JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 257-299.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__257_0>

MÉMOIRE

SUR

L'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels;

Par J. LIOUVILLE [*].

1. Dans une Note qui fait partie des *Additions* à la *Connaissance des Temps* pour 1849 [**], j'ai montré comment on peut intégrer les équations différentielles du mouvement d'un point libre, dans un cas très-étendu qui comprend en particulier tout ce qu'Euler et Lagrange ont donné relativement au mouvement d'un mobile soumis à l'action de deux ou de trois centres fixes. Je vais appliquer ici la même analyse aux équations du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels m, m', m'',... que d'abord je supposerai libres aussi. Ces points libres seront rapportés à trois axes Ox, Oy, Oz, rectangulaires ou obliques, comme on voudra; mais après avoir décomposé la force qui sollicite chaque point du système en trois autres, parallèlement à ces axes, nous admettrons que les valeurs de ces trois composantes s'expriment par les dérivées partielles, relatives aux trois coordonnées correspondantes du point, d'une certaine fonction donnée U des coordonnées x, y, z, x', y', z',... de tous les points m, m', m'',..., laquelle fonction restera la même pour tous ces points et ne dépendra pas du

[*] Ce Mémoire a déjà paru, il y a deux ans, dans la *Connaissance des Temps*. Comme il fait suite à des recherches insérées dans ce Journal et sur lesquelles nous aurons encore à revenir plus tard, nous avons cru devoir le reproduire ici.

[**] Voyez aussi les deux Mémoires *sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer,* insérés aux tomes XI et XII du *Journal de Mathématiques*. La Note citée n'est qu'un extrait du second de ces deux Mémoires.

temps. Les équations du mouvement seront ainsi :

$$(1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{dU}{dx}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dU}{dy}, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=\dfrac{dU}{dz}, \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2}=\dfrac{dU}{dx'}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si les coordonnées sont rectangulaires, U désignera ce que M. Jacobi nomme la *fonction des forces;* et l'on voit que l'hypothèse où nous nous plaçons consiste alors à admettre que le principe des forces vives ait lieu. Si les coordonnées sont obliques, ce principe de mécanique cessera, en général, d'être applicable. Mais comme, dans ce second cas, la forme analytique des équations (1) se trouve être la même que dans le premier, la signification géométrique et dynamique des quantités dont les équations se composent étant seule changée, il est clair que la méthode même qui conduit à l'intégrale des forces vives dans le premier cas (et qui repose sur ce fait, qu'on obtient dans les deux membres une différentielle exacte, en ajoutant les équations (1) après les avoir multipliées par les facteurs respectifs $2dx$, $2dy$, etc.), conduira encore, dans le second cas, à une intégrale algébriquement semblable à celle-là; ce que l'on doit comprendre facilement sans qu'il soit nécessaire d'y insister.

2. Au reste, pour marquer mieux encore le point de vue purement analytique où nous voulons nous placer dans ce Mémoire, et aussi pour donner à nos calculs plus de symétrie et d'élégance, nous changerons un peu la forme des équations (1). Nous substituerons à ces équations (1) le système d'équations que voici :

$$(2)\quad \begin{cases} m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\dfrac{dU}{dx_1}, \\ m_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=\dfrac{dU}{dx_2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ m_i\dfrac{d^2x_i}{dt^2}=\dfrac{dU}{dx_i}, \end{cases}$$

où m_1, m_2,..., m_i sont des constantes, et U une fonction des variables x_1, x_2,..., x_i, mais non de la variable indépendante t. Dans la question de dynamique indiquée, l'indice i deviendra égal au triple du nombre des points mobiles, t désignera le temps; x_1, x_2, x_3 seront les coordonnées du premier point; x_4, x_5, x_6 celles du second;...; x_{i-2}, x_{i-1}, x_i celles du dernier : de plus, on aura $m_1 = m_2 = m_3$, $m_4 = m_5 = m_6$, etc., et m_1, m_4, etc., seront les masses en mouvement. Mais on pourra, dans tous les cas, se débarrasser des coefficients m_1, m_2,..., m_i, en remplaçant

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_i$$

respectivement par

$$\frac{x_1}{\sqrt{m_1}},\quad \frac{x_2}{\sqrt{m_2}},\ldots,\quad \frac{x_i}{\sqrt{m_i}};$$

et l'on aura ainsi, au lieu du système des équations (2), le système un peu plus simple,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{dU}{dx_1},\\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= \frac{dU}{dx_2},\\ &\ldots\ldots\\ \frac{d^2x_i}{dt^2} &= \frac{dU}{dx_i},\end{aligned}\right.$$

que j'emploierai désormais exclusivement.

3. D'après un théorème de M. Jacobi, l'intégration du système (3), composé de i équations différentielles ordinaires, dépend d'une solution Θ de l'équation aux différences partielles

$$(4)\qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2 = 2(U+h),$$

contenant, outre la constante arbitraire h, qui entre déjà dans l'équation (4), $i-1$ autres constantes arbitraires α_1, α_2,..., α_{i-1}, distinctes de celle qu'on peut toujours introduire par simple addition dans la fonction Θ. Une telle solution étant trouvée, les intégrales du système (3) seront

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1, \\ \dfrac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \\ \vdots \\ \dfrac{d\Theta}{d\alpha_{i-1}} = \beta_{i-1}, \\ \dfrac{d\Theta}{dh} = t + \varepsilon, \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \varepsilon$ étant de nouvelles constantes arbitraires qui complètent avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, h$ le nombre $2i$. On aura aussi les équations *intermédiaires* suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{d\Theta}{dx_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{d\Theta}{dx_2}, \\ \vdots \\ \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{d\Theta}{dx_i}, \end{cases}$$

dans lesquelles l'intégration est, si l'on peut s'exprimer ainsi, effectuée à moitié, et qui, combinées avec l'équation (4), reproduisent l'intégrale connue

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h).$$

Nous pourrions renvoyer, pour la démonstration, au Journal de M. Crelle ou au tome III de notre *Journal de Mathématiques*, page 81; mais nous aimons mieux rappeler ici en peu de mots le procédé fort simple par lequel M. Jacobi établit ce beau résultat.

4. En différentiant, par rapport à chacune des constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$, l'équation donnée aux différences partielles

$$(4)\qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h).$$

dont le second membre est indépendant de ces constantes, on en déduit les $i-1$ équations nouvelles

$$\frac{d\Theta}{dx_1}\frac{d^2\Theta}{d\alpha_1 dx_1}+\frac{d\Theta}{dx_2}\frac{d^2\Theta}{d\alpha_1 dx_2}+\ldots+\frac{d\Theta}{dx_i}\frac{d^2\Theta}{d\alpha_1 dx_i}=0,$$
$$\frac{d\Theta}{dx_1}\frac{d^2\Theta}{d\alpha_2 dx_1}+\frac{d\Theta}{dx_2}\frac{d^2\Theta}{d\alpha_2 dx_2}+\ldots+\frac{d\Theta}{dx_i}\frac{d^2\Theta}{d\alpha_2 dx_i}=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{d\Theta}{dx_1}\frac{d^2\Theta}{d\alpha_i dx_1}+\frac{d\Theta}{dx_2}\frac{d^2\Theta}{d\alpha_i dx_2}+\ldots+\frac{d\Theta}{dx_i}\frac{d^2\Theta}{d\alpha_i dx_i}=0.$$

Considérons maintenant les équations finies (5), qui fournissent x_1, $x_2,\ldots, x_i$ en fonction de t, et des constantes $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{i-1}, \beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_{i-1}, \varepsilon, h$. Il faut prouver qu'en partant de ces équations, on revient aux équations (3) par l'élimination des constantes. En les différentiant par rapport à t, nous en déduirions les valeurs des dérivées

$$\frac{dx_1}{dt},\quad \frac{dx_2}{dt},\ldots,\quad \frac{dx_i}{dt}.$$

Mais en nous bornant d'abord à chercher les rapports de ces dérivées, nous n'aurons besoin de différentier que les $i-1$ premières,

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2}=\beta_2,\ldots,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_{i-1}}=\beta_{i-1};$$

car dans les équations différentielles

$$\frac{d^2\Theta}{d\alpha_1 dx_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\alpha_1 dx_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{d^2\Theta}{d\alpha_1 dx_i}\frac{dx_i}{dt}=0,$$
$$\frac{d^2\Theta}{d\alpha_2 dx_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\alpha_2 dx_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{d^2\Theta}{d\alpha_2 dx_i}\frac{dx_i}{dt}=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{d^2\Theta}{d\alpha_{i-1} dx_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\alpha_{i-1} dx_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{d^2\Theta}{d\alpha_{i-1} dx_i}\frac{dx_i}{dt}=0,$$

il n'y a point de terme qui ne soit multiplié par une de ces dérivées. Or ces $i-1$ dernières équations reviendront aux $i-1$ équations que nous avons précédemment déduites de l'équation aux différences partielles (4), si l'on suppose les rapports dont il s'agit égaux à ceux des quantités

$$\frac{d\Theta}{dx_1}, \quad \frac{d\Theta}{dx_2}, \ldots, \quad \frac{d\Theta}{dx_i}.$$

Il faut donc qu'on ait

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda \frac{d\Theta}{dx_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \lambda \frac{d\Theta}{dx_2}, \ldots, \quad \frac{dx_i}{dt} = \lambda \frac{d\Theta}{dx_i},$$

λ étant un certain facteur commun.

Pour déterminer ce facteur, je différentie, par rapport à t, l'équation

$$\frac{d\Theta}{dh} = t + \varepsilon,$$

ce qui donne

$$\frac{d^2\Theta}{dhdx_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2\Theta}{dhdx_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{d^2\Theta}{dhdx_i}\frac{dx_i}{dt} = 1,$$

et, par conséquent,

$$\lambda\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\frac{d^2\Theta}{dhdx_1} + \frac{d\Theta}{dx_2}\frac{d^2\Theta}{dhdx_2} + \ldots + \frac{d\Theta}{dx_i}\frac{d^2\Theta}{dhdx_i}\right) = 1.$$

Mais en différentiant l'équation aux différences partielles (4), par rapport à h, on trouve

$$\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\frac{d^2\Theta}{dhdx_1} + \frac{d\Theta}{dx_2}\frac{d^2\Theta}{dhdx_2} + \ldots + \frac{d\Theta}{dx_i}\frac{d^2\Theta}{dhdx_i}\right) = 1;$$

en sorte que le coefficient de λ est égal à l'unité. Donc aussi $\lambda = 1$, et, par suite,

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_2}, \ldots, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_i}.$$

On voit déjà par là que les équations (6) résultent des équations (5), par l'élimination des constantes arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \varepsilon$. Il reste à prouver qu'en éliminant, en outre, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, h$, on arrive aux équations différentielles (3).

