrés égaux, et que, par suite, $r - 2\varepsilon$ décroît de la même manière.

Pour que $\rho = \rho_1$ réponde à $r = r_1$, il faut prendre $C = \rho_1 e^{-\frac{r_1}{l}}$, et en posant

$$1 - \frac{r_1}{r} = s,$$

on a

$$\rho = \rho_1 e^{-\frac{r_1 s}{l}}. \tag{12 bis}$$

Après avoir remplacé ρ par cette valeur dans l'équation (6), où il écrit k_1 au lieu de k, Laplace ramène, par divers développements en série, la détermination approchée de l'intégrale de cette équation à

[*] On ne connaissait pas bien à l'époque de Newton les lois de la dilatation des gaz, de sorte que cette coïncidence lui a échappé.

celle de l'intégrale définie $\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}\, dt$, T étant une quantité qui devient infinie pour $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, et il parvient à une valeur de $\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$ trop forte de plus que ses 0,12; d'où il conclut, par comparaison avec le résultat déduit de la supposition d'une densité constante, que la densité décroît, en réalité, moins rapidement que ne l'indique la formule (12 *bis*).

3°. L'équation (6) de cette Thèse devient intégrable, sous forme finie, comme celle de la *Mécanique céleste*, qui lui est analogue, par l'hypothèse

$$(13) \qquad \frac{r_1}{r} = \left(\frac{1 + 4\frac{k\rho}{\rho_0^2}}{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}\right)^{m'},$$

peu différente de celle que j'ai rappelée au n° 5.

Elle se réduit effectivement, d'après cela, à

$$(14) \qquad d\theta = -\frac{dz}{(2m'-1)\sqrt{1-z^2}};$$

si l'on pose

$$\left(\frac{1 + 4\frac{k\rho}{\rho_0^2}}{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}\right)^{m'-\frac{1}{2}} = \frac{z}{\sin\theta_1}.$$

En intégrant l'équation (14) depuis $z = \sin\theta_1$ qui répond à $\rho = \rho_1$ jusqu'à $z = \dfrac{\sin\theta_1}{\left(1 + 4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\right)^{m'-\frac{1}{2}}}$ qui répond à $\rho = 0$, on a

$$(15) \qquad \mathrm{R}_{\theta_1} = \frac{1}{2m'-1}\left\{\theta_1 - \arcsin\left[\frac{\sin\theta_1}{\left(1 + 4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}\right)^{m'-\frac{1}{2}}}\right]\right\};$$

d'où l'on tire l'équation déjà obtenue

$$m\sin\theta_1 = \sin(\theta_1 - 2n\mathrm{R}_{\theta_1}),$$

en posant encore

$$2m' - 1 = 2n, \quad \text{et} \quad \left(1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right)^{m' - \frac{1}{2}} = \frac{1}{m};$$

et, conséquemment, l'hypothèse dont il s'agit conduit à la règle de Bradley, en partant de la formule (6).

L'équation (13) conduit à trois conséquences qui caractérisent la constitution atmosphérique correspondante. Si l'on remplace $\frac{r_1}{r}$ par la valeur qu'elle fournit, dans l'équation d'équilibre de l'atmosphère mise sous la forme

$$\frac{dp}{p_1} = \frac{r_1}{l}\cdot\frac{\rho}{\rho_1}\cdot d\left(\frac{r_1}{r}\right),$$

puis qu'on développe, en négligeant les puissances et les produits de $\frac{k_1\rho}{v_0^2}$ et de $\frac{k\rho}{v_0^2}$, on obtient

$$(16) \qquad \frac{p}{p_1} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$$

après avoir intégré de manière que $\rho = 0$ donne $p = 0$, et déterminé m' par la condition que $\rho = \rho_1$ donne $p = p_1$, ce qui exige que

$$\frac{r_1}{l}\cdot 2\,\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\,m' = 1;$$

donc *la pression serait proportionnelle au carré de la densité*. Si l'on différentie l'égalité (16), et qu'on élimine $\frac{dp}{p_1}$ au moyen de l'équation d'équilibre, il vient

$$d\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) = \frac{r_1}{2l}\cdot d\left(\frac{r_1}{r}\right),$$

puis, en intégrant de manière que $\rho = \rho_1$ réponde à $r = r_1$,

$$\frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1} = \frac{r_1}{2l}\cdot\frac{r - r_1}{r},$$

et l'on a, en remplaçant r par r_1 dans le dénominateur,

$$(16\ bis) \qquad \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1} = \frac{r - r_1}{2l};$$

d'après laquelle *la densité décroîtrait en progression arithmétique pour des élévations équidifférentes*. Enfin, de l'équation connue

$$\frac{p\rho_1}{p_1\rho} = \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1},$$

