JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Sur la convergence des séries qui se présentent dans la théorie du mouvement elliptique des planètes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 33-39.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__33_0>

Sur la convergence des séries qui se présentent dans la théorie du mouvement elliptique des planètes;

Par M. PUISEUX,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Soient r le rayon vecteur d'une planète, u l'anomalie excentrique, v l'anomalie vraie, ζ l'anomalie moyenne, e l'excentricité de l'orbite. Laplace a démontré le premier que les séries qui expriment r et v suivant les puissances croissantes de e sont convergentes pour toutes les valeurs de cette dernière quantité inférieures à une certaine limite; cette limite est déterminée par une équation transcendante et a pour valeur approchée 0,66195.... Laplace arrive à ce résultat en montrant que, dans l'expression de x, chaque terme d'un rang très-élevé i est au plus égal en valeur absolue à une quantité de la forme

$$\frac{A}{i\sqrt{i}}\left(\frac{e}{\lambda}\right)^i,$$

A et λ désignant des quantités finies indépendantes de i; alors il en conclut que la série est convergente tant que l'on a $e<\lambda$. Il applique un procédé analogue à la série qui exprime v.

M. Cauchy a traité la même question d'une autre manière, en s'appuyant sur un théorème dont l'analyse lui est redevable, savoir, qu'une fonction est développable en série convergente suivant les puissances entières et croissantes de la variable, tant que le module de cette variable est inférieur au plus petit de ceux pour lesquels la fonction et sa dérivée deviennent discontinues. M. Cauchy détermine ce plus petit module dans le cas où l'anomalie moyenne est égale à $\frac{\pi}{2}$, et il retrouve le nombre 0,66195..., donné par Laplace; mais il me semble que cela ne suffit pas. Il n'est pas évident, en effet, que si les séries qui expriment r et v sont convergentes pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$, elles le seront encore pour *toute autre valeur* de ζ; car si la supposition de $\zeta = \frac{\pi}{2}$ fait prendre à certains termes leur valeur absolue maximum, elle en annule d'autres; de plus, elle rend les uns positifs, les autres négatifs. On conçoit, à priori, que le plus petit module de e, pour lequel r, v et leurs dérivées deviennent discontinues, doive dépendre de ζ, et il me paraît nécessaire de démontrer que ce plus petit module est minimum pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$; alors seulement on pourra conclure que les séries dont il s'agit sont convergentes, *quel que soit* ζ, pour les valeurs de e inférieures à 0,66195.... La démonstration dont je viens d'indiquer la nécessité est l'objet de cet article [*].

En vertu des formules connues

$$u - e\sin u = \zeta, \quad r = a(1 - e\cos u), \quad \cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u},$$

u, r et v sont des fonctions de e et de ζ; en regardant ζ comme constant, on a

$$\frac{du}{de} = \frac{\sin u}{1 - e\cos u}, \quad \frac{dr}{de} = \frac{a(e - \cos u)}{1 - e\cos u}, \quad \frac{dv}{de} = \frac{(2 - e\cos u - e^2)\sin u}{\sqrt{1 - e^2}\,(1 - e\cos u)^2}.$$

On conclut de là et du théorème de M. Cauchy que les développements en séries ordonnées par rapport à e de u, r, v et aussi de r^m, $\sin mu$, $\cos mu$, $\sin mv$, $\cos mv$ resteront convergents tant que le module de e sera inférieur au plus petit des modules de cette quantité pour lesquels on a

$$1 - e\cos u = 0, \quad \text{ou bien} \quad 1 - e^2 = 0.$$

---

[*] Dans la marche suivie par Laplace, on n'a pas besoin de cette démonstration et on a de plus l'avantage de trouver l'expression approchée d'un terme de rang élevé, ce qui permet d'apprécier la rapidité avec laquelle la série converge. Mais Laplace est obligé de traiter séparément les séries qui expriment r et v, et ses raisonnements devraient être encore modifiés pour chacune des quantités u, $\sin mu$, $\cos mu$, $\sin mv$, $\cos mv$, r^m, etc., tandis que le théorème de M. Cauchy s'applique à la fois à tous ces développements.

Si donc on détermine les inconnues x et y par les deux équations

$$1 - x\cos y = 0, \quad y - x\sin y = \zeta, \tag{1}$$

et qu'on appelle h le module de celle des valeurs de x qui a le plus petit module, les séries dont il s'agit seront convergentes tant que le module de e sera moindre à la fois que h et que l'unité.

