JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Remarques sur quelques intégrales définies

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 249-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__249_0>

REMARQUES
SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES;

PAR M. OSSIAN BONNET.

On connaît le théorème suivant dû à l'illustre Abel et si utile dans la théorie des séries:

(1) $$a_1, \quad a_2, \quad a_3,\ldots, \quad a_n,\ldots,$$

représentant n nombres réels quelconques, et

(2) $$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3,\ldots, \quad \varepsilon_n,\ldots,$$

n autres nombres positifs et décroissants; si pour toutes les valeurs entières de p depuis 1 *jusqu'à n, on a*

$$\mathrm{A} < a_1 + a_2 + \ldots + a_p < \mathrm{B},$$

on aura aussi pour les mêmes valeurs de p,

$$\mathrm{A}\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_p\varepsilon_p < \mathrm{B}\varepsilon_1.$$

La démonstration de ce théorème ne reposant nullement sur ce que p et n sont finis, on peut supposer ces nombres infinis, deux termes consécutifs quelconques des suites (1) et (2) ayant alors généralement une différence infiniment petite; on obtient ainsi cet autre théorème très-facile à établir en toute rigueur:

THÉORÈME I. *Si l'intégrale définie*

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx,$$

dans laquelle $\varphi(x)$ *représente une fonction finie quelconque, reste* *constamment comprise entre A et B quand x varie de a à b l'intégrale*

$$\int_a^x f(x)\varphi(x)\,dx,$$

dans laquelle $f(x)$ est une fonction constamment positive et décroissante, reste comprise pour les mêmes valeurs de x entre

$$Af(a) \quad \text{et} \quad Bf(a).$$

Ce nouveau théorème, ou plutôt ce cas particulier du théorème d'Abel, a peut-être été remarqué, mais ce que l'on n'a pas suffisamment montré, je le crois du moins, c'est qu'il peut donner la clef d'un grand nombre de difficultés relatives aux intégrales définies dans lesquelles la limite supérieure est ∞.

Pour le faire voir, observons d'abord qu'on en déduit la conséquence suivante :

Théorème II. *Si une intégrale définie de la forme*

$$\int_a^\infty m^x f(x)\,dx,$$

et que j'appellerai $F(m)$, est finie et déterminée pour une certaine valeur m_1 de m, cette même intégrale sera finie et déterminée pour toute autre valeur m_2 moindre que m_1, et la différence $F(m_1) - F(m_2)$ sera infiniment petite avec $m_1 - m_2$; de manière que si l'on est parvenu à déterminer la valeur $F(m)$ de l'intégrale pour les valeurs de m inférieures à un nombre donné μ, pour avoir la valeur de cette intégrale correspondante à $m = \mu$, il suffira de prendre la limite vers laquelle tendra $F(m)$ quand m tendra vers μ; la seule condition exigée pour l'exactitude de cette méthode est que l'intégrale proposée soit finie et déterminée pour $m = \mu$.

Ce résultat s'établit de la même manière que le suivant dont il est le correspondant et qui est relatif aux séries :

Si une série

$$F(m) = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots + a_p m^p + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances entières et positives d'une lettre m, est *convergente pour une valeur m_1 de cette lettre, elle est aussi convergente pour une autre valeur m_2 plus petite que m_1, et la différence* $F(m_1) - F(m_2)$ *des sommes de la série est infiniment petite avec* $m_1 - m_2$. (*Voyez* le Mémoire d'Abel sur le développement du binôme.)

On déduit encore du théorème I d'autres conséquences qui peuvent être utiles dans différentes circonstances; mais on les trouvera sans peine, car elles sont analogues à celles qu'on déduit du théorème d'Abel et qui sont relatives aux séries. Bornons-nous à la précédente.

On conçoit immédiatement tout le parti qu'on peut retirer de cette propriété.

