JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-G.-J. JACOBI

Sur la rotation d'un corps, extrait d'une lettre adressée à l'Académie des Sciences

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 337-344.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__337_0>

SUR LA ROTATION D'UN CORPS,

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A L'ACADÉMIE DES SCIENCES;

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

[*Comptes rendus*, tome XXIX, page 97. — Séance du 30 juillet 1849.]

Le problème de la rotation d'un corps solide quelconque, qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, est susceptible d'être résolu par des formules nouvelles si élégantes et si parfaites, que je ne peux m'empêcher de les communiquer à votre illustre Académie. Ce sont les fonctions Θ et H que j'ai introduites dans l'analyse des fonctions elliptiques, c'est-à-dire les fonctions

$$\Theta = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots,$$
$$\mathrm{H} = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - 2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x + \ldots.$$

au moyen desquelles je suis parvenu à exprimer, de la manière la plus simple, les neuf cosinus eux-mêmes qu'il s'agit, dans ce problème, de déterminer en fonctions du temps. En effet, x étant une variable proportionnelle au temps, on trouve les cosinus des angles qui, à chaque instant, déterminent la position des axes principaux du corps, égaux à des fractions qui ont cette fonction Θ pour commun dénominateur, les neuf numérateurs étant, abstraction faite de facteurs constants, la même fonction Θ, où seulement x se trouve augmenté d'une constante imaginaire. Quel que soit le degré d'exactitude auquel on voudra pousser les calculs, on n'aura guère à prendre plus de quatre termes de ces séries, excepté les cas extrêmes. On doit donc regarder ces cosinus comme exprimés par des quantités finies, et même par des quantités finies très-simples. Si l'on veut résoudre le problème du mouvement elliptique d'une planète par de semblables formules définitives qui ont le temps sous le signe cos ou sin, on a, comme on sait, des séries beaucoup moins convergentes, et des coefficients beaucoup plus compliqués.

La rotation en question se compose de *deux rotations périodiques*, et dont les périodes, en général, sont incommensurables entre elles. Pour avoir une idée nette et claire de ce mouvement, il faut supposer aux axes des x et y, dans le plan invariable, un certain mouvement rotatoire uniforme, et rapporter la position du corps à ces axes mobiles et à l'axe fixe des z perpendiculaire au plan invariable. Or, étant posé

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{aligned}$$

les axes des x', y', z' étant les axes principaux du corps, et les axes des x et y, comme on vient de dire, des axes mobiles tournoyant uniformément, avec une vitesse déterminée, dans le plan invariable, les neuf quantités α, β, etc., seront des fonctions du temps *simplement périodiques.* Avant de donner leurs valeurs en fonctions du temps, il faut convenir des notations suivantes :

Soient, h la force vive, l le moment de rotation dans le plan invariable, A, B, C les trois moments d'inertie relatifs aux axes des x', y', z', et supposons, pour fixer les idées, que

$$\mathrm{B}h > l^2,$$

où B est le moment moyen, A étant le plus grand, C le plus petit. Le module des transcendantes elliptiques qui entreront dans les formules données ci-dessous, sera

$$k = \sqrt{\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{B}-\mathrm{C}}} \cdot \sqrt{\frac{l^2 - \mathrm{C}h}{\mathrm{A}h - l^2}},$$

d'où

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}-\mathrm{C}}} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{B}h - l^2}{\mathrm{A}h - l^2}}.$$

Posons, comme dans mon ouvrage sur les fonctions elliptiques,

$$\mathrm{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad \mathrm{K}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}, \quad q = e^{-\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}};$$

soit de plus $K - a$ une intégrale elliptique de première espèce, dont le sinus de l'amplitude, par rapport au module complémentaire k', est

$$\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \sin \operatorname{am}(K - a,\ k'),$$

ou, étant mis

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}},$$

soit

$$a = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\theta}}.$$

Soit t le temps, et

$$u = nt + \tau,$$

τ étant une nouvelle constante arbitraire, et

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah - l^2)}{ABC}}.$$

Aux fonctions Θu et $H u$ dont j'ai fait usage dans les *Fundamenta*, je joins les fonctions

$$\Theta_1(u) = \Theta(K - u), \quad H_1(u) = H(K - u);$$

de sorte qu'on a

$$\sqrt{k} \sin \operatorname{am} u = \frac{H u}{\Theta u}, \quad \sqrt{\frac{k}{k'}} \cos \operatorname{am} u = \frac{H_1(u)}{\Theta u}, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}} \Delta \operatorname{am} u = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta u}.$$

