JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Remarques sur une classe d'équations différentielles, à l'occasion d'un Mémoire de M. Jacobi sur quelques séries elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 225-241.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__225_0>

Remarques sur une classe d'équations différentielles, à l'occasion d'un Mémoire de M. Jacobi *sur quelques séries elliptiques;*

Par J. LIOUVILLE.

1. Dans le Mémoire auquel nous faisons allusion et dont nous avons inséré la traduction au cahier de Juin, M. Jacobi a considéré certaines quantités dépendantes du module d'une fonction elliptique, et en différentiant il est arrivé à une équation de la forme

$$\text{(A)} \qquad z^2(zd^3z + 3dz\,d^2z)^2 = (d^2z)^2(16z^3d^2z + dx^2);$$

c'est l'équation marquée (7) dans son Mémoire : seulement nous avons mis z au lieu C, et dx au lieu de $d\log q$; dx est ici la différentielle constante. Cette équation peut encore s'écrire

$$\text{(B)} \qquad \frac{d.z^3\dfrac{d^2z}{dx^2}}{dx} = \frac{1}{z^2}\left(z^3\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(16z^3\frac{d^2z}{dx^2}+1\right)^{\frac{1}{2}},$$

de sorte qu'elle est comprise dans l'équation générale

$$(1) \qquad \frac{d.\varphi(z)\dfrac{d^2z}{dx^2}}{dx} = f(z)\,\mathrm{F}\left[\varphi(z)\frac{d^2z}{dx^2}\right].$$

Elle répond au cas particulier de

$$\varphi(z) = z^3, \quad f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad \mathrm{F}(u) = u\sqrt{16u+1}.$$

Il suit de l'analyse de M. Jacobi que dans ce cas particulier la valeur de z dépend des fonctions elliptiques. C'est en partant, en effet, comme nous l'avons déjà dit, de fonctions de ce genre que M. Jacobi arrive à l'équation dont nous parlons. Il était curieux de se proposer le problème inverse : *L'équation différentielle*

$$\text{(B)} \qquad \frac{d.z^3\dfrac{d^2z}{dx^2}}{dx} = \frac{1}{z^2}\left(z^3\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(16z^3\frac{d^2z}{dx^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

étant donnée, sans qu'on sache d'où elle vient, en trouver l'intégrale. C'est en résolvant ce problème que j'ai été conduit aux remarques concernant l'équation générale (1) qui font le sujet de cet article.

2. Comme la variable indépendante x n'entre dans l'équation générale (1) que par sa différentielle dx, on pourrait de suite, par un procédé connu, abaisser cette équation au second ordre. Il suffirait de poser

$$\frac{dz}{dx} = p,$$

et d'introduire dans le calcul cette quantité p en la regardant comme une fonction de z. On a ainsi

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx} = p\frac{dp}{dz}$$

et

$$\frac{d.\varphi(z)\dfrac{d^2z}{dx^2}}{dx} = p\frac{d.\varphi(z)p\dfrac{dp}{dz}}{dz};$$

ce qui transforme l'équation (1) dans celle-ci

$$(2) \qquad p\frac{d.\varphi(z)p\dfrac{dp}{dz}}{dz} = f(z)\mathrm{F}\left[\varphi(z)p\frac{dp}{dz}\right],$$

qui n'est plus que du second ordre.

L'équation (2) sera sans doute intégrable facilement et à vue pour ainsi dire dans de nombreux cas particuliers. Dans d'autres, elle sera aisée à ramener du moins au premier ordre. Mais en la particularisant pour le cas de l'équation (B), c'est-à-dire en prenant

$$\varphi(z) = z^3, \quad f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad \mathrm{F}(u) = u\sqrt{16u+1},$$

je suis tombé sur une équation qui, traitée directement, m'a paru offrir des difficultés; et sans pousser plus loin cette tentative, j'ai dirigé mes efforts d'un autre côté. J'ai trouvé ainsi une nouvelle manière de ramener l'équation (1) à une équation du second ordre, qui est linéaire pour le cas particulier considéré par M. Jacobi, mais qui, dans tous les cas, est de la forme

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \mathrm{f}(v, t),$$

et, par conséquent (d'après un théorème que nous devons encore à l'illustre géomètre allemand), s'intègre complétement dès qu'on a obtenu par un moyen quelconque une seule de ses intégrales premières. Il s'ensuit qu'une propriété semblable a lieu pour l'équation (1) et aussi pour l'équation (2) qui se déduit de l'équation (1) et qu'on peut y ramener.

3. Mais avant d'exposer cette méthode, je présenterai encore sur les équations (1) et (2) les observations suivantes.

En posant

$$\frac{dz}{\varphi(z)} = dt,$$

ce qui fournit t en z et z en t, on donne à l'équation (2) une forme plus simple, savoir,

$$p\,\frac{d.p\,\frac{dp}{dt}}{dt} = \psi(t)\,\mathrm{F}\left(p\,\frac{dp}{dt}\right),$$

où j'ai écrit

$$f(z)\,\varphi(z) = \psi(t).$$

Cette équation ne contient plus qu'une seule fonction ψ au lieu des deux fonctions f et φ. Sa forme est, du reste, toujours celle de l'équation (2) : seulement la fonction φ y est en quelque sorte réduite à l'unité.

