JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TH. DIEU

Thèse de mécanique. Sur la propagation du son dans un milieu indéfini homogène dans l'état d'équilibre

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 345-371.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__345_0>

THÈSE DE MÉCANIQUE.

Sur la propagation du son dans un milieu indéfini homogène dans l'état d'équilibre;

PAR M. TH. DIEU,
Professeur de Mathématiques supérieures au Lycée de Dijon.

J'ai pour but d'exposer la théorie mathématique des mouvements vibratoires par lesquels le son se propage dans un gaz homogène indéfini.

Poisson en a tracé l'histoire, avec la supériorité de vues qui le distinguait, dans le premier des Mémoires où il l'a traitée (XIV[e] cahier de l'*École Polytechnique*). Cependant, je me propose de rappeler, dans un résumé rapide, la part des savants illustres qui ont ouvert la voie, et d'indiquer les perfectionnements dus à Poisson. Il est revenu, comme l'on sait, à diverses époques, sur cette importante théorie, et n'a pas moins amélioré ses premières idées et ses premières méthodes de calcul que celles de ses devanciers.

§ I[er].

Equations du problème. — Calcul de l'intégrale de l'équation unique à laquelle on les ramène.

1. Les équations générales du mouvement d'un fluide sont au nombre de quatre,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\rho\left(\mathrm{X} - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\right) = \frac{dp}{dx},\\
&\rho\left(\mathrm{Y} - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz}\right) = \frac{dp}{dx},\\
&\rho\left(\mathrm{Z} - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}\right) = \frac{dp}{dz},\\
&\frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0;
\end{aligned}\right\} \text{[*]},$$

dont les trois premières s'obtiennent en mettant les forces perdues dans les équations générales d'équilibre, et la dernière par la condition que le fluide reste continu pendant le mouvement. On doit y joindre

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Les équations (1) contiennent cinq inconnues, u, v, w, p et ρ; donc, elles ne suffisent pas pour les déterminer. Mais on peut obtenir une relation particulière, c'est-à-dire différente pour chaque nature de fluide, entre la pression p et la densité ρ, lorsque la densité n'est pas supposée constante. Si elle l'était, cela réduirait à quatre le nombre des inconnues, et les équations (1), dont la dernière deviendrait

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

seraient suffisantes.

2. Lorsqu'on admet qu'il n'y pas sensiblement de calorique perdu ou gagné par une portion quelconque d'un gaz, pendant la durée des mouvements vibratoires par lesquels le son se propage dans ce gaz que nous supposons homogène dans l'état d'équilibre; qu'on représente par p_0 la pression et ρ_0 la densité de cet état, par c et c' les capacités calorifiques à pression constante et à volume constant [**],

[*] Toutes les lettres qui entrent dans ces équations ont les significations qu'on leur donne ordinairement dans l'hydrodynamique.

[**] $\frac{c}{c'} = 1{,}3748$, d'après les expériences de MM. Gay-Lussac et Welter.

et qu'on pose

(3) $$\rho = \rho_0(1 - \sigma),$$

de sorte que $-\rho_0\sigma$ soit la variation que la densité éprouve quand le gaz passe de la pression p_0 à la pression p; la relation dont je viens de parler est

(4) $$p = p_0\left(1 - \frac{c}{c'}\sigma\right)\ [*].$$

3. Afin de pouvoir rigoureusement considérer le gaz comme homogène dans l'état d'équilibre, il faut faire abstraction des forces extérieures. Ainsi, par exemple, dans le cas de la propagation dans l'air, il ne faut pas avoir égard à la pesanteur, et, en outre, il est nécessaire de supposer la température uniforme : cela réduit, sans doute, le problème à une pure abstraction; mais, avec un peu de réflexion, on voit que les circonstances écartées ne sauraient avoir une grande influence, et l'expérience a même démontré que cette influence est à peu près nulle sur la vitesse de propagation du son.

Si l'on néglige donc les forces X, Y, Z, et les produits deux à deux des quantités u, v, w, σ, et des dérivées partielles des trois premières, toutes ces quantités pouvant être considérées comme très-petites dans le mouvement dont il s'agit, on obtient, par les équations (1), (3) et (4),

(5) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = a^2\frac{d\sigma}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = a^2\frac{d\sigma}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = a^2\frac{d\sigma}{dz}, \\ &\frac{d\sigma}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}, \end{aligned}\right.$$

---

[*] On l'obtient, par un calcul élémentaire, en concevant que le gaz passe du premier état au second :

1°. Par une variation de température au moyen de laquelle la pression deviendrait p, sans que le volume ni la densité changent;

2°. Par une seconde variation de température qui conduise à celle du second état, sans changement dans la pression p.

On néglige d'ailleurs les quantités très-petites par rapport à σ, comme, par exemple, les puissances σ^2, etc.

en remplaçant $\frac{p_0}{\rho_0}\frac{c}{c'}$ par a^2, et ce système fera connaître u, v, w et σ; les équations (3) et (4) donneront ensuite p et ρ. Quant aux coordonnées d'une molécule, qui seraient x_0, y_0, z_0 pour $t = 0$, on en obtiendrait les valeurs à la fin du temps t par l'intégration des équations (2)

4. On voit facilement que les trois premières équations (5) pourraient immédiatement être intégrées par rapport à t, si σ était la dérivée, relative à cette variable, d'une certaine fonction de x, y, z, t. Or on peut admettre, sans restreindre la question, qu'il en est ainsi, et poser

$$\sigma = \frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}; \tag{6}$$

φ étant telle, que $-\frac{\rho_0}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$ devienne pour $t = 0$ la condensation qui aura été initialement produite en un point quelconque.

La substitution de cette expression au lieu de σ, dans la premiere équation (5), suivie de l'intégration relative à t, fournit

$$u = \frac{d\varphi}{dx} + \mathrm{U},\quad v = \frac{d\varphi}{dy} + \mathrm{V},\quad w = \frac{d\varphi}{dz} + \mathrm{W}, \tag{7}$$

en désignant par U, V, W trois fonctions arbitraires de x, y, z seulement; et la dernière équation (5) devient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + \Psi(x, y, z), \tag{8}$$

en posant

$$a^2\left(\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{W}}{dz}\right) = \Psi(x, y, z). \tag{ψ}$$

La solution du problème se trouve ainsi ramenée au calcul de l'intégrale complète d'une équation à dérivées partielles; et je vais maintenant exposer un des procédés qu'on peut employer pour parvenir à cette intégrale.

5. Si l'on connaissait une intégrale particulière $\varphi = \varphi'$ de l'équation (8), et l'intégrale générale $\varphi = \varphi_1$ de l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{9}$$

on en déduirait $\varphi = \varphi' + \varphi_1$, qui serait l'intégrale complète de (8), car cette valeur de φ la vérifierait évidemment, et contiendrait deux fonctions arbitraires des variables x, y, z.