dans laquelle α est le coefficient de dilatation de l'air, et qui suppose la tension de la vapeur aqueuse nulle ou proportionnelle à la pression; t et t_1 étant d'ailleurs les températures correspondantes aux densités ρ et ρ_1, on tire, d'après les équations précédentes,

$$(17) \qquad t = t_1 - \frac{r - r_1}{2l} \cdot \frac{1+\alpha t_1}{\alpha},$$

de laquelle il résulte *que la température suivrait la même loi que la densité.*

La loi donnée par l'équation (16) est infirmée par l'observation; l'équation (16 *bis*) fournit

$$r - r_1 = 2l = 16500 \text{ mètres} \quad \text{pour} \quad \rho = 0,$$

tandis que la hauteur de l'atmosphère est certainement plus que quadruple; et l'équation (17) indique une élévation de 59 mètres seulement à partir de la surface de la terre, en supposant $t_1 = 10$ degrés, comme correspondante à un abaissement de température de 1 degré, tandis que l'observation en indique une à peu près triple. En outre, l'équation de condition

$$\frac{r_1}{l} \cdot 2\frac{k_1\rho_1}{c_0^2} \cdot m' = 1,$$

et

$$n = m' - \frac{1}{2},$$

donnent pour n le nombre 3,89, et il en résulte une valeur de la réfraction horizontale trop petite de plus que ses 0,15.

4°. Les deux modes de décroissement de la densité résultant des formules (12 *bis*) et (16 *bis*) ayant donné deux valeurs de la réfraction horizontale, l'une trop forte et l'autre trop faible, on est conduit à essayer un mode de décroissement mixte. k étant remplacé par k_1 dans l'équation (6), elle devient d'abord

$$d\theta = -\frac{(1-s).\sin\theta_1\,\beta.d\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)}{\left[1-2\beta\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)\right]\sqrt{\cos^2\theta_1 - 2\beta\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right) + s(2-s)\sin^2\theta_1}},$$

en posant comme précédemment

$$1-\frac{r_1}{r} = s,$$

et, de plus,

$$\frac{2\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}} = \beta;$$

puis

$$(6\ bis)\qquad d\theta = -\frac{\sin\theta_1.\beta.d\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)}{(1-\beta)\sqrt{\cos^2\theta_1 - 2\beta\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)+2s}},$$

en remplaçant $1-2\beta\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)$ par la moyenne arithmétique de ses valeurs extrêmes, et en négligeant respectivement s, s^2 et $-2s\cos^2\theta_1$ par rapport à 1, s et $\cos^2\theta_1$.

Laplace fait

$$(18)\qquad s-\beta\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right) = u \quad \text{et} \quad \rho = \rho_1\left(1+\frac{fu}{f'}\right)e^{-\frac{u}{f'}},$$

ce qui ramène l'équation (6 *bis*) à

$$d\theta = \frac{\frac{\beta}{f'}\cdot\sin\theta_1.\left(1-f+\frac{fu}{f'}\right)e^{-\frac{u}{f'}}du}{(1-\beta)\sqrt{\cos^2\theta_1+2u}},$$

et en posant encore

$$\cos^2\theta_1 + 2u = 2f't^2,$$

il obtient enfin

$$d\theta = \frac{\beta\sin\theta_1}{1-\beta}\sqrt{\frac{2}{f'}}\cdot\left(1-f-\frac{f\cos^2\theta_1}{2f'}+ft^2\right)e^{\frac{\cos^2\theta_1}{2f'}-t^2}dt,$$

dont l'intégrale prise depuis $u = 0$ qui répond à $\rho = \rho_1$, jusqu'à $u = \infty$ qui répond à $\rho = 0$, est

$$(19) \qquad R_{\theta_1} = \frac{\beta \sin\theta_1}{1-\beta}\sqrt{\frac{2}{f'}}\left(1 - \frac{1}{2}f - ft_1^2\right)\cdot\Psi(t_1) + \frac{\beta f \sin 2\theta_1}{4(1-\beta)f'},$$

en posant

$$\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{2f'}} = t_1, \quad \text{et} \quad \int_{t_1}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = e^{-t_1^2}\,\Psi(t_1).$$

La valeur de R_{θ_1} ne dépend plus, d'après cela, que d'une simple quadrature; mais il faut déterminer les deux paramètres f et f' qui ont été introduits, au moyen de

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\beta}{1-\beta}\sqrt{\frac{\pi}{2f'}}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}f\right),$$

et d'une autre équation que l'on trouve en combinant les équations (18) avec celle de l'équilibre, ce qui donne

$$(20) \qquad \frac{p}{p_1} = \frac{r_1}{l}\left\{\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\rho^2}{\rho_1^2} + [f'(1+f) + fu]\,e^{-\frac{u}{f'}}\right\},$$

puis, comme $p = p_1$ doit répondre à $\rho = \rho_1$ et $u = 0$,

$$\frac{l}{r_1} = \frac{\beta}{2} + f'(1+f).$$

Les valeurs de f et f' étant ainsi fixées, les équations (19), (20) et $\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1} = \frac{p\rho_1}{p_1\rho}$, en fournissent pour R_{θ_1}, p et t, qui s'accordent d'une manière satisfaisante avec les observations astronomiques et autres, et avec les conséquences de la loi du mouvement diurne.