Ainsi, par exemple, on a

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^a}\right)^x \frac{\sin bx}{x}dx = \text{arc tang}\,\frac{b}{a},$$

et cela, pour toutes les valeurs positives de a ou pour toutes les valeurs moindres que 1 de $\frac{1}{e^a}$: faisons

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{e^a} = 1,$$

l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx,$$

étant finie et déterminée, comme on le voit, en la décomposant de la manière suivante,

$$\int_0^{\frac{\pi}{b}} \frac{\sin bx}{x}dx + \int_{\frac{\pi}{b}}^{\frac{2\pi}{b}} \frac{\sin bx}{x}dx + \ldots + \int_{(i-1)\frac{\pi}{b}}^{i\frac{\pi}{b}} \frac{\sin bx}{x}dx + \ldots$$

aura pour valeur la limite vers laquelle tend arc tang $\frac{b}{a}$ lorsque a s'approche de 0, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$.

On arrive ainsi très-simplement à un résultat qui n'est pas toujours démontré d'une manière suffisamment rigoureuse.

On peut de même établir tout à fait rigoureusement un grand nombre d'intégrales trouvées par Poisson dans le *Journal de l'École*

Polytechnique, par différentes méthodes qui ne sont pas à l'abri d'objections.

Ainsi, soit l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx,$$

Poisson la trouve facilement, pour toute valeur de a différente de zéro, égale à

$$Ce^{-2a},$$

C étant indépendant de a; puis, pour déterminer cette constante C, il suppose

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

égale à ce que devient Ce^{-2a} pour $a=0$; cela n'est pas évident. Mais si l'on observe que

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx=\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x^2}-a^2x^2}\,\frac{dx}{x^2}=\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{a^2}}\right)^{x^2}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}\,dx,$$

on voit aisément, d'après le théorème II, un peu généralisé, que la valeur de cette intégrale pour $a=0$ est égale à la limite vers laquelle tend sa valeur générale quand a décroît.

Il est inutile d'insister davantage sur ce premier point, on comprend tout le parti qu'il est possible de retirer du théorème II et des théorèmes analogues qu'on déduit du théorème I.

Je passe à une autre application du théorème I. Je vais m'en servir pour démontrer que la limite vers laquelle tend

$$\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,\varphi(x)\,dx,$$

à mesure que n croît indéfiniment, est $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$.

Soit ε un nombre déterminé qu'on pourra supposer aussi petit qu'on voudra; décomposons l'intégrale proposée comme il suit,

$$\int_0^\varepsilon \sin nx\,\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\int_\varepsilon^h \sin nx\,\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

et considérons d'abord la seconde intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{h} \sin nx \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

Il est permis de supposer que $\varphi(x)$ varie toujours dans le même sens de ε à h; car si cette condition n'était pas remplie, il serait possible évidemment de décomposer l'intégrale en une série d'autres pour lesquelles elle le serait; de plus, on peut admettre que $\varphi(x)$ soit constamment positif et aille en diminuant ou en restant constant de ε à h : c'est ce que l'on voit immédiatement en mettant l'intégrale sous la forme

$$\pm \left\{ \int_{\varepsilon}^{h} \frac{\sin nx}{x} [\mathrm{C} \pm \varphi(x)]\, dx \right\} \mp \mathrm{C} \int_{\varepsilon}^{h} \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

C représentant un nombre positif supérieur à la valeur absolue de $\varphi(x)$ pour toutes les valeurs de x de ε à h, et le signe supérieur ou le signe inférieur étant adopté selon que $\varphi(x)$ augmente ou diminue de ε à h.

Cela posé, comme l'on a, quelles que soient les limites,

$$-\frac{2}{n} < \int_{\alpha}^{\beta} \sin nx\, dx < \frac{2}{n},$$

et que $\varphi(x)$ est positif, constant ou décroissant de ε à h, et, par conséquent, $\frac{\varphi(x)}{x}$ positif et décroissant entre les mêmes limites, on aura aussi (théorème I),

$$-\frac{2}{n}\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} < \int_{\varepsilon}^{h} \sin nx \frac{\varphi(x)}{x}\, dx < \frac{2}{n}\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon};$$

cela prouve que la limite vers laquelle tend l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{h} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x)\, dx,$$

à mesure que n croît indéfiniment, est zéro.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{0}^{\varepsilon} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x)\, dx.$$