Dans le cas de $\zeta = \frac{\pi}{2}$, on trouve aisément $h = 0{,}66195\ldots$, nombre plus petit que 1 ; si je fais voir que quand ζ a une valeur autre que $\frac{\pi}{2}$, h ne peut être moindre que $0{,}66195\ldots$, il sera donc établi que les séries en question sont convergentes, *quel que soit* ζ, tant que le module de e est inférieur à $0{,}66195\ldots$.

Remarquons d'abord qu'on peut, sans changer le module de x, supposer dans les équations (1) ζ compris entre zéro et π; car si l'on y fait

$$\zeta = \zeta' + 2k\pi, \quad y = y' + 2k\pi,$$

k étant entier, il viendra

$$1 - x\cos y' = 0, \quad y' - x\sin y' = \zeta',$$

équations où x a les mêmes valeurs qne dans les équations (1), et ou ζ' peut être supposé compris entre zéro et 2π. Si, maintenant, ζ' était plus grand que π, on ferait

$$\zeta' = \pi - \zeta'', \quad y' = \pi - y'', \quad x = -x'',$$

et il viendrait

$$1 - x''\cos y'' = 0, \quad y'' - x''\sin y'' = \zeta'',$$

équations pareilles aux équations (1) et où ζ'' est compris entre zéro et π. Il est vrai que les valeurs de x'' sont de signes contraires à celles de x; mais leurs modules sont les mêmes. Je supposerai donc, dans ce qui suit, ζ positif et moindre que π.

Représentons par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ celle des valeurs de x tirées des équations (1) dont le module $h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ est le plus petit; soit

$\gamma + \delta\sqrt{-1}$ la valeur correspondante de y. On déduit de ces mêmes équations

$$x = \frac{1}{\cos y}, \quad \text{ou bien} \quad \alpha + \beta\sqrt{-1} = \frac{1}{\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1})};$$

il en résulte

$$\alpha - \beta\sqrt{-1} = \frac{1}{\cos(\gamma - \delta\sqrt{-1})},$$

et, par conséquent,

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{ou} \quad h^2 \\ = \dfrac{1}{\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1})\cos(\gamma - \delta\sqrt{-1})} = \dfrac{4}{c^{2\delta} + c^{-2\delta} + 2\cos 2\gamma}, \end{cases}$$

c désignant la base des logarithmes népériens. D'un autre côté, en éliminant x entre les équations (1), on trouve

$$\zeta - y = -\frac{\sin y}{\cos y},$$

ou bien

$$\zeta - \gamma - \delta\sqrt{-1} = -\frac{\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1})}{\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1})} = -\frac{2\sin 2\gamma + (c^{2\delta} - c^{-2\delta})\sqrt{-1}}{c^{2\delta} + c^{-2\delta} + 2\cos 2\gamma},$$

ou encore, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$(3) \qquad \zeta - \gamma = -\frac{2\sin 2\gamma}{c^{2\delta} + c^{-2\delta} + 2\cos 2\gamma},$$

$$(4) \qquad \delta = \frac{c^{2\delta} - c^{-2\delta}}{c^{2\delta} + c^{-2\delta} + 2\cos 2\gamma}.$$

L'équation (4) admet la solution $\delta = 0$; mais ce n'est pas celle qui répond au plus petit module de x; en effet, il en résulterait, d'après la formule (2),

$$h^2 = \frac{2}{1 + \cos 2\gamma} = \frac{1}{\cos^2\gamma},$$

d'où $h > 1$, tandis qu'en supposant δ différent de zéro, on a, en vertu des équations (2) et (4),

$$h^2 = \frac{4\delta}{c^{2\delta} - c^{-2\delta}} = \frac{1}{1 + \frac{(2\delta)^2}{1.2.3} + \frac{(2\delta)^4}{1.2.3.4.5} + \ldots},$$

d'où $h < 1$.

On peut donc diviser l'équation (4) par δ et l'écrire

$$c^{2\delta}+c^{-2\delta}+2\cos 2\gamma = 4\left[1+\frac{(2\delta)^2}{1.2.3}+\frac{(2\delta)^4}{1.2.3.4.5}+\ldots\right];$$

alors l'équation (3) devient

$$(5)\qquad \zeta-\gamma=-\frac{\sin 2\gamma}{2\left[1+\frac{(2\delta)^2}{1.2.3}+\ldots\right]},$$

formule dont les conséquences nous seront utiles.

