JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Seconde note sur la convergence des séries du mouvement elliptique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 242-246.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__242_0>

SECONDE NOTE

SUR

LA CONVERGENCE DES SÉRIES DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE;

PAR M. PUISEUX,

Maître de Conférences à l'École Normale.

Dans un précédent article de ce Journal (Février 1849), je me suis proposé de démontrer que la limite des valeurs de l'excentricité, pour lesquelles les séries du mouvement elliptique des planètes restent convergentes, est un minimum dans le cas où l'anomalie moyenne est égale à 90 degrés. J'ignorais alors que cette question eût déjà été résolue par M. Cauchy dans un Mémoire sur le calcul des limites, qui fait partie des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (année 1841). M. Cauchy est encore revenu sur ce sujet dans une de ses dernières leçons à la Faculté des Sciences de Paris, et il a donné du théorème dont il s'agit une démonstration à laquelle j'étais parvenu; je vais essayer, avec l'autorisation de l'illustre professeur, de l'exposer ici.

En conservant les notations adoptées à la page 35 de ce volume, il s'agit de déterminer, entre les limites zéro et π, la valeur réelle de ζ qui rend minimum le plus petit module de x pour lequel on a à la fois les deux équations

$$y - x\sin y = \zeta, \tag{1}$$

$$1 - x\cos y = 0. \tag{2}$$

Nous établirons d'abord la proposition suivante :

Soit Z une fonction imaginaire de la variable réelle z; le module de Z croît ou décroît, lorsque z augmente, suivant que la partie réelle de l'expression $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$ *est positive ou négative.*

En effet, appelons S le logarithme du module de Z, de sorte que ce module augmente ou diminue en même temps que S; soit, de plus, P un angle réel; nous pourrons faire

$$Z = e^{S + P\sqrt{-1}}.$$

Différentions par rapport à z les deux membres de cette égalité; puis divisons-les par Z, il viendra

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = \frac{dS}{dz} + \frac{dP}{dz}\sqrt{-1}.$$

On voit par là que $\frac{dS}{dz}$ est égal à la partie réelle de $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$, et qu'ainsi, z augmentant, S croît ou décroît suivant que cette partie réelle est positive ou négative.

De cette proposition résulte immédiatement le corollaire suivant:

Les valeurs de z pour lesquelles le module de Z est un maximum ou un minimum annulent la partie réelle de l'expression $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = 0$, et il y a maximum ou minimum, suivant que la partie réelle de $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}\right)$ est négative ou positive.

Revenons maintenant aux équations (1) et (2): en vertu de ces équations, x est une fonction de la variable réelle ζ; les valeurs de ζ qui rendent le module de x maximum ou minimum annulent donc la partie réelle de $\frac{1}{x}\frac{dx}{d\zeta}$. Mais les mêmes équations différentiées par rapport à ζ nous donnent

$$-\sin y\frac{dx}{d\zeta} = 1, \quad x\sin y\frac{dy}{d\zeta} - \cos y\frac{dx}{d\zeta} = 0;$$

d'où

$$\frac{dx}{d\zeta} = -\frac{1}{\sin y}, \quad \frac{dy}{d\zeta} = -\frac{\cos y}{x\sin^2 y} = -\frac{1}{x^2\sin^2 y} = -\frac{1}{(y-\zeta)^2},$$

et, par conséquent,

$$(3) \qquad \frac{1}{x}\frac{dx}{d\zeta} = -\frac{1}{x\sin y} = -\frac{1}{y-\zeta}.$$

Pour que la partie réelle de $\frac{1}{x}\frac{dx}{d\zeta}$ soit nulle, on voit que celle de $y-\zeta$ doit l'être aussi, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$y = \zeta + \rho\sqrt{-1},$$

ρ désignant une quantité réelle. Cette valeur étant substituée dans l'équation

$$(4) \qquad (y-\zeta)\cos y - \sin y = 0,$$

qui résulte de l'élimination de x entre les équations (1) et (2), il viendra

$$\rho\sqrt{-1}\cos(\zeta + \rho\sqrt{-1}) - \sin(\zeta + \rho\sqrt{-1}) = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}&\left[\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1}) - \sin(\rho\sqrt{-1})\right]\cos\zeta\\ &= \left[\rho\sqrt{-1}\sin(\rho\sqrt{-1}) + \cos(\rho\sqrt{-1})\right]\sin\zeta.\end{aligned}$$

Le premier membre contenant le facteur $\sqrt{-1}$, tandis que le second membre est réel, chacun d'eux doit être nul séparément; ainsi, pour que le module de x soit maximum ou minimum, il faut qu'on ait à la fois

