JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BESGE

Sur un problème de géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 247-248.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__247_0>

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. BESGE.

De la Hire a résolu jadis ce problème, du reste élémentaire, de trouver le lieu décrit par le sommet d'un angle, constant en grandeur, et dont les côtés touchent continuellement une conique donnée. La courbe est géométrique et du quatrième degré. On peut semblablement se proposer de trouver sur un ellipsoïde le lieu décrit par le sommet d'un angle de grandeur constante, dont les côtés sont deux lignes géodésiques continuellement tangentes à une ligne de courbure donnée. Le problème se résout on ne peut plus facilement à l'aide de l'équation connue

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \beta$$

des lignes géodésiques. On peut supposer que le point (μ, ν) est le sommet mobile, et que l'équation que je viens d'écrire est celle d'un des côtés de l'angle. Alors il est clair que l'angle en question est exprimé, soit par $2i$, soit par $\pi - 2i$, et que, par suite, on a, suivant les cas, ou plutôt suivant la manière dont on veut que l'angle θ soit formé,

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta}}{\sqrt{\beta - \nu^2}},$$

ou

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \cot i = \frac{\sqrt{\beta - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \beta}}.$$

On pourrait prendre aussi

$$\operatorname{tang} \theta = \pm \operatorname{tang} 2i = \mp 2 \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta}\sqrt{\beta - \nu^2}}{\mu^2 + \nu^2 - 2\beta}.$$

Ici θ et β sont des constantes; μ et ν sont les coordonnées variables.

En faisant $\beta = b^2$, on aura le cas où les deux côtés de l'angle passent constamment par deux ombilics.

L'équation

$$\tang \theta = \mp 2 \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta}\sqrt{\beta - \nu^2}}{\mu^2 + \nu^2 - 2\beta}$$

est la plus commode qu'on puisse employer pour arriver à l'équation en coordonnées rectangulaires qui, avec celle de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

détermine le lieu cherché. Elle donne

$$(\mu^2 + \nu^2 - 2\beta)^2 \tang^2 \theta = 4\beta(\mu^2 + \nu^2) - 4\mu^2\nu^2 - 4\beta^2.$$

On n'a donc plus qu'à substituer pour $\mu^2 + \nu^2$ et $\mu^2\nu^2$ leurs valeurs, savoir,

$$\mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 - \rho^2, \quad \mu^2\nu^2 = \frac{b^2c^2x^2}{\rho^2},$$

ce qui conduit à une équation du quatrième degré comme dans le cas du plan.