Pour cela, je différentie, par rapport à t, les équations

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_2}, \ldots, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_i},$$

ce qui donne, pour chaque indice μ,

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = \frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_i}\frac{dx_i}{dt};$$

d'où, en remplaçant les dérivées de $x_1, x_2, \ldots, x_i$ par leurs valeurs,

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = \frac{d\Theta}{dx_1}\frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_1} + \frac{d\Theta}{dx_2}\frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_2} + \ldots + \frac{d\Theta}{dx_i}\frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_i}.$$

Le second membre est la dérivée partielle, par rapport à x_μ, de l'expression

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2\right],$$

égale à $U + h$, d'après l'équation (4). On a donc

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = \frac{dU}{dx_\mu};$$

et, en donnant à μ les valeurs successives $1, 2, \ldots, i$, on retrouve, comme nous l'avions annoncé, les équations différentielles (3).

5. Pour intégrer les équations différentielles (3), nous n'avons donc qu'à chercher une solution contenant $i-1$ constantes arbitraires α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$, ou, comme on dit, une solution *complète* de l'équation aux différences partielles

$$\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2 = 2(U + h). \tag{4}$$

Or je me propose de montrer ici qu'on peut obtenir aisément une valeur de Θ convenable toutes les fois que U est de la forme

$$\begin{aligned} U = {} & \frac{f_1(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\ldots(\rho_1-\rho_i)} \\ & + \frac{f_2(\rho_2)}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)\ldots(\rho_2-\rho_i)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{f_i(\rho_i)}{(\rho_i-\rho_1)(\rho_i-\rho_2)\ldots(\rho_i-\rho_{i-1})}, \end{aligned}$$

$f_1(\rho_1), f_2(\rho_2), \ldots, f_i(\rho_i)$ désignant des fonctions quelconques de leurs variables respectives, et ces variables $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_i$ représentant les i racines de l'équation

$$(7)\qquad \frac{x_1^2}{\rho - a_1} + \frac{x_2^2}{\rho - a_2} + \ldots + \frac{x_i^2}{\rho - a_i} = 1,$$

qui est de degré i par rapport à ρ, et où $a_1, a_2,\ldots, a_i$ sont des constantes auxquelles on peut donner une fois pour toutes telles valeurs qu'on voudra. En posant généralement

$$\varphi(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_i), \quad \varphi'(\rho) = \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho},$$

la valeur de U à laquelle notre théorème s'applique s'exprimera plus simplement comme il suit :

$$U = \frac{f_1(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{f_2(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{f_i(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}.$$

Mais il faudra se souvenir que si les numérateurs $f_1(\rho_1)$, etc., sont des fonctions de la seule variable marquée entre parenthèses, il n'en est pas de même des dénominateurs : $\varphi'(\rho_1)$, par exemple, n'est pas une fonction de ρ_1 seule ; on a

$$\varphi'(\rho_1) = (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)\ldots(\rho_1 - \rho_i);$$

c'est une fonction de toutes les variables $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_i$.

6. On sait et il est facile de vérifier que les constantes $a_1, a_2,\ldots, a_i$, quand elles sont réelles et rangées dans un ordre de grandeurs croissantes entre $-\infty$ et $+\infty$, servent de limites aux racines $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_i$, qui sont dès lors toutes réelles aussi ; la première racine ρ_1 est comprise entre a_1 et a_2, la seconde ρ_2 entre a_2 et $a_3,\ldots$, la dernière ρ_i entre a_i et $+\infty$.

Dans tous les cas, on forme aisément les expressions de $x_1, x_2,\ldots, x_i$ en $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_i$. Pour trouver x_1 par exemple, posons $\rho = a_1 + u$ dans l'équation (7), puis chassons les dénominateurs et faisons passer tous les termes dans un seul membre ; enfin ordonnons par rapport aux puissances descendantes de u : en écrivant seulement le premier et le dernier terme, nous aurons

$$u^i + \ldots - (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_i)\,x_1^2 = 0.$$

La comparaison du dernier terme de cette équation avec le produit

$$(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)\dots(\rho_i - a_1)$$

des racines u ou $\rho - a_1$ donne donc

$$x_1^2 = \frac{(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)(\rho_3 - a_1)\dots(\rho_i - a_1)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_i - a_1)}.$$

On aura de même

$$x_2^2 = \frac{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)(\rho_3 - a_2)\dots(\rho_i - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)\dots(a_i - a_2)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_i^2 = \frac{(\rho_1 - a_i)(\rho_2 - a_i)(\rho_3 - a_i)\dots(\rho_i - a_i)}{(a_1 - a_i)(a_2 - a_i)\dots(a_{i-1} - a_i)}.$$

Les variables $x_1, x_2, \dots, x_i$ s'exprimant ainsi au moyen de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i$, on peut substituer à ces variables primitives $x_1, x_2, \dots, x_i$ les variables nouvelles $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i$. Il en résultera une transformation de l'équation aux différences partielles (4), qui nous fournira la démonstration de notre théorème. Mais pour effectuer commodément cette transformation, il faut chercher d'abord en $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, d\rho_1, d\rho_2, \dots, d\rho_i$ la valeur de

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_i^2.$$

Nous rappellerons donc le procédé connu à l'aide duquel le calcul dont nous parlons s'effectue rapidement.

7. En prenant la différentielle logarithmique de

$$x_1^2 = \frac{(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)(\rho_3 - a_1)\dots(\rho_i - a_1)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_i - a_1)},$$

on a

$$\frac{2\,dx_1}{x_1} = \frac{d\rho_1}{\rho_1 - a_1} + \frac{d\rho_2}{\rho_2 - a_1} + \dots + \frac{d\rho_i}{\rho_i - a_1},$$

d'où

$$dx_1 = \frac{x_1}{2}\left(\frac{d\rho_1}{\rho_1 - a_1} + \frac{d\rho_2}{\rho_2 - a_1} + \dots + \frac{d\rho_i}{\rho_i - a_1}\right);$$

on aura de même

$$dx_2 = \frac{x_2}{2}\left(\frac{d\rho_1}{\rho_1 - a_2} + \frac{d\rho_2}{\rho_2 - a_2} + \dots + \frac{d\rho_i}{\rho_i - a_2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$dx_i = \frac{x_i}{2}\left(\frac{d\rho_1}{\rho_1 - a_i} + \frac{d\rho_2}{\rho_2 - a_i} + \dots + \frac{d\rho_i}{\rho_i - a_i}\right).$$

En faisant la somme des carrés pour former la valeur de

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_i^2,$$

on trouvera donc des termes affectés de $d\rho_1^2$, $d\rho_2^2, \ldots$, $d\rho_i^2$, et d'autres où figureront les rectangles $d\rho_1\, d\rho_2$, $d\rho_1\, d\rho_3, \ldots$; mais les coefficients de ces rectangles seront nuls. En effet, le coefficient de $d\rho_1\, d\rho_2$, par exemple, sera

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)} + \frac{x_2^2}{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)} + \ldots + \frac{x_i^2}{(\rho_1 - a_i)(\rho_2 - a_i)}\right];$$

or, si l'on pose successivement $\rho = \rho_1$ et $\rho = \rho_2$ dans l'équation (7), dont ρ_1 et ρ_2 sont racines, il vient

$$\frac{x_1^2}{\rho_1 - a_1} + \frac{x_2^2}{\rho_1 - a_2} + \ldots + \frac{x_i^2}{\rho_1 - a_i} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{\rho_2 - a_i} + \frac{x_2^2}{\rho_2 - a_2} + \ldots + \frac{x_i^2}{\rho_2 - a_i} + 1;$$

d'où, par soustraction, on tire sans difficulté

$$\frac{x_1^2}{(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)} + \frac{x_2^2}{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)} + \ldots + \frac{x_i^2}{(\rho_1 - a_i)(\rho_2 - a_i)} = 0.$$

Les coefficients des rectangles $d\rho_1 d\rho_2$, etc., sont donc nuls, et la valeur de

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx^2$$

peut s'écrire

$$p_1 d\rho_1^2 + p_2 d\rho_2^2 + \ldots + p_i d\rho_i^2,$$

en faisant, pour abréger,

$$4p_1 = \frac{x_1^2}{(\rho_1 - a_1)^2} + \frac{x_2^2}{(\rho_1 - a_2)^2} + \ldots + \frac{x_i^2}{(\rho_1 - a_i)^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$4p_i = \frac{x_1^2}{(\rho_i - a_1)^2} + \frac{x_2^2}{(\rho_i - a_2)^2} + \ldots + \frac{x_i^2}{(\rho_i - a_i)^2}.$$

8. Il reste à mettre pour x_1^2, $x_2^2, \ldots$, x_i^2 leurs valeurs dans p_1, $p_2, \ldots$, p_i. Mais la substitution directe donnerait un résultat assez compliqué, qu'on peut ensuite, il est vrai, ramener par différents moyens à une forme plus simple. L'artifice suivant que j'emprunte à un Mémoire de M. Hœdenkampf, inséré dans le Journal de M. Crelle, conduit au but plus rapidement.

Considérons l'expression générale

$$1 - \frac{x_1^2}{\rho - a_1} - \frac{x_2^2}{\rho - a_2} - \ldots - \frac{x_i}{\rho - a_i},$$

et supposons d'abord que ρ y reste indéterminée. Si l'on prenait pour ρ une des racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ de l'équation (7), cette expression s'évanouirait; mais elle ne sera plus nulle, et représentera une certaine fonction rationnelle de ρ, si on laisse ρ quelconque. En réduisant au même dénominateur les fractions qui la composent, on pourra la mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{F}(\rho)}{(\rho - a_1)(\rho - a_2)\ldots(\rho - a_i)},$$

$\mathrm{F}(\rho)$ étant un polynôme de degré i. Or ce polynôme $\mathrm{F}(\rho)$ doit s'évanouir pour $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2, \ldots, \rho = \rho_i$; donc il est de la forme

$$\mathrm{A}(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_i),$$

et l'hypothèse de $\rho = \infty$ montre, en outre, que $\mathrm{A} = 1$. J'en conclus que l'expression citée

$$1 - \frac{x_1^2}{\rho - a_1} - \frac{x_2^2}{\rho - a_2} - \ldots - \frac{x_i^2}{\rho - a_i}$$

revient à

$$\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_i)}{(\rho - a_1)(\rho - a_2)\ldots(\rho - a_i)}.$$

Maintenant différentions, par rapport à ρ, ces deux quantités que nous venons de trouver égales, et posons $\rho = \rho_1$ après la différentiation. Nous aurons, d'un côté, la dérivée

$$\frac{x_1^2}{(\rho_1 - a_1)^2} + \frac{x_2^2}{(\rho_1 - a_2)^2} + \ldots + \frac{x_i^2}{(\rho_1 - a_i)^2},$$

qui est ainsi égale à $4p_1$, et, d'un autre côté, la dérivée égale

$$\frac{(\rho_1 - \rho_2)\ldots(\rho_1 - \rho_i)}{(\rho_1 - a_1)(\rho_1 - a_2)\ldots(\rho_1 - a_i)},$$