Or on obtient une expression de φ_1 appropriée à la discussion du problème, au moyen de la formule de Poisson,

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-1}^{1} \mathrm{F}(\lambda\sqrt{l^2+m^2+n^2})\,d\lambda \\ & = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \mathrm{F}(n\cos\theta + m\sin\theta\sin\psi + l\sin\theta\cos\psi)\sin\theta\,d\theta, \end{aligned} \right.$$

qui a été démontrée, en dernier lieu, d'une manière aussi simple que rigoureuse, par M. William Roberts [*]; et cette expression de φ_1 sert à trouver celle de φ'.

6. *Calcul de* φ_1 [**]. — Je pose d'abord

$$\varphi = \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t + \upsilon),$$

α, β, γ, υ étant des constantes, et je substitue dans l'équation (9) les valeurs de $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, etc., qui résultent de cette hypothèse; cela donne, entre les indéterminées α, β, γ et δ, l'équation de condition

$$(\Delta)\qquad \delta^2 = a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Soient δ et $-\delta$ les valeurs de δ qui la vérifient, l'expression

$$\varphi = \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t + \upsilon) - \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta t + \upsilon),$$

qui revient à

$$\varphi = 2\cos(\alpha x + \beta y + \gamma z + \upsilon)\sin\delta t,$$

vérifiera l'équation (9). Mais on trouve facilement

$$2\sin\delta t = \delta t\int_{-1}^{1}\cos(\delta t\lambda)\,d\lambda;$$

---

[*] Journal de M. Liouville, année 1846.

[**] D'après la signification physique de la fonction φ, elle est périodique ou indéfiniment décroissante quand t augmente; il est donc naturel de prendre une fonction circulaire ou une exponentielle, pour avoir une solution particulière de l'équation (9), et c'est cette dernière forme que l'on a préférée; mais il résulte du calcul indiqué dans ce numéro, qu'on parvient au même résultat par l'emploi d'une fonction circulaire

et, en ayant égard à la condition (Δ), on a

$$\int_{-1}^{1}\cos(\delta t\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\cos[at(\gamma\cos\theta+\beta\sin\theta\sin\psi+\alpha\sin\theta\cos\psi)]\sin\theta\,d\theta,$$

d'après la formule de Poisson; donc, cette solution particulière peut être mise sous la forme

$$\varphi=\frac{\delta t}{2\pi}\cos(\alpha x+\beta y+\gamma z+\upsilon)\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\cos[at(\gamma\cos\theta+\beta\sin\theta\sin\psi+\alpha\sin\theta\cos\psi)]\sin\theta\,d\theta.$$

Si l'on fait entrer $t\cos(\alpha x+\beta y+\gamma z+\upsilon)$ sous le double signe d'intégration, puis qu'on remplace le produit des cosinus par une somme, et qu'on supprime le facteur constant $\frac{\delta}{4\pi}$, qui est inutile, elle devient

$$(11)\quad \varphi=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos[\alpha(x+at\sin\theta\cos\psi)+\beta(y+at\sin\theta\sin\psi)+\gamma(z+at\cos\theta)+\upsilon]\\+\cos[\alpha(at\sin\theta\cos\psi-x)+\beta(at\sin\theta\sin\psi-y)+\gamma(at\cos\theta-z)-\upsilon]\end{array}\right\}t\sin\theta\,d\theta.$$

Or, ψ et θ étant considérés comme les deux angles qui déterminent la position d'un point situé sur la sphère de rayon égal à l'unité de longueur, et ayant pour centre l'origine des coordonnées x, y, z, chaque valeur d'un des deux cosinus qui sont ajoutés dans l'expression précédente est multipliée par l'élément correspondant $\sin\theta\,d\theta\,d\psi$ de la surface de cette sphère; mais, pour des éléments diamétralement opposés, la somme des valeurs de θ relatives à ces éléments est π, et la différence de celles de ψ est également π; donc, les deux cosinus dont il s'agit sont égaux, et il en est de même des produits respectifs par $\sin\theta\,d\theta\,d\psi$; par conséquent, on a

$$(12)\quad \varphi=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\cos[\alpha(x+at\sin\theta\cos\psi)+\beta(y+at\sin\theta\sin\psi)+\gamma(z+at\cos\theta)+\upsilon]\,t\sin\theta\,d\theta,$$

en prenant la moitié de la valeur (11).

Soient maintenant $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \upsilon_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \upsilon_2)$, etc., autant de systèmes de valeurs qu'on voudra des arbitraires $(\alpha, \beta, \gamma, \upsilon)$, et φ_1, φ_2, etc., les valeurs correspondantes de φ données par la formule (12); il est évident que l'expression

$$(13)\qquad \varphi=M_1\varphi_1+M_2\varphi_2+\ldots+M_n\varphi_n+\ldots,$$

composée d'un nombre indéfini de termes, et dans laquelle M_1, M_2, etc., sont des constantes arbitraires, sera encore une solution de l'équation (9).

Donc, P désignant une fonction des trois binômes

$$\text{(A)}\quad x + at\sin\theta\cos\psi = x',\quad y + at\sin\theta\sin\psi = y',\quad z + at\cos\theta = z',$$

susceptible d'être développée en une série de la forme

$$M_1\cos(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' + v_1) + M_2\cos(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' + v_2) + \ldots,$$

au moyen d'une détermination convenable des coefficients, mais du reste tout à fait arbitraire, on a

$$(14)\qquad \varphi = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \mathrm{P}\, t\sin\theta\, d\theta,$$

pour une intégrale qui n'est encore que particulière, attendu qu'il n'y entre qu'une seule fonction arbitraire de x, y, z.

Cela posé, il suffit de remarquer, pour avoir enfin φ, que la dérivée

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \mathrm{P}\, t\sin\theta\, d\theta$$

de l'expression (14), prise pour φ, vérifie aussi l'équation (9), quelle que soit P, puisqu'on en tire

$$\frac{d^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{dx^2} + \frac{d^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{dy^2} + \frac{d^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{dz^2}\right),$$

qui se réduit évidemment à une identité pour les mêmes valeurs de φ que (9). En effet, si l'on ajoute cette dérivée avec l'expression (14) de φ, après y avoir mis des signes différents F et f de fonctions arbitraires des binômes (A), on a

$$(15)\quad \varphi_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \mathrm{F}\, t\sin\theta\, d\theta + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\cdot\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} f\, t\sin\theta\, d\theta,$$

qui satisfait aux conditions de contenir deux fonctions arbitraires des variables indépendantes x, y, z, et de vérifier l'équation (9), dont elle est conséquemment l'intégrale complète [*].