Autre manière de parvenir à une formule empirique de la réfraction.

8. Les deux constitutions hypothétiques entre lesquelles on est conduit à penser que la constitution réelle de l'atmosphère se trouve comprise correspondant, l'une à des pressions proportionnelles aux densités, et l'autre à des pressions proportionnelles aux carrés des densités, il semble rationnel de poser

(21) $$p = m_1 \rho + m_2 \rho^2,$$

dans laquelle m_1 et m_2 sont des paramètres qui doivent satisfaire à

(22) $$p_1 = m_1 \rho_1 + m_2 \rho_1^2,$$

et à une seconde équation de condition que M. Biot présente sous la forme

(23) $$p_1 \mu = m_1 \rho_1 + 2 m_2 \rho_1^2,$$

μ étant un coefficient variable d'un lieu à un autre, et, dans un même lieu, avec le temps, qui dépend de l'état météorologique à la station de l'observateur, et même de cet état à une certaine hauteur [*]. D'après les équations (22) et (23), on a

(24) $$m_1 = \frac{p_1}{\rho_1}(2 - \mu), \qquad m_2 = \frac{p_1}{\rho_1^2} \cdot (\mu - 1).$$

On tire de l'équation (21),

$$dp = (m_1 + 2 m_2 \rho) d\rho,$$

et l'élimination de dp, entre cette équation et celle de l'équilibre, donne

$$(m_1 + 2 m_2 \rho) \frac{d\rho}{\rho} + g \frac{r_1^2 \, dr}{r^2} = 0,$$

dont l'intégrale, prise de manière que $\rho = \rho_1$ réponde à $r = r_1$, est

(25) $$m_1 . \log \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right) + 2 m_2 (\rho_1 - \rho) - g \frac{r_1 (r - r_1)}{r} = 0.$$

Le logarithme népérien contenu dans cette équation conduit à faire

(26) $$\rho = \rho_1 e^{-u};$$

alors l'équation (21) devient

(21 *bis*) $$\frac{p}{p_1} = (2 - \mu) e^{-u} + (\mu - 1) e^{-2u},$$

---

[*] Mémoire déjà cité; M. Ivory a pris moyennement $\mu = \frac{5}{4}$.

et l'équation (25) donne

$$\frac{r_1}{r} = 1 - \frac{l}{r_1}\left[(2-\mu)u + 2(\mu - 1)(1 - e^{-u})\right] \tag{25 bis}$$

d'après l'équation (24), en remplaçant $\frac{p_1}{g\rho_1}$ par l.

Enfin on prend, comme à la page 396,

$$\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1} = \frac{p\rho_1}{p_1\rho}, \tag{27}$$

pour déterminer la température à une hauteur quelconque, en faisant abstraction de la vapeur aqueuse contenue dans l'air, ou en supposant sa force élastique proportionnelle à celle du mélange, ce qui revient au même.

La substitution des expressions de $\frac{\rho}{\rho_1}$ et de $s = 1 - \frac{r_1}{r}$, qui se déduisent des équations (26) et (25 *bis*), dans l'équation (6 *bis*), fournit

$$d6 = \frac{\beta \sin\theta_1}{1-\beta}\cdot\frac{e^{-u}\,du}{\sqrt{(\cos^2\theta_1 + \mathrm{A}) + \mathrm{B}u - \mathrm{A}e^{-u}}}, \tag{28}$$

en posant

$$\frac{4l}{r_1}(\mu - 1) - 2\beta = \mathrm{A}$$

et

$$\frac{2l}{r_1}(2-\mu) = \mathrm{B}\ [*];$$

et, pour avoir la réfraction, il faut intégrer cette valeur de $d6$ depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$, ce que M. Ivory a fait par un procédé particulier. Un calcul semblable à celui qui se trouve développé dans la *Mécanique céleste,* pour une intégration analogue que j'ai dû me