à laquelle la fraction

$$\frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_i)}{(\rho-a_1)(\rho-a_2)\ldots(\rho-a_i)}$$

conduit très-facilement, parce qu'il suffit de différentier le facteur $\rho-\rho_1$, les autres termes contenus dans la valeur complète de la différentielle s'évanouissant pour $\rho=\rho_1$. On a donc

$$4p_1=\frac{(\rho_1-\rho_2)\ldots(\rho_1-\rho_i)}{(\rho_1-a_1)(\rho_1-a_2)\ldots(\rho_1-a_i)},$$

ou, si l'on veut,

$$p_1=\frac{\varphi'(\rho_1)}{\psi(\rho_1)},$$

en posant, comme au n° 5,

$$\varphi(\rho)=(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_i),\quad \varphi'(\rho)=\frac{d\varphi(\rho)}{d\rho},$$

et, de plus,

$$\psi(\rho)=4(\rho-a_1)(\rho-a_2)\ldots(\rho-a_i).$$

De même

$$p_2=\frac{\varphi'(\rho_2)}{\psi(\rho_2)},\ldots,\quad p_i=\frac{\varphi'(\rho_i)}{\psi(\rho_i)}.$$

9. Maintenant, ayant

$$dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_i^2=p_1d\rho_1^2+p_2d\rho_2^2+\ldots+p_id\rho_i^2,$$

ou, pour abréger,

$$\sum dx_\mu^2=\sum p_\mu d\rho_\mu^2,$$

je dis qu'on en conclut

$$\sum\left(\frac{d\Theta}{dx_\mu}\right)^2=\sum\frac{1}{p_\mu}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\right)^2,$$

de telle sorte que l'équation aux différences partielles (4), qui, à l'aide du signe $\sum$, peut s'écrire

$$\sum\left(\frac{d\Theta}{dx_\mu}\right)^2=2(\mathrm{U}+h),$$

sera transformée en

$$\sum \frac{1}{p_\mu}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\right)^2 = 2(\mathrm{U}+h),$$

c'est-à-dire en

$$(8) \qquad \frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U}+h).$$

Plus généralement, si l'on avait

$$q_1 dx_1^2 + q_2 dx_2^2 + \ldots + q_i dx_i^2 = p_1 d\rho_1^2 + p_2 d\rho_2^2 + \ldots + p_i d\rho_i^2,$$

ou

$$\sum q_\mu dx_\mu^2 = \sum p_\mu d\rho_\mu^2,$$

les coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_i$ étant des fonctions quelconques de x_1, $x_2, \ldots, x_i$, il en résulterait

$$\sum \frac{1}{q_\mu}\left(\frac{d\Theta}{dx_\mu}\right)^2 = \sum \frac{1}{p_\mu}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\right)^2.$$

La démonstration de cette proposition (au moyen de laquelle on opère un changement de variables en substituant à $x_1, x_2, \ldots, x_i$ de nouvelles variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ à l'aide desquelles s'expriment x_1, $x_2 \ldots, x_i$, et, par suite, toute fonction Θ de $x_1, x_2, \ldots, x_i$) se déduit des règles ordinaires du calcul différentiel. Il est bon cependant d'entrer dans tous les détails du calcul.

En remplaçant $dx_1, dx_2, \ldots, dx_i$ par leurs valeurs, savoir :

$$dx_1 = \frac{dx_1}{d\rho_1}d\rho_1 + \frac{dx_1}{d\rho_2}d\rho_2 + \ldots + \frac{dx_1}{d\rho_i}d\rho_i,$$

$$dx_2 = \frac{dx_2}{d\rho_1}d\rho_1 + \frac{dx_2}{d\rho_2}d\rho_2 + \ldots + \frac{dx_2}{d\rho_i}d\rho_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dx_i = \frac{dx_i}{d\rho_1}d\rho_1 + \frac{dx_i}{d\rho_2}d\rho_2 + \ldots + \frac{dx_i}{d\rho_i}d\rho_i.$$

dans l'équation

$$q_1 dx_1^2 + q_2 dx_2^2 + \ldots + q_i dx_i^2 = p_1 d\rho_1^2 + p_2 d\rho_2^2 + \ldots + p_i d\rho_i^2,$$

et comparant les deux membres, on en conclura deux groupes d'équations comprises, les unes dans ce type

$$(9)\qquad q_1\left(\frac{dx_1}{d\rho_\mu}\right)^2+q_2\left(\frac{dx_2}{d\rho_\mu}\right)^2+\ldots+q_i\left(\frac{dx_i}{d\rho_\mu}\right)^2=p_\mu;$$

et les autres dans celui-ci

$$(10)\qquad q_1\frac{dx_1}{d\rho_\mu}\frac{dx_1}{d\rho_\nu}+q_2\frac{dx_2}{d\rho_\mu}\frac{dx_2}{d\rho_\nu}+\ldots+q_i\frac{dx_i}{d\rho_\mu}\frac{dx_i}{d\rho_\nu}=0.$$

Dans ces deux équations, on peut donner à l'indice μ une quelconque des valeurs $1, 2, 3,\ldots, i$, après quoi on prendra, dans la seconde, pour ν une des valeurs restantes, de manière à n'avoir jamais $\nu=\mu$. Pour chaque valeur de μ, il y aura i équations, une du type (9), les autres du type (10).

On peut observer qu'à cause de la symétrie des formules on aurait de même

$$(11)\qquad p_1\left(\frac{d\rho_1}{dx_\mu}\right)^2+p_2\left(\frac{d\rho_2}{dx_\mu}\right)^2+\ldots+p_i\left(\frac{d\rho_i}{dx_\mu}\right)^2=q_\mu,$$

et

$$(12)\qquad p_1\frac{d\rho_1}{dx_\mu}\frac{d\rho_1}{dx_\nu}+p_2\frac{d\rho_2}{dx_\mu}\frac{d\rho_2}{dx_\nu}+\ldots+p_i\frac{d\rho_i}{dx_\mu}\frac{d\rho_i}{dx_\nu}=0,$$

pour ν différent de μ.

Maintenant je différentie, par rapport à ρ_μ, l'équation identique

$$\rho_\mu=\rho_\mu,$$

mais en regardant, dans le premier membre, ρ_μ comme une fonction des variables $x_1, x_2,\ldots, x_i$, qui, à leur tour, dépendent de ρ_1, $\rho_2,\ldots,\rho_i$. On trouve ainsi

$$(13)\qquad \frac{d\rho_\mu}{dx_1}\frac{dx_1}{d\rho_\mu}+\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\frac{dx_2}{d\rho_\mu}+\ldots+\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\frac{dx_i}{d\rho_\mu}=1.$$

La même équation identique $\rho_\mu=\rho_\mu$, différentiée par rapport à ρ_ν, l'indice ν étant différent de μ, fournira aussi

$$(14)\qquad \frac{d\rho_\mu}{dx_1}\frac{dx_1}{d\rho_\nu}+\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\frac{dx_2}{d\rho_\nu}+\ldots+\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\frac{dx_i}{d\rho_\nu}=0.$$

Les équations (13) et (14), en laissant fixe l'indice μ, et donnant à l'autre indice ν toutes les valeurs dont il est susceptible, seront en nombre i; elles déterminent, comme il était aisé de le prévoir à priori, les i dérivées

$$\frac{d\rho_\mu}{dx_1},\quad \frac{d\rho_\mu}{dx_2},\ldots\quad \frac{d\rho_\mu}{dx_i},$$

quand on suppose connues celles de $x_1, x_2,\ldots, x_i$, par rapport à ρ_1, $\rho_2,\ldots, \rho_i$. En les résolvant, on obtiendrait les valeurs des dérivées dont il s'agit; mais, à l'aide des formules (9) et (10), je puis vérifier de suite qu'on a généralement

$$(15)\qquad \frac{d\rho_\mu}{dx_s} = \frac{q_s}{p_\mu}\frac{dx_s}{d\rho_\mu},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\rho_\mu}{dx_1} = \frac{q_1}{p_\mu}\frac{dx_1}{d\rho_\mu},\quad \frac{d\rho_\mu}{dx_2} = \frac{q_2}{p_\mu}\frac{dx_2}{d\rho_\mu},\ldots,\quad \frac{d\rho_\mu}{dx_i} = \frac{q_i}{p_\mu}\frac{dx_i}{d\rho_\mu};$$

en effet, si l'on substitue ces valeurs dans les équations (13) et (14), et qu'on multiplie ensuite par p_μ, on aura des résultats identiques avec les formules (9), par conséquent des résultats exacts.

On tire de là, réciproquement,

$$\frac{dx_1}{d\rho} = \frac{p_\mu}{q_1}\frac{d\rho_\mu}{dx_1};\quad \frac{dx_2}{d\rho_\mu} = \frac{p_\mu}{q_2}\frac{d\rho_\mu}{dx_2},\ldots,\quad \frac{dx_i}{d\rho} = \frac{p_\mu}{q_i}\frac{d\rho_\mu}{dx_i};$$

moyennant quoi les formules (9) et (10) fournissent

$$(16)\qquad \frac{1}{q_1}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{q_2}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{q_i}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\right)^2 = \frac{1}{p_\mu},$$

et

$$(17)\qquad \frac{1}{q_1}\frac{d\rho_\mu}{dx_1}\frac{d\rho_\nu}{dx_1} + \frac{1}{q_2}\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\frac{d\rho_\nu}{dx_2} + \ldots + \frac{1}{q_i}\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\frac{d\rho_\nu}{dx_i} = 0;$$

et il est clair qu'on doit avoir de même

$$(18)\qquad \frac{1}{p_1}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_i}\right)^2 = \frac{1}{q_\mu},$$

et

$$(19)\qquad \frac{1}{p_1}\frac{dx_\mu}{d\rho_1}\frac{dx_\nu}{d\rho_1} + \frac{1}{p_2}\frac{dx_\mu}{d\rho_2}\frac{dx_\nu}{d\rho_2} + \ldots + \frac{1}{p_i}\frac{dx_\mu}{d\rho_i}\frac{dx_\nu}{d\rho_i} = 0.$$

Nous pouvons à présent nous occuper des dérivées d'une fonction quelconque Θ, et démontrer l'égalité des deux quantités

$$\frac{1}{q_1}\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2+\frac{1}{q_2}\left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{q_i}\left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2,$$

et

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2+\frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2.$$

On a, pour un indice quelconque s,

$$\frac{d\Theta}{dx_s}=\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_s}+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_s}+\ldots+\frac{d\Theta}{d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dx_s}.$$

Formons donc la valeur de

$$\frac{1}{q_s}\left(\frac{d\Theta}{dx_s}\right)^2,$$

puis donnons à s les valeurs successives $1, 2, 3, \ldots, i$, et ajoutons les résultats. Il y aura des termes de deux espèces: les uns contenant le carré d'une dérivée, comme $\left(\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\right)^2$; les autres un rectangle, comme $\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\frac{d\Theta}{d\rho_\nu}$. Le coefficient de $\left(\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\right)^2$ sera

$$\frac{1}{q_1}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_1}\right)^2+\frac{1}{q_2}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{q_i}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\right)^2,$$

quantité égale à $\frac{1}{p_\mu}$, d'après la formule (16). Quant au coefficient de $\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\frac{d\Theta}{d\rho_\nu}$, il se réduira à zéro par la formule (17). Le résultat définitif sera donc, d'une part,

$$\frac{1}{q_1}\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2+\frac{1}{q_2}\left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{q_i}\left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2,$$

et, d'autre part,

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2+\frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2;$$

ces deux quantités sont donc égales, ce qu'il fallait démontrer.