7. En représentant par $d\omega$ l'élément $\sin\theta\, d\theta\, d\psi$ de la surface de la sphère décrite de l'origine pour centre, avec un rayon égal à l'unité de longueur, et par $\sum$ une somme s'étendant à tous les éléments de cette surface, la formule précédente prend la forme plus concise

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi} \sum \left(t\,F + f + t\frac{df}{dt} \right) d\omega. \tag{16}$$

Si l'on y fait $t = 0$, on a

$$\varphi_1 = f(x, y, z),$$

car

$$\sum d\omega = 4\pi.$$

D'ailleurs, on en tire

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{1}{4\pi} \sum \left(F + 2\frac{df}{dt} + t\frac{dF}{dt} + t\frac{d^2 f}{dt^2} \right) d\omega,$$

que $t = 0$ réduit d'abord à

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{1}{4\pi} \sum \left[(F)_0 + 2\left(\frac{df}{dt}\right)_0 \right] d\omega,$$

en marquant par l'indice o qu'il s'agit des valeurs de F et $\frac{df}{dt}$ correspondantes à $t = 0$; mais on a

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = a\left[\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \sin\theta\cos\psi + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 \sin\theta\sin\psi + \left(\frac{df}{dz}\right)_0 \cos\theta \right],$$

en suivant la même notation, et $\left(\frac{df}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{df}{dy}\right)_0$, $\left(\frac{df}{dz}\right)_0$ ne contiennent

---

[*] J'ai multiplié par $\frac{1}{4\pi}$, comme on fait toujours, afin de simplifier les expressions de φ_1 et de $\frac{d\varphi_1}{dt}$ correspondantes à $t = 0$.

plus les angles θ et ψ; donc

$$\sum \left(\frac{df}{dt}\right)_0 d\omega = a \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \int_0^{2\pi} \cos\psi \, d\psi . \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \\ + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 \int_0^{2\pi} \sin\psi \, d\psi . \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \\ + \left(\frac{df}{dz}\right)_0 \int_0^{2\pi} d\psi . \int_0^{\pi} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \end{array} \right\},$$

et, comme il y a une intégrale qui est nulle dans chacun des produits de deux intégrales placés entre les accolades,

$$\sum \left(\frac{df}{dt}\right)_0 d\omega = 0 :$$

par conséquent,

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z)$$

pour $t = 0$.

8. *Calcul de* φ'. — En différentiant l'équation (8) par rapport à t, et remplaçant $\frac{d\varphi}{dt}$ par p, on parvient à l'équation

$$(17) \qquad \frac{d^2 p}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} + \frac{d^2 p}{dz^2}\right),$$

qui a la même forme que (9), et de laquelle se déduit, au moyen de la formule (15), l'intégrale particulière de (8) désignée par φ'.

A cet effet, on peut poser

$$\varphi' = \int_0^t p dt,$$

ce qui astreint φ' à être nulle pour $t = 0$, quelles que soient x, y, z; de sorte que les dérivées de tout ordre de φ' relatives à x, y, z sont aussi nulles, et que l'on doit avoir

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d^2\varphi'}{dt^2} = \Psi(x, y, z), \text{ pour } t = 0,$$

d'après l'équation (8).

La formule (15), appliquée sous ces conditions à l'équation (17), fournit

$$(18)\quad p=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\Psi t\sin\theta\,d\theta+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\cdot\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\mathrm{f}t\sin\theta\,d\theta,$$

f étant une fonction arbitraire des binômes (A), et Ψ la fonction du second membre de l'équation (8) où ces binômes remplacent x, y, z; puis, φ' se déduit de cette valeur de p, en l'intégrant depuis o jusqu'à t après l'avoir multipliée par dt, ce qui donne

$$(19)\quad \varphi'=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\mathrm{f}.t\sin\theta\,d\theta+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t}t\,dt\int^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\Psi\sin\theta\,d\theta.$$

9. On a enfin, comme je l'ai annoncé au n° **5**,

$$(20)\qquad \varphi=\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\mathrm{F}.t\sin\theta\,d\theta\\&+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\cdot\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}f.t\sin\theta\,d\theta\\&+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t}t\,dt\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\Psi\sin\theta\,d\theta\end{aligned}\right\},$$

par l'addition des formules (15) et (19), et en mettant F au lieu de F + f, attendu que cette somme revient à une fonction arbitraire seulement.

On peut écrire plus simplement cette intégrale générale de l'équation (8), en faisant usage de la notation déjà employée, sous la forme

$$(21)\qquad \varphi=\frac{1}{4\pi}\sum\left(t\mathrm{F}+t\frac{df}{dt}+f+\int_0^{t}\Psi.t\,dt\right)d\omega.$$

10. La fonction φ, qui a été astreinte, quand elle a été introduite dans notre analyse (n° **4**), à une première condition particulière, peut encore être assujettie à une seconde condition, comme celle d'être nulle pour $t=0$, quelles que soient x, y, z; de telle sorte que ses dérivées partielles, relatives à ces trois variables, seront en même temps nulles, et que U, V, W seront, d'après les équations (7), les valeurs initiales de u, v, w.

Cela entraîne $f=0$, et les formules (20) et (21) se réduisent à

$$(22)\quad \varphi=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\mathrm{F}.t\sin\theta\,d\theta+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t}t\,dt\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\Psi.\sin\theta\,d\theta,$$

et

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\sum\left(t\mathrm{F} + \int_0^t \Psi.t\,dt\right)d\omega, \tag{23}$$

dont l'une ou l'autre donne

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

et, par conséquent,

$$\sigma = \frac{1}{a^2}\mathrm{F}(x, y, z)$$

à la même époque.

Cette valeur de φ n'aurait d'ailleurs aucun sens, quant au problème de la propagation du son, si les expressions des dérivées partielles $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, ..., cessaient d'avoir des valeurs très-petites (n° **3**).

§ II.

Discussion de l'intégrale (22). — *Lois qu'elle fournit.*

11. La formule (22) donne immédiatement quelques-unes des lois du mouvement.

L'ébranlement primitif doit, en général, être considéré comme limité à de certaines parties du fluide que l'on peut renfermer dans une sphère (E), de rayon ε, décrite de l'origine pour centre. D'après cela, la fonction $\mathrm{F}(x, y, z)$ ne peut être différente de o que pour des valeurs de x, y, z égales aux coordonnées de certains points renfermés dans cette sphère; et il en est de même de $\Psi(x, y, z)$, car U, V, W, qui sont maintenant les valeurs initiales de u, v, w, sont nulles pour tous les points extérieurs à la sphère (E). On a donc, pour ces derniers points,

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz},$$

à un instant quelconque, et ces équations donnent

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi,$$

$d\varphi$ étant la différentielle de la fonction φ de x, y, z, t relative aux trois premières de ces variables.

12. Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point intérieur à la sphère (E), et posons

$$x + at\sin\theta\cos\psi = \xi, \quad y + at\sin\theta\sin\psi = \eta, \quad z + at\cos\theta = \zeta,$$

d'où l'on déduit facilement l'équation

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = a^2t^2,$$

qui détermine une sphère de rayon at, dont le centre est le point (x, y, z), en considérant ξ, η, ζ comme coordonnées courantes.

Ce sera seulement (n° **11**) dans le cas où cette sphère coupera la partie du fluide primitivement ébranlée, que le premier terme de la formule (22) ne sera pas nul, c'est-à-dire, en désignant par r la distance du point (x, y, z) à l'origine, quand at tombera entre $r-\varepsilon$ et $r+\varepsilon$.

Tant qu'on aura $at < r - \varepsilon$, le second terme de la même formule sera aussi nul; car, si l'on renverse l'ordre des intégrations indiquées dans ce terme, ce qui ne saurait en changer la valeur, et qu'on commence par celle qui est relative à t, on voit que tous les éléments de

$$\int_0^t \Psi(x + at\sin\theta\cos\psi, \quad y + at\sin\theta\sin\psi, \quad z + at\cos\theta)\, t\,dt,$$

qu'il faudrait calculer d'abord, sont séparément nuls. Mais, quand at tombe entre les limites indiquées ci-dessus, cette intégrale se réduit à

$\int_{\frac{r-\varepsilon}{a}}^{t} \Psi . t\,dt$; et quand at surpasse $r+\varepsilon$, à $\int_{\frac{r-\varepsilon}{a}}^{\frac{r+\varepsilon}{a}} \Psi t\,dt$. On pourra donc remplacer la dernière intégrale multiple de l'équation (22) par

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{r-\varepsilon}{a}}^{t} t\,dt \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \Psi \sin\theta\, d\theta,$$

si t surpasse $\frac{r-\varepsilon}{a}$; et même, si t surpasse $\frac{r+\varepsilon}{a}$, on pourra mettre cette quantité, qui sera plus loin supposée fixe, au lieu de la limite variable désignée par t.

$\int \Psi . t\,dt$, prise depuis $t = \frac{r-\varepsilon}{a}$ jusqu'à $t \underset{=}{\overset{<}{\text{ou}}} \frac{r+\varepsilon}{a}$, n'étant pas nulle, φ ne le deviendra pas de nouveau quand t dépassera $\frac{r+\varepsilon}{a}$, non plus que $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ auxquelles se réduisent u, v, w pour les points situés au dehors de la sphère (E); mais ces quantités seront indépendantes de t.

13. Il n'en est pas de même de l'expression de $\frac{d\varphi}{dt}$, tirée de la formule (22), savoir,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \left(\mathrm{F} + t\frac{d\mathrm{F}}{dt}\right) \sin\theta\, d\theta + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \Psi . t \sin\theta\, d\theta;$$

en effet :

1°. F et Ψ sont nulles pour tous les points dont il s'agit;

2°. De

$\mathrm{F}(x + at\sin\theta\cos\psi,\ y + at\sin\theta\sin\psi,\ z + at\cos\theta) = \mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta)$, on tire

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} = a\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\xi}\sin\theta\cos\psi + \frac{d\mathrm{F}}{d\eta}\sin\theta\sin\psi + \frac{d\mathrm{F}}{d\zeta}\cos\theta\right),$$

et $\mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta)$ étant nulle pour toutes valeurs de ξ, η, ζ qui seraient les coordonnées de points situés au dehors de la sphère (E), les dérivées $\frac{d\mathrm{F}}{d\xi}$, $\frac{d\mathrm{F}}{d\eta}$, $\frac{d\mathrm{F}}{d\zeta}$, et, par suite, $\frac{d\mathrm{F}}{dt}$ le sont également; donc, $\frac{d\varphi}{dt}$ est nulle pour toute valeur de t non comprise entre $\frac{r-\varepsilon}{a}$ et $\frac{r+\varepsilon}{a}$.

14. *Pour les points compris dans la sphère* (E), r est moindre que ε, et il faut modifier légèrement ce qui est dit dans les nos **12** et **13**. On ne doit pas changer la limite inférieure o de l'intégration relative à t dans le second terme de l'expression (22), et l'on peut seulement mettre $\frac{r+\varepsilon}{a}$ au lieu de t pour la limite supérieure, lorsque t surpasse cette valeur. Quant à $\frac{d\varphi}{dt}$, elle est nulle pour les valeurs de t qui ne tombent pas entre o et $\frac{r+\varepsilon}{a}$.

15. Il résulte de cette discussion, qu'en un point (x, y, z) situé à une distance quelconque r de l'origine, et à la fin du temps t supérieur à $\frac{r+\varepsilon}{a}$, il pourrait y avoir un mouvement de translation uniforme et très-lent [*] des molécules du fluide, lequel ne serait pas accompagné de condensation, car σ est nul avec $\frac{d\varphi}{dt}$ en vertu de l'équation (6); mais, que les vibrations accompagnées de condensation n'auront lieu que quand t tombera entre $\frac{r-\varepsilon}{a}$ et $\frac{r+\varepsilon}{a}$, c'est-à-dire pendant une durée limitée qui ne pourra surpasser la différence $\frac{2\varepsilon}{a}$.

Si l'ébranlement primitif s'étend à tous les points de la sphère (E), les ondes sonores seront sphériques, d'épaisseur 2ε, et auront l'origine pour centre; la durée du mouvement vibratoire sera $\frac{2\varepsilon}{a}$ en chaque point; et la vitesse de propagation de ce mouvement sera a, puisqu'il commence en des points situés sur le même rayon, distants de a, à des intervalles égaux à l'unité de temps.

On conçoit d'ailleurs que, quoique tous les points compris dans la sphere (E) n'aient pas été primitivement ébranlés, les circonstances que je viens d'indiquer auront encore sensiblement lieu, à des distances de cette sphère assez grandes relativement à son rayon.

§ III.

Loi de l'intensité du son à différentes distances du centre de l'ébranlement. — Rapport constant de la vitesse propre des molécules vibrantes à la condensation

16. Afin de parvenir à la loi des vitesses des molécules du fluide, de laquelle dépend celle de l'intensité du son à différentes distances de l'origine, que nous supposerons fort grandes relativement au rayon

---

[*] La vitesse de ce mouvement qui dépend seulement des vitesses initialement imprimées à des parties du fluide renfermé dans la sphère (E), est très-petite par rapport à celle du mouvement vibratoire (nº **22**).

de la sphère (E), il faut avoir recours à une transformation de l'équation (22) que je vais exposer.