Elle nous montre d'abord que la différence entre ζ et γ est en valeur absolue moindre que $\frac{1}{2}$. Distinguons ensuite deux cas, selon que ζ est plus grand ou plus petit que γ. Dans le premier cas, comme ζ est positif et moindre que π, γ sera compris entre $-\frac{1}{2}$ et π; mais $\sin 2\gamma$ étant négatif en vertu de l'équation (5), γ ne peut tomber entre zéro et $\frac{\pi}{2}$; il ne peut être non plus entre $-\frac{1}{2}$ et zéro; car soit, s'il est possible, $\gamma=-\gamma'$, γ' étant positif et moindre que $\frac{1}{2}$, on aurait

$$\zeta+\gamma'=\frac{\sin 2\gamma}{2\left[1+\frac{(2\delta)^2}{1.2.3}+\ldots\right]},$$

d'où il suivrait

$$\gamma'<\frac{\sin 2\gamma'}{2},\quad 2\gamma'<\sin 2\gamma',$$

ce qui est absurde. Il faut donc que γ soit compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et comme ζ, par hypothèse, surpasse γ, on en conclut que ζ surpasse $\frac{\pi}{2}$: ainsi, lorsque $\zeta-\gamma$ est positif, $\zeta-\frac{\pi}{2}$ l'est aussi.

Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque ζ est moindre que γ, γ est nécessairement compris entre zéro et $\pi+\frac{1}{2}$; mais $\sin 2\gamma$ étant positif en vertu de l'équation (5), γ ne peut tomber entre $\frac{\pi}{2}$ et π; il ne peut être non plus entre π et $\pi + \frac{1}{2}$; car soit, s'il est possible, $\gamma = \pi + \gamma'$, γ' étant positif et moindre que $\frac{1}{2}$, on aurait

$$\gamma' + \pi - \zeta = \frac{\sin 2\gamma'}{2\left[1 + \frac{(2\delta)^2}{1.2.3} + \ldots\right]},$$

d'où il suivrait, comme tout à l'heure, l'inégalité absurde

$$2\gamma' < \sin 2\gamma'.$$

Il faut donc que γ soit compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, et comme ζ est, par hypothèse, moindre que γ, on en conclut que ζ est moindre que $\frac{\pi}{2}$; ainsi, lorsque $\zeta - \gamma$ est négatif, $\zeta - \frac{\pi}{2}$ l'est aussi. On voit donc que $\zeta - \gamma$ est toujours de même signe que $\zeta - \frac{\pi}{2}$, de sorte qu'on peut faire

$$\zeta - \gamma = \theta\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\right),$$

θ étant essentiellement positif.

Ceci établi, revenons aux équations (1); en y regardant ζ comme variable, la seconde nous donne

$$(1 - x\cos y)\frac{dy}{d\zeta} - \sin y\frac{dx}{d\zeta} = 1,$$

ou, en ayant égard à la première,

$$-\sin y\frac{dx}{d\zeta} = 1,$$

$$\frac{dx}{d\zeta} = -\frac{1}{\sin y} = \frac{x}{\zeta - y},$$

ou encore

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} + \frac{d\beta}{d\zeta}\sqrt{-1} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\zeta - \gamma - \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\zeta - \gamma + \delta\sqrt{-1})}{(\zeta - \gamma)^2 + \delta^2}.$$

Cette équation se décompose dans les deux suivantes :

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} = \frac{\alpha(\zeta-\gamma)-\beta\delta}{(\zeta-\gamma)^2+\delta^2},$$

$$\frac{d\beta}{d\zeta} = \frac{\beta(\zeta-\gamma)+\alpha\delta}{(\zeta-\gamma)^2+\delta^2}:$$

il en résulte

$$\frac{\alpha\,d\alpha+\beta\,d\beta}{d\zeta} = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\zeta-\gamma)}{(\zeta-\gamma)^2+\delta^2},$$

ou bien

$$\frac{dh}{d\zeta} = \frac{h(\zeta-\gamma)}{(\zeta-\gamma)^2+\delta^2} = \frac{h\theta}{(\zeta-\gamma)^2+\delta^2}\left(\zeta-\frac{\pi}{2}\right).$$

On conclut de là que ζ croissant de zéro à $\frac{\pi}{2}$, le module h ira en diminuant, et qu'ensuite, ζ croissant de $\frac{\pi}{2}$ à π, le même module ira en augmentant. Il est donc minimum pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$, ce que nous nous proposions de démontrer.