10. Lorsqu'on a $q_1=q_2=\ldots=q_i=1$, ce qui arrive, comme on l'a vu, dans la question que nous voulons traiter, l'analyse précédente transforme l'une dans l'autre les deux quantités

$$\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2,$$

et

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2.$$

Elle permet donc, comme on l'a déjà dit, de remplacer l'ancienne équation

$$(4) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h)$$

par l'équation nouvelle

$$(8) \qquad \frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h).$$

En mettant pour p_1, p_2,..., p_i leurs valeurs données au n° **8**, savoir :

$$p_1 = \frac{\varphi'(\rho_1)}{\psi(\rho_1)}, \quad p_2 = \frac{\varphi'(\rho_2)}{\psi(\rho_2)}, \ldots, \quad p_i = \frac{\varphi'(\rho_i)}{\psi(\rho_i)},$$

l'équation (8) devient

$$\frac{\psi(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{\psi(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{\psi(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h).$$

On lui donnera une forme plus commode encore pour notre objet en remplaçant les variables ρ_1, ρ_2,..., ρ_i par d'autres variables ζ_1, ζ_2,..., ζ_i liées respectivement à celles-là par les formules

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{\psi(\rho_1)}} = d\zeta_1, \quad \frac{d\rho_2}{\sqrt{\psi(\rho_2)}} = d\zeta_2, \ldots, \quad \frac{d\rho_i}{\sqrt{\psi(\rho_i)}} = d\zeta_i,$$

en vertu desquelles on peut regarder ζ_1 comme une fonction de ρ_1, ou ρ_1 comme une fonction de ζ_1, à volonté, et de même ρ_2 et ζ_2 comme des fonctions l'une de l'autre, etc. L'équation en Θ sera alors

$$(20) \qquad \frac{1}{\varphi'(\rho_1)}\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_1}\right)^2 + \frac{1}{\varphi'(\rho_2)}\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\varphi'(\rho_i)}\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h),$$

et la démonstration du théorème énoncé au n° **5** en découlera immédiatement.

En effet, on a vu dans ce numéro que

$$\varphi(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_i).$$

En effectuant le produit, $\varphi(\rho)$ est donc un polynôme de degré i, et le coefficient de ρ^i, dans ce polynôme, est égal à l'unité. On a donc par les propriétés connues des fractions rationnelles :

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{1}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi'(\rho_i)} = 0,\\
\frac{\rho_1}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i}{\varphi'(\rho_i)} = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\rho_1^{i-2}}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{i-2}}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-2}}{\varphi'(\rho_i)} = 0,\\
\frac{\rho_1^{i-1}}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{i-1}}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-1}}{\varphi'(\rho_i)} = 1.
\end{gathered}$$

Il s'ensuit que, dans l'hypothèse de

$$\mathrm{U} = \frac{f_1(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{f_2(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{f_i(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)},$$

qui est celle de notre théorème, on satisfera à l'équation (20) en prenant

$$\begin{gathered}
\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_1}\right)^2 = \alpha_1 + \alpha_2\rho_1 + \alpha_3\rho_1^2 + \ldots + \alpha_{i-1}\rho_1^{i-2} + 2h\rho_1^{i-1} + 2f_1(\rho_1),\\
\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_2}\right)^2 = \alpha_1 + \alpha_2\rho_2 + \alpha_3\rho_2^2 + \ldots + \alpha_{i-1}\rho_2^{i-2} + 2h\rho_2^{i-1} + 2f_2(\rho_2),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_i}\right)^2 = \alpha_1 + \alpha_2\rho_i + \alpha_3\rho_i^2 + \ldots + \alpha_{i-1}\rho_i^{i-2} + 2h\rho_i^{i-1} + 2f_i(\rho_i),
\end{gathered}$$

quelles que soient les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$. De là résulte pour Θ une valeur convenable et propre à fournir, d'après la règle de M. Jacobi, les intégrales du système des équations différentielles (3). Notre théorème est donc démontré.

En faisant, pour abréger,

$$\alpha_1 + \alpha_2\rho + \alpha_3\rho^2 + \ldots + \alpha_{i-1}\rho^{i-2} + 2h\rho^{i-1} = \varpi(\rho),$$

puis

$$\begin{aligned}
\varpi(\rho_1) + 2f_1(\rho_1) &= F_1(\rho_1),\\
\varpi(\rho_2) + 2f_2(\rho_2) &= F_2(\rho_2),\\
&\dots\dots\dots\\
\varpi(\rho_i) + 2f_i(\rho_i) &= F_i(\rho_i),
\end{aligned}$$

et rétablissant $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ au lieu de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_i$, on voit que la valeur de Θ, fournie par notre analyse, peut s'écrire

$$\Theta = \int d\rho_1 \sqrt{\frac{F_1(\rho_1)}{\psi(\rho_1)}} + \int d\rho_2 \sqrt{\frac{F_2(\rho_2)}{\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int d\rho_i \sqrt{\frac{F_i(\rho_i)}{\psi(\rho_i)}}.$$

Les intégrales des équations (3), qui en résultent par les formules (5), sont

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \int \frac{d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int \frac{d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = 2\beta_1,\\
&\int \frac{\rho_1 d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \int \frac{\rho_2 d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int \frac{\rho_i d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = 2\beta_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\int \frac{\rho_1^{i-2} d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \int \frac{\rho_2^{i-2} d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-2} d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = 2\beta_{i-1},\\
&\int \frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \int \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = t + \varepsilon.
\end{aligned}$$

11. On sera peut-être curieux de connaître aussi la forme que prennent en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ les équations intermédiaires (6) du n° **5**, savoir :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_2}, \ldots, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_i}.$$

On y parviendra aisément, et l'on obtiendra un résultat simple si l'on se rappelle les formules (16) et (17) du n° **9**, qui, dans notre hypothèse actuelle de $q_1 = q_2 = \ldots q_i = 1$, se réduisent respectivement à

$$(21) \qquad \left(\frac{d\rho_\mu}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\right)^2 = \frac{1}{P_\mu}$$

et

$$(22) \qquad \frac{d\rho_\mu}{dx_1}\frac{d\rho_\nu}{dx_1}+\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\frac{d\rho_\nu}{dx_2}+\ldots+\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\frac{d\rho_\nu}{dx_i}=0,$$

ν étant différent de μ. Nous n'aurons pas besoin des formules conjuguées à celles-là :

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_1}\right)^2+\frac{1}{p_2}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_i}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_i}\right)^2=1,$$

$$\frac{1}{p_1}\frac{dx_\mu}{d\rho_1}\frac{dx_\nu}{d\rho_1}+\frac{1}{p_2}\frac{dx_\mu}{d\rho_2}\frac{dx_\nu}{d\rho_2}+\ldots+\frac{1}{p_i}\frac{dx_\mu}{d\rho_i}\frac{dx_\nu}{d\rho_i}=0,$$

qui se déduisent de même des équations (18) et (19).

On a

$$\frac{d\rho_1}{dt}=\frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{d\rho_1}{dx_i}\frac{dx_i}{dt}.$$

Donc

$$\frac{d\rho_1}{dt}=\frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\Theta}{dx_1}+\frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{d\Theta}{dx_2}+\ldots+\frac{d\rho_1}{dx_i}\frac{d\Theta}{dx_i};$$

mais

$$\frac{d\Theta}{dx_1}=\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_1}+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_1}+\ldots+\frac{d\Theta}{d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dx_1},$$

$$\frac{d\Theta}{dx_2}=\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_2}+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_2}+\ldots+\frac{d\Theta}{d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dx_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\Theta}{dx_i}=\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_i}+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_i}+\ldots+\frac{d\Theta}{d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dx_i}.$$

En substituant ces valeurs dans celle de $\frac{d\rho_1}{dt}$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_1}{dt}=&\frac{d\Theta}{d\rho_1}\left[\left(\frac{d\rho_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\rho_1}{dx_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{d\rho_1}{dx_i}\right)^2\right]\\&+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\left(\frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_2}{dx_1}+\frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{d\rho_2}{dx_2}+\ldots+\frac{d\rho_1}{dx_i}\frac{d\rho_2}{dx_i}\right)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{d\Theta}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_i}{dx_1}+\frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{d\rho_i}{dx_2}+\ldots+\frac{d\rho_1}{dx_i}\frac{d\rho_i}{dx_i}\right).\end{aligned}$$

Le coefficient de $\frac{d\Theta}{d\rho_1}$ est égal à $\frac{1}{p_1}$ en vertu de la formule (21), et les autres sont nuls par la formule (22); par suite,

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{1}{p_1}\frac{d\Theta}{d\rho_1}.$$

Les valeurs de $\frac{d\rho_2}{dt}, \ldots, \frac{d\rho_i}{dt}$ se déduisant de celle de $\frac{d\rho_1}{dt}$ par de simples changements d'indices, nous pouvons en conclure que le système des équations intermédiaires (6) se transforme ainsi :

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{1}{p_1}\frac{d\Theta}{d\rho_1}, \\ \frac{d\rho_2}{dt} &= \frac{1}{p_2}\frac{d\Theta}{d\rho_2}, \\ &\vdots \\ \frac{d\rho_i}{dt} &= \frac{1}{p_i}\frac{d\Theta}{d\rho_i}. \end{aligned}\right.$$

Cette transformation est générale. Quand on prend en particulier, comme ci-dessus,

$$\Theta = \int d\rho_1 \sqrt{\frac{F_1(\rho_1)}{\psi(\rho_1)}} + \int d\rho_2 \sqrt{\frac{F_2(\rho_2)}{\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int d\rho_i \sqrt{\frac{F_i(\rho_i)}{\psi(\rho_i)}},$$

elle donne

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{1}{p_1}\sqrt{\frac{F_1(\rho_1)}{\psi(\rho_1)}}, \\ \frac{d\rho_2}{dt} &= \frac{1}{p_2}\sqrt{\frac{F_2(\rho_2)}{\psi(\rho_2)}}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\rho_i}{dt} &= \frac{1}{p_i}\sqrt{\frac{F_i(\rho_i)}{\psi(\rho_i)}}, \end{aligned}$$

ou bien, à cause des valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_i$ données au n° **8**,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}}{\varphi'(\rho_1)}, \\ \frac{d\rho_2}{dt} &= \frac{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}}{\varphi'(\rho_2)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\rho_i}{dt} &= \frac{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}}{\varphi'(\rho_i)}. \end{aligned}$$

On trouverait les mêmes résultats en différentiant les équations intégrales écrites à la fin du numéro précédent, puis résolvant par rapport à