Soient

$$(24)\qquad \begin{cases} x = r\sin\mu\cos\lambda, \\ y = r\sin\mu\sin\lambda, \\ z = r\cos\mu, \end{cases}$$

et

$$(25)\qquad \begin{cases} r\sin\mu\cos\lambda + at\sin\theta\cos\psi = r_1\sin\mu_1\cos\lambda_1, \\ r\sin\mu\sin\lambda + at\sin\theta\sin\psi = r_1\sin\mu_1\sin\lambda_1, \\ r\cos\mu + at\cos\theta = r_1\cos\mu_1, \end{cases}$$

r_1 étant une longueur positive qui ne surpasse pas ε, puisqu'il suffit de tenir compte des valeurs des binômes (A) qui peuvent être respectivement celles des coordonnées de certains points situés dans la sphère (E); et λ_1, μ_1 étant des angles compris, le premier entre o et 2π, et le second entre o et π.

Soient encore

$$(26)\qquad at = r - r', \quad \theta = \pi - \mu + \theta' \quad \text{et} \quad \psi = \pi + \lambda + \psi',$$

r' est compris entre $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$ d'après ce qui précède, et je vais montrer que les deux dernières hypothèses, ingénieusement choisies par Poisson, sont telles, que θ' et ψ' peuvent être considérés comme très-petits du même ordre que $\frac{\varepsilon}{r}$.

17. D'après la troisième équation (25), $\cos\mu + \frac{at}{r}\cos\theta$ est au moins de cet ordre; donc, $\cos\mu$ et $\cos\theta$ doivent être de signes contraires, s'ils ne sont pas tous deux très-petits du même ordre au moins.

Dans le premier cas, μ et θ sont l'un plus grand, l'autre plus petit que $\frac{\pi}{2}$, et $\mu+\theta$ tombe entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$; donc l'égalité $\theta' = \mu + \theta - \pi$ montre que θ' ne peut être en dehors des limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; et il en résulte encore que, si cet angle est positif, il ne peut surpasser μ en grandeur absolue.

La même équation donne, d'après les hypothèses (26),

$$\cos(\mu - \theta') - \cos\mu = \frac{r'\cos(\mu - \theta') - r_1 \cos\mu_1}{r};$$

or, les cosinus de $\mu - \theta'$ et de μ sont de même signe, puisque le premier revient à $-\cos\theta$; donc la différence arithmétique de ces cosinus est au moins du même ordre que $\frac{\varepsilon}{r}$; mais, pour qu'en ajoutant à μ, ou en retranchant de μ un arc qui ne surpasse pas $\frac{\pi}{2}$, on puisse avoir pour résultat un arc dont le cosinus ne diffère de celui de μ que d'une quantité très-petite de cet ordre, il faut évidemment que l'arc ajouté ou retranché $\pm\theta'$ soit du même ordre au moins.

Dans le second cas, μ et θ ne peuvent différer l'un et l'autre de $\frac{\pi}{2}$ que d'une quantité du même ordre que $\frac{\varepsilon}{r}$, et l'inspection seule de $\theta' = \mu + \theta - \pi$ fait voir que θ' est au moins de cet ordre.

Je remarquerai que, d'après cette première partie de ma démonstration, $\sin\mu$ ne saurait être très-petit sans qu'il en soit de même de $\sin\theta$; et *vice versâ*.

18. On déduit facilement des équations (25)

$$r_1^2 = r^2 + a^2t^2 + 2rat[\cos\mu\cos\theta + \sin\mu\sin\theta\cos(\psi - \lambda)];$$

d'après (26), on a aussi

$$\cos\theta = -\cos\mu - \theta'\sin\mu, \quad \text{et} \quad \sin\theta = \sin\mu - \theta'\cos\mu,$$

en prenant $\cos\theta' = 1$ et $\sin\theta' = \theta'$ [ce qui revient à négliger les quantités très-petites du même ordre que $\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2$], et

$$\cos(\psi - \lambda) = -\cos\psi';$$

donc

$$r_1^2 = r^2 + a^2t^2$$
$$-2rat[\cos^2\mu + \theta'\sin\mu\cos\mu + (\sin^2\mu - \theta'\sin\mu\cos\mu)\cos\psi'],$$

d'où l'on tire, en posant $\cos\psi' = 1 - \alpha$,

$$r_1^2 = (r - at)^2 + 2rat\alpha(\sin^2\mu - \theta'\sin\mu\cos\mu),$$

puis

$$\alpha \sin\mu \sin\theta = \frac{r_1^2 - r'^2}{2rat},$$

relation de laquelle il résulte que $\alpha = \sin$ verse ψ' est au moins très-petite du même ordre que $\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2$, et, par suite, que ψ' l'est au moins du même ordre que $\frac{\varepsilon}{r}$, pourvu que les sinus de μ et de θ ne soient pas très-petits.

On s'explique cette exception, en observant que dans la circonstance particulière qui y conduit, les deux premières équations (25) n'astreindraient ni l'angle ψ, ni ses lignes trigonométriques, à aucune condition relativement à λ, ou aux lignes de cet angle; on peut la lever, en convenant de ne point prendre des axes tels, que celui des z forme avec la direction du rayon vecteur r un angle dont le sinus serait très-petit : cette convention ne diminue pas, d'ailleurs, la généralité de la formule (22).

19. Les équations (25) peuvent, d'après cela, être réduites à

$$(27)\quad \begin{cases} r'\sin\mu\cos\lambda + r\theta'\cos\lambda\cos\mu + r\psi'\sin\lambda\sin\mu = r_1\sin\mu_1\cos\lambda_1 \\ r'\sin\mu\sin\lambda + r\theta'\sin\lambda\cos\mu - r\psi'\cos\lambda\sin\mu = r_1\sin\mu_1\sin\lambda_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad r'\cos\mu - r\theta'\sin\mu = r_1\cos\mu_1, \end{cases}$$

qui fournissent

$$(28)\qquad r_1^2 = r'^2 + r^2(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\mu).$$

Pour l'objet que je me propose maintenant, il faut considérer r comme une distance déterminée quelconque, très-grande par rapport à ε, et les angles λ et μ comme se rapportant à une direction déterminée qui peut aussi être quelconque.