Nous pouvons d'abord y supposer ε assez petit pour que $\varphi(x)$ varie dans le même sens pour toutes les valeurs de x de 0 à ε; admettons, de plus, que $\varphi(x)$ aille en diminuant : dans le cas contraire, il faudrait prendre l'intégrale

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin nx}{x}[-\varphi(x)]\,dx;$$

l'intégrale

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin nx\,dx}{x} \quad \text{ou} \quad \int_0^{n\varepsilon} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

étant, quels que soient ε et n, comprise entre o et $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$, on aura (théorème I),

$$0 < \int_0^\varepsilon \frac{\sin nx}{x}[\varphi(x) - \varphi(\varepsilon)]\,dx < [\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)]\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

car $\varphi(x) - \varphi(\varepsilon)$ est positif et décroissant pour les valeurs de x de 0 à ε. Mais ε étant suffisamment petit, $\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)$ est aussi près que l'on veut de zéro, donc la limite vers laquelle tend

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin nx}{x}\varphi(x)\,dx,$$

à mesure que n augmente, est la même que celle de

$$\varphi(\varepsilon)\int_0^\varepsilon \frac{\sin nx}{x}\,dx \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}\varphi(0).$$

Ce résultat, réuni à celui que l'on a obtenu plus haut, montre que la limite de

$$\int_0^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

à mesure que n augmente, est $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$.

Nous avons supposé $\varphi(x)$ continu dans le voisinage de la valeur o de x; dans le cas contraire, le raisonnement précédent prouve que la limite en question est $\frac{\pi}{2}\varphi(\varepsilon)$, ε étant infiniment petit et positif

Ayant démontré que pour $n = \infty$,

$$(a) \qquad \int_0^h \frac{\sin nx}{x} \varphi(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \varphi(0),$$

on peut conclure aussi

$$(b) \qquad \int_0^h \frac{\sin nx}{\sin x} \varphi(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

h étant du moins inférieur à $\frac{\pi}{2}$, il suffit de remplacer dans la première relation $\varphi(x)$ par $\frac{x}{\sin x}\varphi(x)$.

Des égalités (a) et (b) on déduit simplement les deux formules que Fourier a données pour représenter une fonction quelconque continue ou discontinue d'une variable x, par une intégrale définie double ou par une double série ordonnée suivant les sinus et les cosinus des multiples entiers positifs de x; ce qui précède fournit donc une démonstration rigoureuse de ces deux formules.

Je terminerai en faisant une remarque relativement à un procédé quelquefois employé pour déterminer la valeur de certaines intégrales; je veux parler de la méthode qui consiste à multiplier l'intégrale proposée par ce qu'elle devient quand on y remplace la variable x par y, puis à transformer l'intégrale double ainsi obtenue en substituant aux variables x et y, considérées comme des coordonnées rectangulaires, des coordonnées polaires r et ω. Cette méthode est employée ordinairement pour obtenir la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx,$$

et l'on admet que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega.$$

Cette égalité n'est pas évidente, et on reconnaît même facilement qu'on ne peut être sûr de son exactitude que parce que l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

est finie et déterminée en vertu du décroissement seul de l'élément $e^{-x^2}dx$ à mesure que x augmente. En effet, la propriété qu'elle exprime est la correspondante de cette autre relative aux séries :

Si les deux séries

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots, \tag{1}$$

$$v'_0 + v'_1 + v'_2 + v'_3 + \ldots, \tag{2}$$

sont convergentes, la série

$$V_0 + V_1 + V_2 + \ldots,$$

dont le terme général est

$$V_m = v_0 v'_m + v_1 v'_{m-1} + v_2 v'_{m-2} + \ldots + v_m v'_0,$$

sera aussi convergente, et aura pour somme le produit des sommes des séries proposées.

Or cette seconde propriété s'établit aisément en supposant les séries (1), (2) convergentes indépendamment des signes, mais peut ne pas être vraie dans le cas contraire. Ajoutons, toutefois, qu'Abel a démontré que si la série

$$V_0 + V_1 + V_2 + \ldots$$

est convergente, elle ne peut avoir pour somme que le produit des sommes des séries (1) et (2), de manière que le procédé d'intégration cité plus haut sera encore applicable si l'intégrale du second membre est finie et déterminée.