---

[*] $\mathrm{A} = 0{,}0006682$, $\mathrm{B} = 0{,}0018847$ et $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = 0{,}35454$ environ,

en prenant

$$\mu = \frac{5}{4}, \quad l = 8000^{\mathrm{m}},$$

et en calculant 2β d'après

$$2\beta = \frac{4\frac{k_1\rho_1}{\rho_0^2}}{1 + 4\frac{k_1\rho}{\rho_0^2}}.$$

contenter de citer au commencement du n° **4**, donne

$$(29)\quad R_{\theta_1} = \frac{2e^{\frac{A}{B}}}{\sqrt{B}}\left\{\Phi_1 - \Phi_2\cdot\frac{A}{B}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{A}{B}} + \frac{1}{2}\Phi_3\cdot\left(\frac{A}{B}\right)^2\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot e^{\frac{2A}{B}} - \frac{1}{2.3}\Phi_4\cdot\left(\frac{A}{B}\right)^3\cdot 4^{\frac{5}{2}}\cdot e^{\frac{3A}{B}} + \ldots\right\}\frac{\beta\sin\theta}{1-\beta};$$

si l'on fait

$$e^{\frac{r\cos^2\theta_1}{B}}\cdot\int_{\cos\theta_1\sqrt{\frac{r}{B}}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \Phi_r,$$

r étant un nombre entier positif [*]; et pour $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, on a conséquemment

$$(29\ bis)\quad R_{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{A}{B}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{B}}\left\{1 - \frac{A}{B}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{A}{B}} + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^2\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot e^{\frac{2A}{B}} - \frac{1}{2.3}\cdot\left(\frac{A}{B}\right)^3\cdot 4^{\frac{5}{2}}\cdot e^{\frac{3A}{B}} + \ldots\right\}\frac{\beta}{1-\beta}.$$

Tables de réfraction.

9. Une Table de réfractions relatives à des distances apparentes échelonnées de 0 à 90 degrés, pour une pression atmosphérique et une température indéterminées au lieu de l'observation, étant construite d'après les formules qui ont été données dans cette Thèse, on en déduit la réfraction relative à une distance zénithale qui ne se trouve pas dans la Table, et qui a été observée sous une pression et à une température différentes de celles pour lesquelles elle a été calculée, par une interpolation semblable à celle des Tables de logarithmes quant à ce qui est de la différence des distances zénithales, et fondée pour le reste sur ce que la réfraction peut, à la même température, être regardée

[*] Le rapport du $(n+1)^{ième}$ terme de cette série à celui qui le précède est

$$\frac{A}{B}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{\frac{A}{B}}\cdot\frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n},$$

et il tend vers

$$\frac{A}{B}\,e^{1+\frac{A}{B}+\frac{\cos^2\theta_1}{B}}$$

lorsque n croît indéfiniment; on ne peut donc employer cette série que pour des distances zénithales telles que cette limite soit < 1. Cette série et la suivante sont données par M. Plana (*Mémoires de Turin*, tome XXXII.)

comme proportionnelle à la pression, tandis que les pressions à des températures t_1 et t'_1 sont proportionnelles à 1 et à $1 + \alpha(t_1 - t'_1)$. La proportionnalité des réfractions aux pressions est justifiée par la forme des coefficients R de l'équation (10).

Des procédés employés pour le calcul de la plupart des anciennes Tables.

10. Les plus anciennes Tables ont été calculées par des moyens qui reviennent, à peu près, à la recherche de quelques réfractions par l'observation et la grande loi du mouvement diurne, suivie d'interpolations faites à l'aide de diverses formules, pour les distances apparentes intermédiaires.

Le procédé très-simple, que j'ai indiqué dans le n° **1**, ne saurait donner exactement une réfraction, même lorsqu'on l'applique à une étoile très-brillante et passant près du zénith, parce que les distances du pôle à l'étoile et au zénith sont affectées par le phénomène de la réfraction; mais, si l'on employait, par exemple, la formule (12) réduite à quelques-uns des termes que j'y ai écrits, on pourrait déterminer les coefficients de manière à lui faire donner les réfractions approchées déduites du calcul trigonométrique, puis s'en servir pour corriger les éléments de ce calcul, et le recommencer ensuite.

Tycho-Brahé imagina de faire dépendre l'un de l'autre les coefficients des deux premiers termes, à l'aide des distances solstitiales du Soleil, et ce moyen, par lequel on évite l'emploi de la distance zénithale du pôle, a été perfectionné par Bradley.

Enfin, Delambre a déterminé trois coefficients, en poussant jusqu'à la cinquième puissance de tang θ_1, par l'observation de quatre étoiles circompolaires; ce qui lui a donné une valeur du premier assez différente de celle de Bradley. Ce savant astronome s'est appliqué, pour le dire en passant, à expliquer le désaccord de ses prédécesseurs sur la grandeur des réfractions et sur les éléments des formules, et le résultat peut-être le plus remarquable de son travail, c'est que les réfractions sont les mêmes par tout le globe dans des circonstances peu différentes, contrairement à ce qu'on aurait dû conclure des Tables de Lacaille et de Bouguer.