D'après cela, les équations (26) donnent

$$dt = -\frac{dr'}{a},\quad d\theta = d\theta',\quad d\psi = d\psi'.$$

On a aussi

$$r' = \pm\varepsilon,\quad \text{aux limites}\quad t = \frac{r\mp\varepsilon}{a},$$

$$\theta' = -\pi + \mu \quad\text{et}\quad \theta' = \mu,\quad \text{aux limites}\quad \theta = 0 \quad\text{et}\quad \theta = \pi,$$

ainsi que

$$\psi' = -\pi - \lambda \quad \text{et} \quad \psi' = \pi - \lambda, \quad \text{aux limites} \quad \psi = 0 \quad \text{et} \quad \psi = 2\pi.$$

L'équation (22) devient donc

$$(29) \quad \varphi = \frac{r \sin\mu}{4\pi a}\left(\int_{-\pi-\lambda}^{\pi-\lambda} d\psi' \int_{-\pi+\mu}^{\mu} \mathrm{F}_1 . d\theta' + \frac{1}{a}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dr' \int_{-\pi-\lambda}^{\pi-\lambda} d\psi' \int_{-\pi+\mu}^{\mu} \Psi_1 . d\theta'\right),$$

en négligeant les termes qui contiennent comme facteurs r' ou θ' par rapport à ceux qui contiennent r, et en désignant par F_1 et Ψ_1 ce que deviennent les fonctions F et Ψ quand on remplace les binômes (A) par leurs valeurs en fonctions de r', ψ' et θ', c'est-à-dire, par les premiers membres des équations (27).

Mais les intégrales qui entrent dans cette expression de φ contiennent toujours r explicitement, ce qu'il faut éviter.

20. Pour cela, on change encore de variables, et je poserai, d'après Poisson,

$$(30) \qquad \theta' r = s \sin s_1, \quad \psi' r \sin\mu = s \cos s_1,$$

s_1 étant un arc compris entre 0 et 2π, et s une quantité positive.

Ces équations fournissent, en observant la règle de la transformation des coordonnées dans les intégrales multiples,

$$r \sin\mu\, d\psi' = ds \cos s_1 - s ds_1 \sin s_1,$$
$$0 = ds \sin s_1 + s ds_1 \cos s_1,$$

d'où

$$r \sin\mu\, d\psi' = \frac{s ds_1}{\sin s_1};$$

puis

$$r d\theta' = ds . \sin s_1;$$

et, par suite,

$$r^2 \sin\mu\, d\theta'\, d\psi' = s ds\, ds_1.$$

Donc, comme l'équation (28) donne

$$s = \sqrt{r_1^2 - r'^2},$$

et que r_1 ne doit pas surpasser ε, la précédente valeur de φ prend la forme

$$(31)\quad \varphi = \frac{1}{4\pi ar}\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} s\,ds \int_0^{2\pi} F_2\,ds_1 + \frac{1}{4\pi a^2 r}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dr' \int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} s\,ds \int_0^{2\pi} \Psi_2\,ds_1,$$

en désignant par F_2, Ψ_2 ce que deviennent F_1, Ψ_1 quand on remplace $\theta' r$ et $\psi' r$ par les valeurs de ces quantités en fonction de s et s_1 déterminées par les équations (30); de sorte que le premier terme de cette formule est, abstraction faite du coefficient $\frac{1}{4\pi ar}$, une fonction des trois variables r', λ, μ, et le second terme, aussi abstraction faite du coefficient $\frac{1}{4\pi a^2 r}$, une fonction de ces deux dernières variables seulement.

21. L'équation (31) se rapporte à une direction quelconque des axes des coordonnées, sauf la restriction que j'ai posée dans le n° **18**. Par conséquent, il est permis de disposer de cette direction, comme je vais le dire, afin de simplifier la suite du raisonnement.

On a maintenant

$$r = \text{const.},\quad \lambda = \text{const.},\quad \mu = \text{const.};$$

ce qui représente :

1°. Une sphère de rayon r, dont le centre est à l'origine;

2°. Un plan passant par l'axe des z et faisant l'angle λ avec celui des $\widehat{xz}$;

3°. Un cône droit, dont l'axe des z est l'axe de figure.

Ces trois surfaces, qui sont orthogonales, se coupent au point que l'on considère, et, en prenant respectivement pour axes des x_1, y_1, z_1 l'intersection du plan et du cône, la tangente à celle de la sphère et du cône, et la tangente à celle de la sphère et du plan, on a évidemment

$$(32)\qquad dx_1 = dr,\quad dy_1 = r\sin\mu\, d\lambda,\quad dz_1 = r\,d\mu.$$

Si l'on dirige l'axe des x suivant la même droite que celui des x_1, en faisant tourner le premier système autour de son origine, de manière que, en outre, les axes des y et des z deviennent respectivement parallèles à ceux des y_1 et des z_1, il suffit d'augmenter x_1, y_1

et z_1 de certaines constantes, pour passer de ces derniers axes aux nouveaux axes des x, y, z, et de faire $\lambda = 0$, $\mu = \frac{\pi}{2}$. Donc,

$$dx = dr, \quad dy = r\,d\lambda, \quad dz = r\,d\mu \text{ [*]}. \tag{33}$$

Cela posé, on doit seulement prendre

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz},$$

d'après la remarque du nº **11**; et, en vertu des formules (33), ces expressions des composantes de la vitesse correspondante au point déterminé par les coordonnées polaires r, λ, μ deviennent

$$u = \frac{d\varphi}{dr}, \quad v = \frac{1}{r}\,\frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad w = \frac{1}{r}\,\frac{d\varphi}{d\mu}, \tag{34}$$

d'après le principe de la dérivation des fonctions médiates.

On déduit facilement de ces dernières expressions que les rapports $\frac{v}{u}$ et $\frac{w}{u}$ sont du même ordre que $\frac{\varepsilon}{r}$, pourvu que les dérivées partielles de $F(x, y, z)$ et de $\Psi(x, y, z)$ aient entre elles des rapports finis, ce qui a lieu en général; donc la vitesse de chaque molécule de fluide est sensiblement égale à $\frac{d\varphi}{dr}$, et dirigée suivant le rayon vecteur.

22. On a, d'après l'équation (31),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} = &-\frac{1}{4\pi a r^2}\left(\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} s\,ds \int_0^{2\pi} F_2\,ds_1 + \frac{1}{a}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dr' \int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} s\,ds \int_0^{2\pi} \Psi_2\,ds_1\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi a r}\,\frac{d}{dr'}\cdot\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} s\,ds \int_0^{2\pi} F_2\,ds_1, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

en ayant égard à l'observation qui termine le nº **20**, et à ce que la première équation (26) donne

$$\frac{dr'}{dr} = 1,$$

quand on regarde t comme constant.

---

[*] On ne peut craindre que la formule (31) tombe en défaut pour les nouveaux axes, car celui des x coïncide avec le rayon vecteur, et le sinus de l'angle compris entre ce rayon et l'axe des z est conséquemment égal à 1.

Si l'on néglige, dans cette formule, le terme qui contient $\frac{1}{r^2}$ comme facteur, par rapport à celui qui contient seulement $\frac{1}{r}$, et qu'on prenne

$$u = \frac{1}{4\pi ar}\frac{d}{dr'}\cdot\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} sds\int_0^{2\pi} F_2 ds_1, \tag{36}$$

on voit que la vitesse des molécules de fluide est, à très-peu près, inversement proportionnelle à la distance de l'origine au lieu où elles se trouvent quand elles vibrent; ce qui justifie *la loi de l'intensité du son en raison inverse du carré de la distance*, puisqu'on admet que cette intensité est proportionnelle au carré de la vitesse.