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}}, \quad \frac{d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}}, \ldots, \quad \frac{d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}},$$

considérées comme de simples inconnues, les équations

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \frac{d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \frac{d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = 0,$$

$$\frac{\rho_1 d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \frac{\rho_2 d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \frac{\rho_i d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\rho_1^{i-2} d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \frac{\rho_2^{i-2} d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-2} d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = 0,$$

$$\frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = dt,$$

que cette différentiation produit. La résolution des équations du premier degré dont nous parlons s'effectue avec facilité, par un procédé connu, dû à Lagrange, et l'on retombe sur les formules ci-dessus, en se rappelant que

$$\varphi(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_i).$$

12. La considération du cas particulier où l'on prend

$$f_1(\rho_1) = 0, \quad f_2(\rho_2) = 0, \ldots, \quad f_i(\rho_i) = 0,$$

c'est-à-dire

$$U = 0,$$

conduit aux intégrales sous forme algébrique des équations différentielles que M. Jacobi nomme *abéliennes*. Dans ce cas, les équations (3) se réduisant à

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0, \ldots, \quad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0,$$

s'intègrent immédiatement, et donnent

$$x_1 = b_1 t + c_1, \quad x_2 = b_2 t + c_2, \ldots \quad x_i = b_i t + c_i,$$

$b_1, b_2, \ldots, b_i, c_1, c_2, \ldots, c_i$ étant les constantes arbitraires. On en déduira i équations finies entre $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ et t, en remplaçant x_1, $x_2, \ldots, x_i$ par leurs valeurs en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ tirées des formules du n° 6. Or ces équations, intégrales du système (3), ne peuvent manquer de revenir au fond aux intégrales qu'on tire des formules du n° **10**, en y faisant, d'après l'hypothèse actuelle,

$$f_1(\rho_1) = 0, \quad f_2(\rho_2) = 0, \ldots, \quad f_i(\rho_i) = 0,$$

et, par conséquent,

$$F_1(\rho) = F_2(\rho) = \ldots = F_i(\rho) = \varpi(\rho).$$

La forme, il est vrai, sera très-différente; mais la relation établie entre $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ et t devra rester la même. En posant, pour abréger,

$$\Delta(\rho) = \sqrt{\varpi(\rho)\psi(\rho)},$$

les formules citées donnent

$$\int \frac{d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 2\beta_1,$$

$$\int \frac{\rho_1\, d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{\rho_2\, d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{\rho_i\, d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 2\beta_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{\rho_1^{i-2}\, d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{\rho_2^{i-2}\, d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-2}\, d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 2\beta_{i-1},$$

$$\int \frac{\rho_1^{i-1}\, d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{\rho_2^{i-1}\, d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1}\, d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = t + \varepsilon.$$

Ces intégrales compliquées doivent revenir, nous le répétons, aux intégrales de forme plus simple

$$x_1 = b_1 t + c_1, \quad x_2 = b_2 t + c_2, \ldots, \quad x_i = b_i t + c_i,$$

en exprimant, bien entendu, les constantes arbitraires $b_1, b_2, \ldots, b_i$, $c_1, c_2, \ldots, c_i$ au moyen de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \varepsilon, h$. Et si l'on met de côté l'équation

$$\int \frac{\rho_1^{i-1}\, d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{\rho_2^{i-1}\, d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1}\, d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = t + \varepsilon,$$

la seule de son espece où t figure, les $i-1$ équations qui précèdent celles-là, et qui, par la différentiation, produisent ces équations abéliennes

$$\frac{d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\frac{\rho_1 d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{\rho_2 d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\rho_1^{i-2} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{i-2} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-2} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

devront revenir de même aux $i-1$ équations en $x_1, x_2, \ldots, x_i$ que l'on obtient par l'élimination de t. Ces équations entre $x_1, x_2, \ldots, x_i$ sont donc les intégrales du système des équations abéliennes que je viens d'écrire; elles renferment $i-1$ constantes arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}$ qui n'entrent plus dans les équations différentielles : je ne parle pas de la constante ε qui, étant jointe à t, a dû disparaître avec cette variable. Quant à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, h$, on les regardera ici comme des quantités données. Et l'on doit remarquer que le polynôme $\varpi(\rho)\psi(\rho)$, contenu sous un radical carré dans $\Delta(\rho)$, est un polynôme de degré $2i-1$ absolument quelconque; en effet, on a

$$\psi(\rho) = 4(\rho - a_1)(\rho - a_2)\ldots(\rho - a_i),$$
$$\varpi(\rho) = \alpha_1 + \alpha_2\rho + \ldots + \alpha_{i-1}\rho^{i-2} + 2h\rho^{i-1};$$

et rien n'empêche de donner à $a_1, a_2, \ldots, a_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, h$ des valeurs quelconques, même imaginaires.

Les équations entre $x_1, x_2, \ldots, x_i$, qui servent d'intégrales à nos équations abéliennes, sont linéaires par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_i$. Les formules du n° 6 donnent d'ailleurs pour les carrés $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_i^2$ des expressions rationnelles en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ entières et symétriques relativement à ces nouvelles variables, et même exprimables linéairement par leur somme $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_i$, la somme de leurs produits deux à deux, celle de leurs produits trois à trois, etc. Cela étant, élevons au carré les valeurs de $x_2, x_3, \ldots, x_i$ en x_1, lesquelles sont de la forme $Ax_1 + B$, puis éliminons entre les équations résultantes la première puissance de x_1, en laissant subsister les termes qui contiennent x_1^2.

Nous trouverons ainsi $i-2$ équations du premier degré en x_1^2, $x_2^2, \ldots$, x_i^2, lesquelles, lors de l'introduction des variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, resteront du premier degré par rapport à la somme de ces nouvelles variables, et aux sommes de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc. Pour compléter le nombre $i-1$, on ajoutera à ces $i-2$ équations une des équations primitives, $x_2 = Ax_1 + B$ par exemple, ou plutôt on en tirera l'équation

$$(x_2^2 - A^2 x_1^2 - B^2)^2 = 4A^2B^2x_1^2,$$

qui est du second degré par rapport à x_1^2, x_2^2, et pourra être réduite à ne contenir, relativement à $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, qu'une fonction entière du second degré de deux des sommes symétriques citées plus haut.

Cette forme des intégrales des équations différentielles abéliennes a été récemment signalée par M. Jacobi, ainsi qu'on peut le voir dans le Journal de M. Crelle, ou au tome XI de notre *Journal de Mathématiques*, page 342. L'analyse précédente y mène naturellement. Mais il est juste d'ajouter que c'est encore M. Jacobi qui a indiqué, dès 1839, la transformation généralisée des coordonnées ordinaires en coordonnées elliptiques, c'est-à-dire le passage des variables x_1, $x_2, \ldots, x_i$ aux variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, dans des équations différentielles, en nombre quelconque, du genre de celles que la dynamique fournit pour le mouvement d'un point matériel abandonné à la seule impulsion d'une vitesse initiale, comme l'ayant enfin conduit, sans le secours du théorème même d'Abel, aux intégrales sous forme algébrique des équations abéliennes [*]. Les travaux divers qui ont paru depuis sur ce sujet ne doivent pas faire oublier la source primitive et féconde de la découverte.

Il nous reste à montrer comment on lie entre elles les constantes

---

[*] *Voyez* le Journal de M. Crelle, tome XIX, ou notre *Journal de Mathématiques*, tome VI, page 267. Le Mémoire très-court, mais plein de choses, auquel nous renvoyons traite des *différents usages d'une transformation analytique remarquable;* c'est celle de $x_1, x_2, \ldots, x_i$ en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$. Il a été lu à l'Académie de Berlin, le 18 avril 1839. Depuis cette époque, M. Jacobi lui-même et d'autres géomètres sont revenus plusieurs fois, surtout dans le Journal de M. Crelle, sur la question des équations différentielles abéliennes.

arbitraires qui entrent dans les intégrales algébriques des équations abéliennes et celles qui sont contenues dans leurs intégrales transcendantes. Pour plus de symétrie, nous conserverons la variable t, ou, si l'on veut, nous l'introduirons dans le système abélien, en rétablissant l'équation

$$\int \frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = t + \varepsilon,$$

que nous avions d'abord mise de côté. Nos équations différentielles seront ainsi :

$$\frac{d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\frac{\rho_1 d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{\rho_2 d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\rho_1^{i-2} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{i-2} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-2} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = dt,$$

et l'on en déduira, par un procédé de Lagrange, déjà rappelé à la fin du n° **11**,

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\Delta(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)}, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{\Delta(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)}, \ldots, \quad \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{\Delta(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}.$$

Désignons par $k_1, k_2, \ldots, k_i$ les valeurs arbitraires de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ pour $t = 0$. Les valeurs de

$$\frac{d\rho_1}{dt}, \quad \frac{d\rho_2}{dt}, \ldots, \quad \frac{d\rho_i}{dt},$$

pour $t = 0$ seront de suite déterminées par ce qui précède en fonction de $k_1, k_2, \ldots, k_i$, et l'on pourra aussi former aisément celles de

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_i, \quad \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \quad \frac{dx_i}{dt}.$$

Cela posé, nous aurons, d'une part, les intégrales transcendantes

$$\int_{k_1}^{\rho_1} \frac{d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int_{k_2}^{\rho_2} \frac{d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int_{k_i}^{\rho_i} \frac{d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\int_{k_1}^{\rho_1} \frac{\rho_1 d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int_{k_2}^{\rho_2} \frac{\rho_2 d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int_{k_i}^{\rho_i} \frac{\rho_i d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{k_1}^{\rho_1} \frac{\rho_1^{i-2} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int_{k_2}^{\rho_2} \frac{\rho_2^{i-2} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int_{k_i}^{\rho_i} \frac{\rho_i^{i-2} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\int_{k_1}^{\rho_1} \frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int_{k_2}^{\rho_2} \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int_{k_i}^{\rho_i} \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = t,$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_i$ sont les constantes arbitraires de l'intégration, et, d'autre part, les intégrales algébriques

$$x_1 = b_1 t + c_1, \quad x_2 = b_2 t + c_2, \ldots, \quad x_i = b_i t + c_i,$$

dont les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_i, b_1, b_2, \ldots, b_i$ s'expriment par $k_1, k_2, \ldots, k_i$, puisqu'elles représentent les valeurs de

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_i, \quad \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt}, \ldots \quad \frac{dx_i}{dt},$$

pour $t = 0$.