Cela posé, et étant $i = \sqrt{-1}$, *on aura le tableau suivant des valeurs des neuf quantités* α, β, *etc.*,

$$\alpha = \frac{\Theta_1(0)[H(u+ia) + H(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta u}, \qquad \alpha' = \frac{\Theta_1(0)[H(u+ia) - H(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u},$$

$$\beta = -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia) + H_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\Theta u}, \quad \beta' = \frac{\Theta(0)[H_1(u-ia) - H_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u},$$

$$\gamma = \frac{H\left(\frac{\pi}{2}\right)[\Theta(u+ia) - \Theta(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u}, \qquad \gamma' = -\frac{H\left(\frac{\pi}{2}\right)[\Theta(u+ia) + \Theta(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta u},$$

$$\alpha'' = \frac{\Theta(ia)H_1 u}{H_1(ia)\Theta u}, \quad \beta'' = \frac{\Theta_1(ia)H u}{H_1(ia)\Theta u}, \quad \gamma'' = \frac{H(ia)\Theta_1(u)}{iH_1(ia)\Theta u}.$$

Les composantes de la vitesse rotatoire instantanée parallèles aux x, y, z sont :

$$f\cdot\frac{\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right)[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)]}{2\,\mathrm{H}_1(ia)\,\Theta u},\quad f\cdot\frac{\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right)[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)]}{2i\,\mathrm{H}_1(ia)\,\Theta u},\quad \frac{h}{g},$$

où

$$f=\frac{\sqrt{[(\mathrm{B}-\mathrm{C})(\mathrm{B}h-l^2)]}}{\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{C}}}.$$

Le mouvement rotatoire du plan invariable est

$$n'u=n'(nt+\tau),$$

où la constante n' est

$$n'=\frac{1}{\mathrm{A}-\mathrm{C}}\left[\mathrm{C}\,\frac{d\log\mathrm{H}(ia)}{da}+\mathrm{A}\,\frac{d\log\Theta(ia)}{da}\right].$$

Mettant

$$x=\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}=\frac{\pi(nt+\tau)}{2\mathrm{K}},\quad a=b\mathrm{K}',$$

où $b<1$, on aura

$$\frac{1}{2}[\Theta\;(u+ia)+\Theta\;(u-ia)]=1-q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x+q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x-\ldots,$$

$$\frac{1}{2i}[\Theta\;(u+ia)-\Theta\;(u-ia)]=q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x-q^{4-2b}(1-q^{4b})\sin 4x+\ldots,$$

$$\frac{1}{2}[\mathrm{H}\;(u+ia)+\mathrm{H}\;(u-ia)]=q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1+q^{b})\sin x-q^{2-b}(1+q^{3b})\sin 3x+\ldots],$$

$$\frac{1}{2i}[\mathrm{H}\;(u+ia)-\mathrm{H}\;(u-ia)]=q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1-q^{b})\cos x-q^{2-b}(1-q^{3b})\cos 3x+\ldots],$$

$$\frac{1}{2}[\mathrm{H}_1(u-ia)+\mathrm{H}_1(u+ia)]=q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1+q^{b})\cos x+q^{2-b}(1+q^{3b})\cos 3x+\ldots],$$

$$\frac{1}{2i}[\mathrm{H}_1(u-ia)+\mathrm{H}_1(u+ia)]=q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1-q^{b})\sin x+q^{2-b}(1-q^{3b})\sin 3x+\ldots],$$

$$\frac{1}{2}[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)]=1+q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x+q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x+\ldots,$$

$$\frac{1}{2i}[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)]=q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x+q^{4-2b}(1-q^{4b})\cos 4x+\ldots.$$