D'après la discussion du n° **12**, le terme de la valeur (35) de $\frac{d\varphi}{dr}$, qui dépend de Ψ, est le seul qui ne devienne pas nul quand t surpasse $\frac{r+\varepsilon}{a}$; or, ce terme contenant $\frac{1}{r^2}$ comme facteur, il est très-petit par rapport à la valeur (36) de u, et cela s'accorde avec ce que j'ai dit au commencement du n° **15**.

23. D'après la première des équations (26),

$$\frac{dr'}{dt} = -a$$

lorsque r est considéré comme constant; donc l'équation (6) devient

$$\sigma = -\frac{1}{a}\frac{d\varphi}{dr'};$$

or on tire de l'équation (31)

$$\frac{d\varphi}{dr'} = \frac{1}{4\pi ar}\frac{d}{dr'}\cdot\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} sds\int_0^{2\pi} F_2 ds_1;$$

et, par conséquent, on a

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi a^2 r}\frac{d}{dr'}\cdot\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} sds\int_0^{2\pi} F_2 ds_1. \tag{37}$$

Les formules (36) et (37) donnent

$$\sigma = -\frac{u}{a},$$

d'où l'on conclut d'abord que les molécules qui s'éloignent du centre d'ébranlement, sur chaque rayon vecteur, sont condensées, et celles qui s'en rapprochent, dilatées; puis, que le rapport $\frac{a}{\rho_0}$ de la vitesse constante de la propagation du son à la densité du milieu est, abstraction faite du signe, approximativement égal au rapport de la vitesse propre des molécules à la condensation positive ou négative qu'elles éprouvent; de sorte que ce dernier rapport est constant pour le même milieu.

§ IV.

Hypothèse particulière du trinôme $U\,dx + V\,dy + W\,dz$, *différentielle exacte.*

24. Si l'on admet que les composantes U, V, W de la vitesse initiale soient les dérivées d'une fonction f de x, y, z, les équations (7) deviennent

$$u = \frac{d.(\varphi+f)}{dx}, \quad v = \frac{d.(\varphi+f)}{dy}, \quad w = \frac{d.(\varphi+f)}{dz}. \tag{38}$$

D'ailleurs, comme $\frac{df}{dt} = 0$, puisque f est supposée indépendante de t, l'hypothèse (6) peut être écrite sous la forme

$$\sigma = \frac{1}{a^2}\frac{d.(\varphi+f)}{dt}. \tag{39}$$

La quatrième équation (5) devient alors

$$\frac{d^2.(\varphi+f)}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2.(\varphi+f)}{dx^2} + \frac{d^2.(\varphi+f)}{dy^2} + \frac{d^2.(\varphi+f)}{dz^2}\right], \tag{40}$$

et elle ne diffère plus de l'équation (9) que par le changement de φ en $\varphi + f$.

Or, il faut que $\varphi + f$ se réduise à $f(x, y, z)$ pour $t = 0$, et que $\frac{d\varphi}{dt}$ ou $\frac{d.(\varphi+f)}{dt}$ soit toujours, en même temps, une fonction arbitraire de x, y, z, que nous continuerons de représenter par $F(x, y, z)$;

donc l'intégrale de l'équation (40) sera

$$(41)\qquad \varphi + f = \frac{1}{4\pi}\sum\left(tF + f + t\frac{df}{dx}\right)d\omega,$$

d'après la formule (16) du n° **7**.

Les transformations par lesquelles l'équation (31) a été déduite de l'équation (22), peuvent être appliquées successivement à l'équation (41); elles donnent

$$(42)\quad \varphi = \frac{1}{4\pi r}\left(\frac{1}{a}\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} sds \int_0^{2\pi} F_2 ds_1 - \frac{d}{dr'}\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} sds \int_0^{2\pi} f_2 ds_1\right),$$

en observant que $f(x, y, z)$ est nulle pour les valeurs de x, y, z qui ne se rapportent pas à des points compris dans la sphère (E), et F_2, f_2 procédant de F, f, comme cela a été expliqué pour F_2 dans les n^os **19** et **20**.

23. On déduit facilement de l'équation (41) que φ est nulle pour les points extérieurs à la sphère (E), tant que t ne tombe pas entre $\frac{r-\varepsilon}{a}$ et $\frac{r+\varepsilon}{a}$ (n° **11**); donc, le mouvement n'a, en chacun de ces points, qu'une durée qui ne peut excéder $\frac{2\varepsilon}{a}$, et le repos s'y rétablit ensuite complétement.

Pour tout point intérieur ou extérieur à la sphère (E), on a, d'après les équations (38) et (41),

$$u = \frac{1}{4\pi}\sum\left(t\frac{dF}{dx} + \frac{df}{dx} + t\frac{d^2f}{dx\,dt}\right)d\omega$$

[F et f représentant, comme dans l'équation (41), ce que deviennent $F(x, y, z)$ et $f(x, y, z)$, par la substitution des binômes (A) à x, y, z], et deux valeurs semblables pour v, w; or, il résulte de ces expressions, que le repos se rétablit aussi en chaque point compris dans la sphère de l'ébranlement initial, lorsque t surpasse $\frac{r+\varepsilon}{a}$.

Il y a donc une différence qui me paraît assez remarquable, entre les conséquences auxquelles conduisent les équations (23) et (41), par rapport au retour des molécules à l'état de repos, qui ne semble pas devoir nécessairement s'établir après que le mouvement vibratoire a cessé, d'après l'équation (23) du n° **15**.

26. En vertu de l'équation (42), φ est de la forme

$$\varphi = \frac{1}{r}\Phi(r', \lambda, \mu),$$

comme lorsqu'on ne fait aucune hypothèse particulière sur U, V, W; donc, on déduirait de cette équation les conséquences que j'ai déjà exposées dans les n^{os} **21** et suivants, soit relativement à la direction et à la grandeur des vitesses propres des molécules du fluide, soit relativement à la condensation ou à la dilatation qu'elles éprouvent pendant la durée du mouvement.

§ V.

De la marche suivie dans cette thèse.

27. Les premiers travaux mathématiques sur la propagation du son dans un milieu indéfini sont dus à Lagrange; Euler s'en est ensuite occupé, puis Laplace qui a rectifié la valeur de la vitesse de propagation du mouvement, en tenant compte de la chaleur développée par la compression; enfin, Poisson a consacré à ce problème deux de ses beaux Mémoires sur la physique mathématique.