Nous nous en tiendrons là, pour le moment, sur la question des équations abéliennes, sauf à y revenir peut-être une autre fois. Nous ne parlerons pas même des conséquences que peut offrir l'équation

$$\int \frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = t + \varepsilon,$$

dont le second membre s'exprime algébriquement, ni de celles qu'on peut obtenir en considérant l'intégrale

$$\int \left[\frac{\chi(\rho_1)}{\Delta(\rho_1)} d\rho_1 + \frac{\chi(\rho_2)}{\Delta(\rho_2)} d\rho_2 + \ldots + \frac{\chi(\rho_i)}{\Delta(\rho_i)} d\rho_i\right],$$

où $\chi(\rho)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de ρ. A cause de

$$\frac{d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} = \frac{dt}{\varphi'(\rho_1)}, \quad \frac{d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} = \frac{dt}{\varphi'(\rho_2)}, \ldots, \quad \frac{d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = \frac{dt}{\varphi'(\rho_i)},$$

cette intégrale devient

$$\int \left[\frac{\chi(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{\chi(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{\chi(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}\right] dt;$$

le coefficient de dt, sous le signe $\int$, est une fonction rationnelle et symétrique de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, qui deviendra une fonction rationnelle de $x_1, x_2, \ldots, x_i$, et enfin de t, puisque $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ sont les diverses racines d'une même équation à coefficients rationnels en $x_1, x_2, \ldots, x_i$, et que d'ailleurs $x_1, x_2, \ldots, x_i$ sont des fonctions linéaires de t. Notre intégrale ne dépendra donc que de quantités algébriques et logarithmiques; ce qui devait être, en effet, d'après le théorème d'Abel. Mais n'insistons pas ici là-dessus. Notre but était de donner la démonstration du théorème du n° **5**, qui nous paraît nouveau et important. Ce but est rempli. Nous devions naturellement dire ensuite quelques mots des fonctions abéliennes; mais il faut mettre fin à des détails qui, en se prolongeant, nous écarteraient trop de notre sujet.

13. Le théorème du n° **5** peut, au reste, se généraliser de la manière suivante. Il s'agit, on se le rappelle, de trouver une fonction Θ vérifiant l'équation aux différences partielles

$$(4) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h),$$

et contenant, outre la constante h, $i - 1$ constantes arbitraires α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ distinctes de celle qu'on peut toujours introduire dans Θ par simple addition. Or voici un cas très-étendu où l'on obtiendra cette fonction Θ.

Concevons qu'on ait exprimé les variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots, x_i$ de l'équation (4) par d'autres variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, en nombre égal, qui les remplacent, et que de cette manière l'équation (4) ait été transformée en une autre équation de la forme

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_i$ étant des fonctions de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$. Cela suppose déjà que les nouvelles variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ ne sont pas prises au hasard, sans quoi le second membre contiendrait, outre les carrés

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2,\quad \left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2,\ldots,\quad \left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2$$

des dérivées de Θ, les doubles produits

$$\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2},\quad \frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_i},\ldots.$$

Mais nous admettrons de plus qu'en désignant par

$$\Pi_1^1(\rho),\quad \Pi_2^1(\rho),\quad \Pi_1^2(\rho),\ldots,\quad \Pi_i^i(\rho)$$

de certaines fonctions de ρ, on ait

$$\frac{1}{p_1}\Pi_1^1(\rho_1)+\frac{1}{p_2}\Pi_2^1(\rho_2)+\ldots+\frac{1}{p_i}\Pi_i^1(\rho_i)=0,$$

$$\frac{1}{p_1}\Pi_1^2(\rho_1)+\frac{1}{p_2}\Pi_2^2(\rho_2)+\ldots+\frac{1}{p_i}\Pi_i^2(\rho_i)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{p_1}\Pi_1^{i-1}(\rho_1)+\frac{1}{p_2}\Pi_2^{i-1}(\rho_2)+\ldots+\frac{1}{p_i}\Pi_i^{i-1}(\rho_i)=0,$$

et

$$\frac{1}{p_1}\Pi_1^i(\rho_1)+\frac{1}{p_2}\Pi_2^i(\rho_2)+\ldots+\frac{1}{p_i}\Pi_i^i(\rho_i)=1.$$

Cela étant, si la valeur de U peut se mettre sous la forme

$$U=\frac{f_1(\rho_1)}{p_1}+\frac{f_2(\rho_2)}{p_2}+\ldots+\frac{f_i(\rho_i)}{p_i},$$

quelles que soient d'ailleurs les fonctions $f_1(\rho_1), f_2(\rho)_2,\ldots, f_i(\rho_i)$, dont chacune ne renferme qu'une seule variable, on aura, pour remplir les conditions demandées, la valeur de Θ qui se déduit des équations suivantes:

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2=\alpha_1\Pi_1^1(\rho_1)+\ldots+\alpha_{i-1}\Pi_1^{i-1}(\rho_1)+2h\Pi_1^i(\rho_1)+2f_1(\rho_1),$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2=\alpha_1\Pi_2^1(\rho_2)+\ldots+\alpha_{i-1}\Pi_2^{i-1}(\rho_2)+2h\Pi_2^i(\rho_2)+2f_2(\rho_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2=\alpha_1\Pi_i^1(\rho_i)+\ldots+\alpha_{i-1}\Pi_i^{i-1}(\rho_i)+2h\Pi_i^i(\rho_i)+2f_i(\rho_i).$$

La démonstration de ce théorème n'a pas besoin de développements. On vérifiera aisément qu'avec la valeur de Θ indiquée les conditions auxquelles on devait satisfaire sont remplies. Mais il reste à trouver les systèmes de variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ qui jouissent des propriétés que nous supposons ici; et la difficulté de cette recherche donne beaucoup de prix au théorème particulier du n° **5**, qui fait connaître un de ces systèmes.

14. En disant enfin quelques mots du mouvement de points m, m', m'', etc., unis entre eux par des liaisons exprimables à l'aide d'équations entre les coordonnées, nous nous bornerons au cas où le principe des forces vives a lieu.

Exprimons d'abord, comme le fait Lagrange dans la *Mécanique analytique*, les coordonnées x, y, z, x', y', etc., de tous les points m, m', etc., par des variables indépendantes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, de telle manière que les équations de condition données en x, y, z, x', etc., soient satisfaites d'elles-mêmes, le nombre des variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ étant naturellement égal au nombre des coordonnées diminué du nombre des équations de condition. Et supposons ces variables tellement choisies, que la valeur de la force vive soit de la forme

$$p_1\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + p_2\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + p_i\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2,$$

c'est-à-dire ne contienne que les carrés $d\rho_1^2, d\rho_2^2, \ldots, d\rho_i^2$ des différentielles, affectés de coefficients quelconques $p_1, p_2, \ldots, p_i$, fonctions de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, et non les rectangles $d\rho_1\, d\rho_2$, $d\rho_1\, d\rho_3$, etc. Soit U la fonction des forces. Les équations du mouvement seront, cette fois,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d.p_1\frac{d\rho_1}{dt}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dp_1}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{dp_i}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 + \frac{dU}{d\rho_1},\\
\frac{d.p_2\frac{d\rho_2}{dt}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dp_1}{d\rho_2}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{dp_i}{d\rho_2}\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 + \frac{dU}{d\rho_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d.p_i\frac{d\rho_i}{dt}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dp_1}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{dp_i}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 + \frac{dU}{d\rho_i};
\end{aligned}\right.$$

mais leurs intégrales continueront à s'exprimer par

$$(25)\qquad \frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2,\ldots,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_{i-1}} = \beta_{i-1},\quad \frac{d\Theta}{dh} = t + \varepsilon.$$

Θ étant encore une solution complète d'une équation aux différences partielles, savoir de l'équation

$$(26)\qquad \frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h),$$

qui est toute semblable à l'équation transformée du numéro précédent, en sorte que la solution dont on a besoin s'obtiendra dans les circonstances déjà indiquées, c'est-à-dire lorsqu'on pourra vérifier les équations

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{p_1}\Pi_1^1(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2^1(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i^1(\rho_i) = 0,\\
\frac{1}{p_1}\Pi_1^2(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2^2(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i^2(\rho_i) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{p_1}\Pi_1^{i-1}(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2^{i-1}(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i^{i-1}(\rho_i) = 0,\\
\frac{1}{p_1}\Pi_1^{i}(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2^{i}(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i^{i}(\rho_i) = 1,
\end{array}\right.$$

et qu'en outre on aura

$$(28)\qquad \mathrm{U} = \frac{f_1(\rho_1)}{p_1} + \frac{f_2(\rho_2)}{p_2} + \ldots + \frac{f_i(\rho_i)}{p_i}.$$

Dans cette hypothèse, on pourra toujours déterminer Θ par les formules

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 = \alpha_1\Pi_1^1(\rho_1) + \ldots + \alpha_{i-1}\Pi_1^{i-1}(\rho_1) + 2h\Pi_1^i(\rho_1) + 2f_1(\rho_1),\\
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 = \alpha_1\Pi_2^1(\rho_2) + \ldots + \alpha_{i-1}\Pi_2^{i-1}(\rho_2) + 2h\Pi_2^i(\rho_2) + 2f_2(\rho_2).\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = \alpha_1\Pi_i^1(\rho_i) + \ldots + \alpha_{i-1}\Pi_i^{i-1}(\rho_i) + 2h\Pi_i^i(\rho_i) + 2f_i(\rho_i).
\end{array}\right.$$

Quant aux intégrales intermédiaires, elles sont

$$(30)\qquad \frac{d\rho_1}{dt}=\frac{1}{p_1}\frac{d\Theta}{d\rho_1},\quad \frac{d\rho_2}{dt}=\frac{1}{p_2}\frac{d\Theta}{d\rho_2},\ldots,\quad \frac{d\rho_i}{dt}=\frac{1}{p_i}\frac{d\Theta}{d\rho_i};$$

et en les combinant avec l'équation aux différences partielles, on en déduit, en particulier, l'intégrale suivante :

$$(31)\qquad p_1\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2+p_2\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2+\ldots+p_i\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2=2(\mathrm{U}+h),$$

qui répond au principe des forces vives, et qu'il est d'ailleurs aisé d'obtenir directement. Ce théorème subsiste en analyse pure, quelles que soient les fonctions $p_1, p_2,\ldots, p_i$ de $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_i$, et lors même que l'on donnerait à ces fonctions des valeurs incompatibles avec la nature de notre problème de dynamique. Il est d'ailleurs analogue à celui du n° **5**, et se démontre par des calculs du même genre [*]. En différentiant les équations

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2}=\beta_2,\ldots,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_{i-1}}=\beta_{i-1},\quad \frac{d\Theta}{dh}=t+\varepsilon,$$

par rapport à t, dont $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_i$ sont des fonctions en vertu de ces équations mêmes, on a un premier groupe d'équations, qui, comparé à celui qu'on tire de l'équation aux différences partielles

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2+\frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2=2(\mathrm{U}+h),$$

en la différentiant successivement par rapport aux constantes α_1, $\alpha_2,\ldots, \alpha_{i-1}$, h, donne d'abord les équations intermédiaires

$$p_1\frac{d\rho_1}{dt}=\frac{d\Theta}{d\rho_1},\quad p_2\frac{d\rho_2}{dt}=\frac{d\Theta}{d\rho_2},\ldots,\quad p_i\frac{d\rho_i}{dt}=\frac{d\Theta}{d\rho_i}.$$

Considérons une de celles-ci, la première par exemple. En la différentiant, nous aurons

$$\frac{d.p_1\dfrac{d\rho_1}{dt}}{dt}=\frac{d^2\Theta}{d\rho_1^2}\frac{d\rho_1}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\rho_1\,d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt}+\ldots+\frac{d^2\Theta}{d\rho_1\,d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dt}.$$

[*] Citons à cette occasion un Mémoire de M. J. Binet, inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

Mais en différentiant, par rapport à ρ_1, l'équation aux différences partielles

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h),$$

on trouve

$$\frac{1}{p_1}\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d^2\Theta}{d\rho_1^2} + \frac{1}{p_2}\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d^2\Theta}{d\rho_1\, d\rho_2} + \ldots + \frac{1}{p_i}\frac{d\Theta}{d\rho_i}\frac{d^2\Theta}{d\rho_1\, d\rho_i}$$

$$= \frac{1}{2p_1^2}\frac{dp_1}{d\rho_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{2p_2^2}\frac{dp_2}{d\rho_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2p_i^2}\frac{dp_i}{d\rho_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 + \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1};$$

d'où l'on conclut, en ayant égard aux équations intermédiaires,

$$\frac{d^2\Theta}{d\rho_1^2}\frac{d\rho_1}{dt} + \frac{d^2\Theta}{d\rho_1\, d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt} + \ldots + \frac{d^2\Theta}{d\rho_1\, d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{dp_1}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_2}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{dp_i}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1}.$$

Donc

$$\frac{d.p_1\frac{d\rho_1}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp_1}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{dp_i}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1}.$$

C'est la première des équations différentielles du second ordre (24), et l'on arriverait aux autres de la même manière : le théorème est donc démontré.