Dans les deux premières et les deux dernières formules, les premiers termes qui suivent ceux qu'on a écrits, sont de l'ordre de la quantité q^{9-3b}; dans les autres formules, ces termes sont de l'ordre de la quantité q^{6-2b}: ceux-ci ajoutés, on n'aura rejeté que les termes respectivement de l'ordre des quantités q^{16-4b} et q^{12-3b}. En mettant ou $b=0$ ou $x=0$, on aura le développement des autres fonctions qui entrent dans les formules établies ci-dessus. On a, d'ailleurs

$$\Theta_1(0)=\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\quad \Theta(0)=\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},\quad H\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}.$$

Si la quantité q et le module k sont très-proches de l'unité, on se servira des formules suivantes, par lesquelles le module se transforme dans son complément, et, par suite, la quantité q dans la quantité extrêmement petite $q'=e^{\frac{\pi^2}{\log q}}$,

$$\begin{aligned}
\Theta\,(u+ia) &= igH[u-i(K'-a)] = g'H_1(a-iu,k')\\
&= g''\Theta_1[a+i(K-u),k'],\\
H\,(u+ia) &= ig\Theta[u-i(K'-a)] = ig'H(a-iu,k')\\
&= g''\Theta[a+i(K-u),k'],\\
H_1(u+ia) &= g\Theta_1[u-i(K'-a)] = g'\Theta(a-iu,k')\\
&= -ig''H[a+i(K-u),k'],\\
\Theta_1(u+ia) &= gH_1[u-i(K'-a)] = g'\Theta_1(a-iu,k')\\
&= g''H_1[a+i(K-u),k'],
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
g &= e^{-\frac{\pi}{4K}(K'-2a+2iu)},\\
g' &= \sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{-\frac{\pi}{4KK'}(u+ia)^2},\\
g'' &= \sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{-\frac{\pi}{4KK'}(K-u-ia)^2}.
\end{aligned}$$

Par cette transformation, les formules perdent leur caractère périodique, comme cela est bien propre à un mouvement de rotation extrêmement lent et dont la période est d'une durée quasi-infinie.

On peut aussi développer les neuf cosinus α, β, etc., en séries périodiques très-simples et assez convergentes encore, quoique dépourvues de cette convergence extraordinaire dont jouissent le dénominateur et les numérateurs de leurs valeurs fractionnaires données ci-dessus. On parvient à ces développements en partant de ces fractions et en se servant des formules suivantes :

$$(1)\qquad \mathrm{H}_1(\mathrm{o})\,\Theta(\mathrm{o})\,\Theta_1(\mathrm{o})\,\frac{i\,[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}{2\,\mathrm{H}(ia)\,\Theta u}$$

$$=\frac{2\,q^{\frac{1}{2}b}}{1-q^b}-2\left(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})}+\frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})}+\ldots\right];$$

$$(2)\qquad \mathrm{H}_1(\mathrm{o})\,\Theta(\mathrm{o})\,\Theta_1(\mathrm{o})\,\frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2\,\mathrm{H}(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{q(1-q^2)\sin 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})}+\frac{q^2(1-q^4)\sin 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})}+\ldots\right];$$

$$(3)\qquad \mathrm{H}_1(\mathrm{o})\,\Theta(\mathrm{o})\,\Theta_1(\mathrm{o})\,\frac{\mathrm{H}(u+ia)+\mathrm{H}(u+ia)}{2\,\Theta(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{\sqrt{q}\,(1-q)\sin x}{(1-q^{1-b})(1-q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3}\,(1-q^3)\sin 3x}{(1-q^{3-b})(1-q^{3+b})}+\ldots\right];$$

$$(4)\qquad \mathrm{H}_1(\mathrm{o})\,\Theta(\mathrm{o})\,\Theta_1(\mathrm{o})\,\frac{\mathrm{H}(u+ia)-\mathrm{H}(u-ia)}{2\,i\,\Theta(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{\sqrt{q}\,(1+q)\cos x}{(1-q^{1-b})(1-q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3}\,(1+q^3)\cos 3x}{(1-q^{3-b})(1-q^{3+b})}+\ldots\right];$$

$$(5)\qquad \mathrm{H}_1(\mathrm{o})\,\Theta(\mathrm{o})\,\Theta_1(\mathrm{o})\,\frac{\mathrm{H}_1(u-ia)+\mathrm{H}_1(u+ia)}{2\,\Theta_1(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{\sqrt{q}\,(1+q)\cos x}{(1+q^{1-b})(1+q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3}\,(1+q^3)\cos 3x}{(1+q^{3-b})(1+q^{3+b})}+\ldots\right];$$