Les deux premiers de ces illustres savants ont supposé que la masse fluide étendue indéfiniment en tous sens, a d'abord été ébranlée semblablement suivant toutes les directions, autour du point pris pour origine des coordonnées; alors $udx + vdy + wdz$ est toujours égale à la différentielle relative à r, d'une fonction de r et de t; et l'équation qu'il s'agit d'intégrer ne diffère pas de celle du problème des cordes vibrantes.

Dans le premier en date des deux Mémoires de Poisson, il avait adopté l'hypothèse du *trinôme des vitesses différentielle exacte,* et transformé premièrement en coordonnées polaires l'équation (9) à laquelle il arrivait par le théorème de Lagrange sur ce trinôme.

Si l'on appliquait cette transformation à l'équation (8), d'après les formules (24), on aurait [*]

$$\frac{d^2.r\varphi}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2.r\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\mu}\frac{d^2.r\varphi}{d\lambda^2} + \frac{1}{r^2\sin\mu}\frac{d\left(\sin\mu\,\frac{d.r\varphi}{d\mu}\right)}{d\mu}\right] + r\Psi_1(r,\lambda,\mu),$$

Ψ_1 représentant ici ce que devient Ψ par la substitution, au lieu de x, y, z, de leurs valeurs (24).

En intégrant les deux membres depuis o jusqu'à 2π pour λ, et depuis o jusqu'à π pour μ, après les avoir multipliés par $\sin\mu\,d\lambda\,d\mu$, comme dans ce Mémoire, on a

$$(\Phi)\qquad \frac{d^2.r\Phi}{dt^2} = a^2\frac{d^2.r\Phi}{dr^2} + r\chi,$$

si l'on pose

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \varphi \sin\mu\,d\mu = \Phi,$$

[*] On peut la faire d'une manière assez peu connue, au moyen de deux remarques fort simples :

1°. φ étant une fonction de x, y, z, ou du moins une fonction dans laquelle x, y, z sont regardées comme les seules variables, la quantité

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2$$

ne change pas de forme ni de valeur, quand on déplace, d'une manière quelconque, les axes rectangulaires des x, y, z.

2°. La variation de l'intégrale triple

$$\int\!\!\int\!\!\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

étendue à tous les éléments du volume compris dans une enveloppe constante et provenant de celle d'un paramètre quelconque contenu dans la fonction φ, est

$$-2\int\!\!\int\!\!\int \delta\varphi\cdot\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) dx\,dy\,dz.$$

Cela posé, si l'on dirige les nouveaux axes comme cela est expliqué à l'article **21**, on a, d'après les formules (32),

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\mu}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2;$$

et

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \Psi_1 \sin\mu . d\mu = \chi,$$

Φ étant une fonction de r et de t, et χ une fonction de r seulement.

Or, il est facile de vérifier que l'expression

$$r\Phi = \mathrm{f}_1(r + at) + \mathrm{f}_2(r - at) - \frac{1}{a^2}\int_0^r dr \int_0^r r\chi\, dr,$$

---

d'ailleurs,

$$dx\, dy\, dz = r^2 \sin\mu\, dr\, d\lambda\, d\mu;$$

donc

$$\iiint \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$
$$= \iiint \left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\mu}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2\right] r^2 \sin\mu\, dr\, d\lambda\, d\mu;$$

ces intégrales triples s'étendant à tous les éléments d'un espace déterminé.

Les variations de ces intégrales correspondantes à celles d'un paramètre quelconque contenu dans la fonction φ doivent être égales; donc

$$\iiint \delta\varphi \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) dx\, dy\, dz$$
$$= \iiint \delta\varphi \left[\frac{d.\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right)}{dr} + \frac{1}{\sin^2\mu}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \frac{1}{\sin\mu}\frac{d.\left(\sin\mu \frac{d\varphi}{d\mu}\right)}{d\mu}\right] \sin\mu\, dr\, d\lambda\, d\mu;$$

et, comme cette égalité doit subsister quelle que soit $\delta\varphi$ pour chacun des éléments de volume représentés par

$$dx\, dy\, dz = r^2 \sin\mu\, dr\, d\lambda\, d\mu,$$

on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{d.\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right)}{dr} + \frac{1}{\sin^2\mu}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \frac{1}{\sin\mu}\frac{d.\left(\sin\mu \frac{d\varphi}{d\mu}\right)}{d\mu}\right].$$

Enfin, si l'on observe que

$$\frac{1}{r}\frac{d.\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right)}{dr} = r\frac{d^2\varphi}{dr^2} + 2\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d.\left(r\frac{d\varphi}{dr} + \varphi\right)}{dr} = \frac{d^2 . r\varphi}{dr^2},$$

et que

$$r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2 . r\varphi}{dt^2},$$

on tombe facilement sur l'équation du texte.

contenant deux fonctions arbitraires f_1 et f_2, satisfait à l'équation (Φ); mais on ne déduit que très-péniblement les propriétés de la fonction φ, qu'on a besoin de connaître, de celles de Φ, et l'on ne parvient pas ainsi à la loi des intensités du son à différentes distances du centre d'ébranlement. C'est par la réduction de sa quantité φ en une série d'intégrales ordonnée suivant le nombre croissant des intégrations, que Poisson a d'abord démontré cette loi.

28. J'ai principalement dû puiser dans le second des deux Mémoires précités, et je vais indiquer brièvement en quoi je m'en suis surtout écarté.

J'ai fait usage (n^{os} **6** et suivants), pour parvenir à la valeur (20), de considérations bien différentes de celles qu'on y trouve; car c'est par la formule de Fourier étendue à trois variables, que cette valeur y est obtenue: la marche que j'ai suivie est due, je crois, à M. Liouville.

Il m'a paru convenable d'étudier d'abord le mouvement sans rien supposer de particulier sur le mode d'ébranlement initial, et de ne passer qu'ensuite à l'examen de l'hypothèse que le trinôme $Udx + Vdy + Wdz$ soit la différentielle d'une fonction de x, y, z; car on est plus logiquement conduit à faire cette hypothèse particulière, après qu'on a reconnu (n° **11**) que $udx + vdy + wdz$ est toujours la différentielle relative à x, y, z d'une fonction de ces trois variables et de t pour les points extérieurs à la sphère d'ébranlement.

Au lieu de déduire de la valeur (20) de φ, celle qui convient à ce cas particulier, je remonte à l'équation de laquelle cette fonction doit dépendre, ce qui m'a paru beaucoup plus simple.

Enfin, je ferai remarquer que j'ai essayé de fixer rigoureusement (n^{os} **17** et suivants) la nature des variables auxiliaires θ' et ψ' employées par Poisson pour transformer une équation semblable à (41), en appliquant sa transformation à la valeur de φ fournie par l'équation (22); j'ose croire qu'on ne me saura pas mauvais gré d'avoir insisté un peu longuement sur ce point qui est important, car de là dépendent toutes les réductions subséquentes qui permettent d'arriver à la loi de l'intensité du son.