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned}&\left[\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1}) - \sin(\rho\sqrt{-1})\right]\cos\zeta = 0,\\ &\left[\rho\sqrt{-1}\sin(\rho\sqrt{-1}) + \cos(\rho\sqrt{-1})\right]\sin\zeta = 0.\end{aligned}\right.$$

La quantité $\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1}) - \sin(\rho\sqrt{-1})$ pouvant se mettre sous la forme

$$\rho\sqrt{-1}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\rho^2}{1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\rho^4}{1.2.3} + \frac{1}{7}\cdot\frac{\rho^6}{1.2\ldots6} + \ldots\right),$$

on voit qu'elle ne sera pas nulle, à moins que ρ ne soit nul : les deux facteurs

$$\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1}) - \sin(\rho\sqrt{-1}),$$
$$\rho\sqrt{-1}\sin(\rho\sqrt{-1}) + \cos(\rho\sqrt{-1}),$$

ne peuvent donc être nuls à la fois; il en est de même de $\sin\zeta$ et de $\cos\zeta$. Par conséquent, pour que les équations (5) soient satisfaites, il faut qu'on ait

$$\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1}) - \sin(\rho\sqrt{-1}) = 0, \quad \sin\zeta = 0;$$

ou bien

$$\rho\sqrt{-1}\sin(\rho\sqrt{-1}) + \cos(\rho\sqrt{-1}) = 0, \quad \cos\zeta = 0.$$

La deuxième hypothèse nous donne $\zeta = \frac{\pi}{2}$, et l'équation qui détermine ρ pouvant être mise sous la forme

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\rho^4}{1.2.3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\rho^6}{1.2.3.4.5} + \cdots = 1,$$

on en conclut $\rho = \pm 1,1996\ldots$; l'équation (4) nous donne ensuite

$$\cos^2 y = \frac{1}{(y-\zeta)^2+1} = \frac{1}{1-\rho^2},$$

et, par conséquent,

$$x^2 = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 - \rho^2, \quad x = \pm\sqrt{\rho^2-1}\sqrt{-1} = \pm 0,662\ldots\sqrt{-1}.$$

Pour savoir si ce nombre 0,662... est un maximum ou un minimum du module de x, il faut déterminer le signe de la partie réelle de l'expression $\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{x}\frac{dx}{d\zeta}\right)$: or il suit de l'équation (3)

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{x}\frac{dx}{d\zeta}\right) = \frac{1}{(y-\zeta)^2}\left(\frac{dy}{d\zeta}-1\right) = -\frac{(y-\zeta)^2+1}{(y-\zeta)^4} = \frac{\rho^2-1}{\rho^4}:$$

cette quantité est positive, puisque ρ surpasse l'unité : c'est donc un minimum qu'on vient de trouver pour le module de x.

On a vu qu'on satisfait aussi aux équations (5) en posant

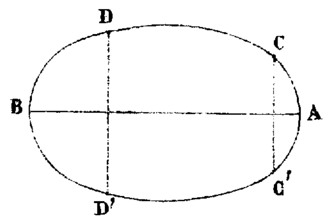
$$\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1}) - \sin(\rho\sqrt{-1}) = 0, \quad \sin\zeta = 0,$$

d'où il suit

$$\zeta = 0 \text{ ou } \pi, \quad \rho = 0, \quad y = 0 \text{ ou } \pi, \quad x = \pm 1.$$

Ici la valeur du module de x, à savoir l'unité, est nécessairement un maximum, puisque ce module est minimum pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$, et ne devient maximum ou minimum pour aucune autre valeur de ζ comprise entre o et π.

Ainsi la limite des valeurs de l'excentricité pour lesquelles les séries du mouvement elliptique restent convergentes, décroît de 1 à 0,662..., quand ζ augmente de zéro à $\frac{\pi}{2}$, et croît de 0,662... à 1, quand ζ augmente de $\frac{\pi}{2}$ à π.



Soit AB le grand axe d'une ellipse donnée : si l'excentricité est inférieure à 0,662..., les séries en question seront convergentes pour toute valeur de l'anomalie moyenne; mais il n'en sera plus de même si l'excentricité surpasse 0,662... Dans ce cas, il existera sur la courbe quatre points C, D, C', D', placés deux à deux symétriquement par rapport à l'axe AB, et tels, que les séries seront convergentes pour les parties CAC', DBD' de l'ellipse, et ne le seront pas pour les parties CD, C'D'. On voit aisément que les points C et D répondent à des valeurs supplémentaires de l'anomalie moyenne.