$$(6)\qquad \mathrm{H}_1(\mathrm{o})\,\Theta(\mathrm{o})\,\Theta_1(\mathrm{o})\,\frac{\mathrm{H}_1(u-ia)-\mathrm{H}_1(u+ia)}{2\,i\,\Theta_1(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{\sqrt{q}\,(1-q)\sin x}{(1+q^{1-b})(1+q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3}\,(1+q^3)\sin 3x}{(1+q^{3-b})(1+q^{3+b})}+\ldots\right];$$

$$(7)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)}{2\,\mathrm{H}_1(ia)\,\Theta u}$$

$$=\frac{2q^{\frac{1}{2}b}}{1+q^b}+2\left(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1+q^{2-b})(1+q^{2+b})}+\frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1+q^{4-b})(1+q^{4+b})}+\ldots\right];$$

$$(8)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)}{2i\,\mathrm{H}_1(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{q(1-q^2)\sin 2x}{(1+q^{2-b})(1+q^{2+b})}+\frac{q^2(1-q^4)\sin 4x}{(1+q^{4-b})(1+q^{4+b})}+\ldots\right].$$

$$(9)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\mathrm{H}_1(u)}{\Theta u}=\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\cos\operatorname{am} u=\frac{4\sqrt{q}\cos x}{1+q}+\frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3}+\ldots,$$

$$(10)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\mathrm{H}u}{\Theta u}=\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\sin\operatorname{am} u=\frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q}+\frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}+\ldots,$$

$$(11)\qquad \Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta u}=\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\Delta\operatorname{am} u=1+\frac{4q\cos 2x}{1+q^2}+\frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4}+\ldots.$$

Quant aux facteurs constants par lesquels il faut multiplier les formules précédentes pour obtenir les valeurs des neufs cosinus, j'observe qu'on a

$$\frac{\Theta(ia)}{\mathrm{H}_1(ia)}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{1}{\cos\operatorname{am}(ia)}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\sqrt{\frac{\mathrm{A}(l^2-\mathrm{C}h)}{(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,l^2}},$$

$$\frac{\Theta_1(ia)}{\mathrm{H}_1(ia)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\mathrm{B}(l^2-\mathrm{C}h)}{(\mathrm{B}-\mathrm{C})\,l^2}},$$

$$\frac{\mathrm{H}(ia)}{i\,\mathrm{H}_1(ia)}=\frac{\sqrt{k'}\,\operatorname{tang}\operatorname{am}(ia)}{i}=\sqrt{k'}\sqrt{\frac{\mathrm{C}(\mathrm{A}h-l^2)}{(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,l^2}}.$$

Les formules (1) et (8) sont nouvelles et d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques; j'ai remarqué ailleurs que, par leur moyen, on parvient, de la manière la plus aisée et la plus directe, aux formules de la transformation inverse, vu qu'en faisant usage d'autres méthodes, on a quelque peine à déterminer les facteurs constants qui entrent dans ces formules.

On trouvera des séries analogues pour les valeurs des six quantités

$$\frac{\alpha}{\alpha''},\quad\frac{\alpha'}{\alpha''},\quad\frac{\beta}{\beta''},\quad\frac{\beta'}{\beta''},\quad\frac{\gamma}{\gamma''},\quad\frac{\gamma'}{\gamma''}.$$

ou pour les tangentes des angles que les projections des axes des x', y', z' sur les plans des x, z et des y, z forment avec l'axe des z.

Mais, pour les recherches analytiques, il conviendra presque toujours de faire usage des formules fractionnaires par lesquelles on a exprimé les cosinus des angles des deux systèmes de coordonnées. Ces formules remarquables pourront, dans le problème de la rotation, servir de point de départ à des recherches analogues à celles que M. Gauss a entreprises dans son *Traité sur le mouvement elliptique et hyperbolique*.

Les mêmes formules donnent une nouvelle manière d'exprimer les neuf cosinus des angles de deux systèmes d'axes rectangulaires par trois quantités. Ces quantités sont ici les deux arguments u et a, et le module k; ou, si l'on veut, les quantités x, b, q.