15. Considérons comme exemple le cas particulier très-simple où les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_i$ sont toutes égales entre elles, et où leur valeur commune p est de la forme

$$p = \mathrm{F}_1(\rho_1) + \mathrm{F}_2(\rho_2) + \ldots + \mathrm{F}_i(\rho_i).$$

Il faudra prendre alors

$$\mathrm{U} = \frac{f_1(\rho_1) + f_2(\rho_2) + \ldots + f_i(\rho_i)}{\mathrm{F}_1(\rho_1) + \mathrm{F}_2(\rho_2) + \ldots + \mathrm{F}_i(\rho_i)},$$

et en adoptant cette valeur de U, l'intégration s'effectuera facilement. En effet, on satisfera aux équations de condition (27) entre les fonctions Π en prenant d'abord

$$\Pi_1^i(\rho_1) = F_1(\rho_1), \quad \Pi_2^i(\rho_2) = F_2(\rho_2), \ldots, \quad \Pi_i^i(\rho_i) = F_i(\rho_i);$$

et en donnant aux autres fonctions Π des valeurs constantes, telles que l'unité positive pour

$$\Pi_1^1(\rho_1), \quad \Pi_2^2(\rho_2), \ldots, \quad \Pi_{i-1}^{i-1}(\rho_{i-1}),$$

l'unité négative pour

$$\Pi_2^1(\rho_2), \quad \Pi_3^2(\rho_3), \ldots, \quad \Pi_i^{i-1}(\rho_i),$$

et zéro pour celles qui restent. La fonction Θ, dont les intégrales dépendent, sera déterminée par les formules

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 &= \alpha_1 + 2hF_1(\rho_1) + 2f_1(\rho_1),\\
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 &= \alpha_2 - \alpha_1 + 2hF_2(\rho_2) + 2f_2(\rho_2),\\
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_3}\right)^2 &= \alpha_3 - \alpha_2 + 2hF_3(\rho_3) + 2f_3(\rho_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_{i-1}}\right)^2 &= \alpha_{i-1} - \alpha_{i-2} + 2hF_{i-1}(\rho_{i-1}) + 2f_{i-1}(\rho_{i-1}),\\
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 &= -\alpha_{i-1} + 2hF_i(\rho_i) + 2f_i(\rho_i);
\end{aligned}$$

je me dispenserai d'écrire les intégrales elles-mêmes.

16. Au reste, dans le cas particulier qui précède, et dans quelques autres encore, les équations différentielles proposées (24) peuvent s'intégrer d'une manière à la fois directe et simple par la méthode suivante [*]. En prenant, comme nous le faisons,

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_i = p,$$

[*] C'est celle que j'ai employée dans mon premier Mémoire sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer. (*Journal de Mathématiques*, tome XI.)

les équations (24) se réduisent à

$$\frac{d.p\frac{d\rho_1}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\rho_1}\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\rho_1},$$
$$\frac{d.p\frac{d\rho_2}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\rho_2}\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\rho_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d.p\frac{d\rho_i}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\rho_i}\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\rho_i}.$$

et, en ayant égard à l'intégrale connue

$$(31) \qquad p_1\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + p_2\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + p_i\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 = 2(U + h),$$

qui devient ici

$$p\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] = 2(U + h),$$

on met ces équations sous la forme

$$\frac{d.p\frac{d\rho_1}{dt}}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\rho_1}(U + h) + \frac{dU}{d\rho_1},$$
$$\frac{d.p\frac{d\rho_2}{dt}}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\rho_2}(U + h) + \frac{dU}{d\rho_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d.p\frac{d\rho_i}{dt}}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\rho_i}(U + h) + \frac{dU}{d\rho_i}.$$

Or, considérons l'une quelconque d'entre elles,

$$\frac{d.p\frac{d\rho_s}{dt}}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\rho_s}(U + h) + \frac{dU}{d\rho_s};$$

en la multipliant par $2pd\rho_s$, nous en déduirons

$$d.p^2\frac{d\rho_s^2}{dt^2} = 2\frac{d.p(U+h)}{d\rho_s}d\rho_s.$$

Si donc la dérivée

$$\frac{d.p(\mathrm{U}+h)}{d\rho_s}$$

se réduit à une simple fonction de la variable correspondante ρ_s, l'intégration s'effectuera de suite. Cela aura évidemment lieu dans notre hypothèse de

$$p = \mathrm{F}_1(\rho_1) + \mathrm{F}_2(\rho_2) + \ldots + \mathrm{F}_i(\rho_i),$$
$$\mathrm{U} = \frac{f_1(\rho_1) + f_2(\rho_2) + \ldots + f_i(\rho_i)}{\mathrm{F}_1(\rho_1) + \mathrm{F}_2(\rho_2) + \ldots + \mathrm{F}_i(\rho_i)};$$

et, en l'adoptant, on aura les intégrales suivantes :

$$p^2 \frac{d\rho_1^2}{dt^2} = 2f_1(\rho_1) + 2h\mathrm{F}_1(\rho_1) + \mathrm{C}_1,$$
$$p^2 \frac{d\rho_2^2}{dt^2} = 2f_2(\rho_2) + 2h\mathrm{F}_2(\rho_2) + \mathrm{C}_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p^2 \frac{d\rho_i^2}{dt^2} = 2f_i(\rho_i) + 2h\mathrm{F}_i(\rho_i) + \mathrm{C}_i,$$

où $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_i$ sont des constantes dont la somme doit être nulle à cause de

$$p\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] = 2(\mathrm{U} + h).$$

On satisfera à cette condition en prenant

$$\mathrm{C}_1 = \alpha_1, \quad \mathrm{C}_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ldots, \quad \mathrm{C}_{i-1} = \alpha_{i-1} - \alpha_{i-2}, \quad \mathrm{C}_i = -\alpha_{i-1},$$

et alors $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ désigneront des constantes tout à fait arbitraires.

En égalant entre elles les diverses valeurs de dt qui résultent de nos intégrales, nous aurons

$$dt = \frac{p\,d\rho_1}{\sqrt{2f_1(\rho_1) + 2h\mathrm{F}_1(\rho_1) + \mathrm{C}_1}}$$
$$= \frac{p\,d\rho_2}{\sqrt{2f_2(\rho_2) + 2h\mathrm{F}_2(\rho_2) + \mathrm{C}_2}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{p\,d\rho_i}{\sqrt{2f_i(\rho_i) + 2h\mathrm{F}_i(\rho_i) + \mathrm{C}_i}}.$$

De là on déduira d'abord des équations entre $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, où les variables seront séparées, et qui s'intégreront immédiatement, savoir :

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{2f_1(\rho_1)+2h\mathrm{F}_1(\rho_1)+\mathrm{C}_1}} = \frac{d\rho_2}{\sqrt{2f_2(\rho_2)+2h\mathrm{F}_2(\rho_2)+\mathrm{C}_2}}, \text{ etc.}$$

En mettant ensuite pour p sa valeur dans la formule

$$dt = \frac{p\,d\rho_1}{\sqrt{2f_1(\rho_1)+2h\mathrm{F}_1(\rho_1)+\mathrm{C}_1}}$$

et transformant le résultat de la substitution à l'aide des équations déjà obtenues, on trouvera facilement

$$\begin{aligned} dt = & \frac{\mathrm{F}_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{2f_1(\rho_1)+2h\mathrm{F}_1(\rho_1)+\mathrm{C}_1}} \\ & + \frac{\mathrm{F}_2(\rho_2)\,d\rho_2}{\sqrt{2f_2(\rho_2)+2h\mathrm{F}_2(\rho_2)+\mathrm{C}_2}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{\mathrm{F}_i(\rho_i)\,d\rho_i}{\sqrt{2f_i(\rho_i)+2h\mathrm{F}_i(\rho_i)+\mathrm{C}_i}}. \end{aligned}$$

Ici encore les variables sont séparées. Les intégrales completes qui résultent de ces calculs sont, du reste, les mêmes que donnent les formules du n° **14**.

17. Pour donner un second exemple de cette méthode directe, considérons le cas où $p_1, p_2, \ldots, p_i$ se partagent en deux groupes $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ et $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_i$, de quantités égales entre elles. Désignons par p la valeur commune des quantités composant le premier groupe, et par q celle des quantités composant le second groupe, en sorte que

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_\mu = p$$

et

$$p_{\mu+1} = p_{\mu+2} = \ldots = p_i = q.$$

Admettons, de plus, que les valeurs de

$$p, \quad p\mathrm{U}, \quad \frac{p}{q}$$

soient de la forme

$$p = F_1(\rho_1) + F_2(\rho_2) + \ldots + F_\mu(\rho_\mu),$$
$$pU = f_1(\rho_1) + f_2(\rho_2) + \ldots + f_\mu(\rho_\mu),$$
$$\frac{p}{q} = \psi_1(\rho_1) + \psi_2(\rho_2) + \ldots + \psi_\mu(\rho_\mu).$$

Je dis qu'on pourra, dans ce cas, intégrer les équations différentielles du second ordre (24).

D'abord les formules du n° **14** sont ici facilement applicables, et il est bien aisé de satisfaire aux équations de condition (27) sur lesquelles la méthode du numéro cité repose. Mais je ne m'arrêterai pas à écrire les valeurs des diverses fonctions Π, et laissant de côté les détails relatifs à ce premier procédé, je ne développerai que les calculs de la méthode d'intégration directe du n° **16**, en ayant soin pourtant de ramener les résultats à la forme même sous laquelle l'autre méthode les donnerait de suite. Cela suffira, en effet, pour rendre manifeste l'accord des deux méthodes.

Les valeurs que nous admettons pour $p_1, p_2, \ldots, p_i$ et U sont toutes indépendantes des dernières variables $\rho_{\mu+1}, \rho_{\mu+2}, \ldots, \rho_i$. D'ailleurs, $p_1, p_2, \ldots, p_i$ forment deux groupes distincts (p) et (q). Cela posé, il est aisé de voir que les équations différentielles (24) se partageront aussi en deux groupes. Pour tout indice s compris dans la série $1, 2, 3, \ldots, \mu$, on aura

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\, p\frac{d\rho_s}{dt}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dp}{d\rho_s}\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_\mu}{dt}\right)^2\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{dq}{d\rho_s}\left[\left(\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\rho_s}, \end{aligned}\right.$$

tandis qu'il viendra, pour les indices suivants :

$$(33)\qquad \frac{d.q\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt}}{dt} = 0, \quad \frac{d.q\frac{d\rho_{\mu+2}}{dt}}{dt} = 0, \ldots, \quad \frac{d.q\frac{d\rho_i}{dt}}{dt} = 0.$$

Ces dernières équations s'intègrent et donnent

$$(34)\qquad q\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt} = C_{\mu+1}, \quad q\frac{d\rho_{\mu+2}}{dt} = C_{\mu+2}, \ldots, \quad q\frac{d\rho_i}{dt} = C_i,$$

$C_{\mu+1}, C_{\mu+2}, \ldots, C_i$ étant des constantes arbitraires. En posant donc, pour abréger,

$$(35)\qquad C_{\mu+1}^2 + C_{\mu+2}^2 + \ldots + C_i^2 = C,$$

et se rappelant l'intégrale

$$(31)\qquad p_1\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + p_2\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + p_i\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 = 2(\mathrm{U}+h),$$

qui devient ici

$$p\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_\mu}{dt}\right)^2\right] + q\left[\left(\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] = 2(\mathrm{U}+h),$$

on en conclura à la fois

$$(36)\qquad \left(\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_{\mu+2}}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 = \frac{C}{q^2}$$

et

$$(37)\qquad \left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_\mu}{dt}\right)^2 = \frac{2(\mathrm{U}+h)}{p} - \frac{C}{pq}.$$

Portant donc ces valeurs dans l'équation (32), on aura

$$(38)\qquad \frac{d\,p\,\frac{d\rho_s}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\rho_s}\left(\frac{2(\mathrm{U}+h)}{p} - \frac{C}{pq}\right) + \frac{1}{2}\frac{dq}{d\rho_s}\frac{C}{q^2} + \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_s},$$

et en multipliant tout par $2\,p\,d\rho_s$, il viendra enfin

$$(39)\qquad d.\,p^2\frac{d\rho_s^2}{dt^2} = d\rho_s\frac{d}{d\rho_s}\left[2(\mathrm{U}+h)p - C\frac{p}{q}\right].$$

Jusqu'ici, nos calculs subsisteraient en prenant pour p, q et U des fonctions quelconques de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$. Mais si la composition de ces quantités, ou plutôt de la quantité unique

$$2(\mathrm{U}+h)p - C\frac{p}{q},$$

est telle, que le coefficient de $d\rho_s$ dans le second membre soit une fonction de la seule variable ρ_s, il est clair que l'on pourra effectuer de suite une intégration. Or cela arrive pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots \mu$.

de s, lorsqu'on prend, comme nous le faisons,

$$p = F_1(\rho_1) + F_2(\rho_2) + \ldots + F_\mu(\rho_\mu),$$

$$pU = f_1(\rho_1) + f_2(\rho_2) + \ldots + f_\mu(\rho_\mu),$$

$$\frac{q}{q} = \psi_1(\rho_1) + \psi_2(\rho_2) + \ldots + \psi_\mu(\rho_\mu).$$

On trouve en effet, alors,

$$d.p^2\frac{d\rho_s^2}{dt^2} = d\rho_s[2f'_s(\rho_s) + 2hF'_s(\rho_s) - C\psi'_s(\rho_s)],$$

et, par suite, on obtient, en intégrant et donnant successivement à l'indice s toutes les valeurs dont il est susceptible,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &p^2\frac{d\rho_1^2}{dt^2} = 2f_1(\rho_1) + 2hF_1(\rho_1) - C\psi_1(\rho_1) + C_1,\\ &p^2\frac{d\rho_2^2}{dt^2} = 2f_2(\rho_2) + 2hF_2(\rho_2) - C\psi_2(\rho_2) + C_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &p^2\frac{d\rho_\mu^2}{dt^2} = 2f_\mu(\rho_\mu) + 2hF_\mu(\rho_\mu) - C\psi_\mu(\rho_\mu) + C_\mu. \end{aligned}\right.$$

Les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_\mu$ ne sont pas entièrement arbitraires; car, en ajoutant ces dernières équations, et comparant le résultat à l'équation (37), il vient

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_\mu = 0.$$

On satisfera à cette équation de condition en prenant

$$C_1 = \alpha_1,\quad C_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ldots,\quad C_{\mu-1} = \alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu-2},\quad C_\mu = -\alpha_{\mu-1},$$

et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu-1}$ seront de véritables constantes arbitraires. J'adopterai désormais ces valeurs de $C_1, C_2, \ldots, C_\mu$, et, de plus, je ferai

$$C_{\mu+1} = \sqrt{\alpha_\mu},\quad C_{\mu+2} = \sqrt{\alpha_{\mu+1}}, \ldots,\quad C_i = \sqrt{\alpha_{i-1}},$$

et, par conséquent,

$$C = \alpha_\mu + \alpha_{\mu+1} + \ldots + \alpha_{i-1},$$

ce qui aura l'avantage de nous ramener aux constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, h$

du n° **14**. Les équations (34) deviendront ainsi

$$q\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt} = \sqrt{\alpha_\mu}, \quad q\frac{d\rho_{\mu+2}}{dt} = \sqrt{\alpha_{\mu+1}}, \ldots, \quad q\frac{d\rho_i}{dt} = \sqrt{\alpha_{i-1}}.$$

D'un autre côté, en posant, pour abréger,

$$2f_s(\rho_s) + 2h\,\mathrm{F}_s(\rho_s) - \mathrm{C}\psi_s(\rho_s) + \mathrm{C}_s = \Phi_s(\rho_s),$$

les équations (40) donneront

$$p\frac{d\rho_s}{dt} = \sqrt{\Phi_1(\rho_1)}, \quad p\frac{d\rho_2}{dt} = \sqrt{\Phi_2(\rho_2)}, \ldots, \quad p\frac{d\rho_\mu}{dt} = \sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}.$$

En égalant les diverses valeurs de dt que toutes ces équations fournissent, on a

$$dt = \frac{q\,d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}} = \frac{q\,d\rho_{\mu+2}}{\sqrt{\alpha_{\mu+1}}} = \ldots = \frac{q\,d\rho_i}{\sqrt{\alpha_{i-1}}}$$

et

$$dt = \frac{p\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} = \frac{p\,d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}} = \ldots = \frac{p\,d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}}.$$

On aura donc, entre $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ d'une part, et $\rho_{\mu+1}, \rho_{\mu+2}, \ldots, \rho_i$ d'autre part, des équations telles que

$$(41) \qquad \frac{d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} = \frac{d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}} = \ldots = \frac{d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}},$$

et

$$(42) \qquad \frac{d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}} = \frac{d\rho_{\mu+2}}{\sqrt{\alpha_{\mu+1}}} = \ldots = \frac{d\rho_i}{\sqrt{\alpha_{i-1}}},$$

lesquelles s'intégreront immédiatement, puisque les variables y sont séparées.

Pour lier le premier groupe au second, et aussi pour obtenir la valeur de t, on partira de

$$dt = \frac{p\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} = \frac{q\,d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}},$$

et, à cause des valeurs de p et $\frac{p}{q}$, on en conclura

$$\frac{d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}} = \frac{\psi_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{\psi_2(\rho_2)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \ldots + \frac{\psi_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}},$$

et

$$dt = \frac{F_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{F_2(\rho_2)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \ldots + \frac{F_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}};$$

d'où, en vertu des formules déjà obtenues,

$$(43)\qquad \frac{d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}} = \frac{\psi_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{\psi_2(\rho_2)\,d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}} + \ldots + \frac{\psi_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}},$$

et

$$(44)\qquad dt = \frac{F_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{F_2(\rho_2)\,d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}} + \ldots + \frac{F_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}},$$

équations où les variables sont séparées. Quant à $\rho_{\mu+2},\ldots,\rho_i$, ils s'expriment au moyen de $\rho_{\mu+1}$, en intégrant les formules (42), comme ρ_2, $\rho_3,\ldots,\rho_\mu$ au moyen de ρ_1, en intégrant les formules (41). Toutefois si l'on veut, on aura encore

$$\frac{d\rho_{\mu+2}}{\sqrt{\alpha_{\mu+1}}} = \frac{\psi_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{\psi_2(\rho_2)\,d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}} + \ldots + \frac{\psi_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\rho_i}{\sqrt{\alpha_{i-1}}} = \frac{\psi_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{\psi_2(\rho_2)\,d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}} + \ldots + \frac{\psi_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}}.$$

Je n'aurais pas du reste ajouté ces dernières équations, que le système

$$(42)\qquad \frac{d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}} = \frac{d\rho_{\mu+2}}{\sqrt{\alpha_{\mu+1}}} = \ldots = \frac{d\rho_i}{\sqrt{\alpha_{i-1}}}$$

remplace avec avantage, si elles ne se présentaient pas d'elles-mêmes, lorsqu'on exprime nos intégrales à l'aide des dérivées d'une certaine fonction Θ. En effet, toutes les intégrales qui résultent de la considération des équations à variables séparées que nous venons d'obtenir, peuvent s'écrire ainsi

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_{i-1}} = \beta_{i-1}, \quad \frac{d\Theta}{dh} = t + \varepsilon,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \varepsilon$ étant les constantes introduites par l'intégration, et Θ désignant une certaine fonction de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, h$, savoir :

$$\Theta = \int d\rho_1 \sqrt{\Phi_1(\rho_1)} + \int d\rho_2 \sqrt{\Phi_2(\rho_2)} + \ldots + \int d\rho_\mu \sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}$$
$$+ \rho_{\mu+1}\sqrt{\alpha_\mu} + \rho_{\mu+2}\sqrt{\alpha_{\mu+1}} + \ldots + \rho_i \sqrt{\alpha_{i-1}}.$$

C'est à ce même résultat que conduirait l'emploi des formules du n° **14**; car il est aisé de s'assurer que la valeur de Θ vérifie l'équation aux différences partielles (26).

Je pourrais encore ajouter d'autres exemples de nos deux méthodes; mais ce qui précède suffit, et je me réserve d'ailleurs d'y revenir s'il se présente plus tard quelque nouvelle application offrant un intérêt particulier.