C'est la fonction f, au contraire, qu'on réduirait à l'unité en prenant

$$f(z)\,dz = dt.$$

Il est aisé d'en conclure que, sans ôter au fond rien de sa généralité à l'équation (1), on pourrait remplacer par l'unité une des deux fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$ qu'elle contient. Mais comme la présence simultanée de ces deux fonctions ne complique nullement les calculs que nous allons avoir à faire, et comme il est très-commode de les avoir conservées toutes deux lorsqu'on en vient à appliquer la méthode à un exemple, puisque cela dispense de chasser, par une transformation préalable plus ou moins gênante, la fonction superflue, nous garderons l'équation (1) telle qu'elle est, et nous opérerons ainsi qu'il suit.

4. Je pose

$$\varphi(z)\frac{d^2z}{dx^2} = u$$

et

$$f(z)\,dx = dt,$$

u et t désignant de nouvelles variables. En ayant égard à ces valeurs, l'équation (1) se réduit à

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{F}(u).$$

De là

$$t = \int \frac{du}{\mathrm{F}(u)},$$

ce qui donne t en u et inversement u en t. Nous regarderons donc désormais les variables u et t comme des fonctions connues l'une de l'autre, et nous supposerons $u = \varpi(t)$. A la variable t qui résulte d'une intégration s'ajoute naturellement une constante arbitraire; mais comme t n'est qu'une variable auxiliaire introduite par nous et qui à la fin doit disparaître par l'élimination, on pourra sans inconvénient donner à cette constante telle valeur particulière qu'on voudra.

Maintenant je cherche la valeur de z en fonction de t. On a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dz}{dt}f(z).$$

En faisant donc

$$f(z)\,dz = dv, \quad v = \int f(z)\,dz,$$

il vient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dv}{dt}.$$

Par suite

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dt^2} f(z),$$

et, par conséquent,

$$\varphi(z) \frac{d^2 z}{dx^2} \quad \text{ou} \quad u = \frac{d^2 v}{dt^2} f(z) \varphi(z).$$

Comme l'équation

$$v = \int f(z)\, dz$$

rend z fonction de v, j'écrirai

$$f(z) \varphi(z) = \theta(v),$$

et comme d'ailleurs

$$u = \varpi(t),$$

j'en conclurai

$$(3) \qquad \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{\varpi(t)}{\theta(v)}.$$

Voilà l'équation du second ordre qui doit donner v ou $\int f(z)\, dz$, et, par conséquent, z en fonction de t. Une fois z connu en t, on exprimera à son tour x en t par la formule

$$x = \int \frac{dt}{f(z)}.$$

Enfin l'élimination de t donnera une équation entre x et z. Cette équation, qui contiendra une constante arbitraire ajoutée à x, plus les deux constantes résultant de l'intégration de l'équation (3), sera l'intégrale complète de l'équation (1). Ai-je besoin d'ajouter qu'en éliminant x entre cette intégrale et l'équation $p = \frac{dz}{dx}$, où z est la valeur résultant de l'intégrale même dont nous parlons, on aura une équation entre p et z, qui ne contiendra plus que deux constantes arbitraires, vu que la constante jointe à x s'élimine avec cette variable, et qui sera l'intégrale complète de l'équation (2).

5. Si l'on voulait, du reste, ramener directement l'équation (2) à l'équation (3), sans repasser par l'équation (1) d'où l'équation (2) a été tirée, voici comment il faudrait s'y prendre.

On poserait

$$f(z)dz = dv, \quad \varphi(z)\,p\,\frac{dp}{dz} = u, \quad \frac{dv}{p} = dt,$$

moyennant quoi l'équation (2) se réduirait à

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{F}(u),$$

et donnerait

$$t = \int \mathrm{F}(u)\,du,$$

comme ci-dessus. Ensuite de

$$\frac{dv}{dt} = p,$$

on conclurait

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dp}{dz}\,\frac{dz}{dt}.$$

Mais, d'après les équations écrites plus haut,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p}{f(z)};$$

donc

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{p}{f(z)}\,\frac{dp}{dz} = \frac{u}{f(z)\,\varphi(z)}.$$

En représentant donc par $\varpi(t)$ la valeur de u en t que l'équation

$$t = \int \mathrm{F}(u)\,du$$

fait connaître, et par $\theta(v)$ la valeur de $f(z)\,\varphi(z)$ en v conclue de

$$v = \int f(z)\,dz,$$

on retrouvera finalement l'équation

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{\varpi(t)}{\theta(v)}. \tag{3}$$

Mais il me semble qu'on est conduit plus facilement et plus naturellement à l'équation (3) en partant de l'équation (1) qu'en partant de l'équation (2).

6. Dans de certains cas particuliers, l'équation (2) pourra, du reste, se montrer plus apte à l'intégration que l'équation (3). Mais c'est sur l'équation (3) qu'on reconnaît généralement que *l'intégrale complète est toujours facile à obtenir par quadratures dès qu'on donne une seule intégrale première*, propriété qui s'étend dès lors aux équations (1) et (2), mais qui n'était pas connue pour elles, tandis que pour l'équation (3) elle résulte d'un théorème de M. Jacobi, applicable à toute équation de la forme

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \mathrm{f}(v, t), \tag{4}$$

et dont voici la démonstration.

Soit

$$\frac{dv}{dt} = \lambda(v, t, a)$$

une intégrale première de l'équation (4), a désignant la constante arbitraire. En différentiant et ayant égard à l'équation (4), on aura donc l'équation identique

$$\mathrm{f} = \frac{d\lambda}{dv}\lambda + \frac{d\lambda}{dt},$$

laquelle, différentiée à son tour par rapport à a, donnera

$$\lambda\frac{d^2\lambda}{da\,dv} + \frac{d\lambda}{dv}\frac{d\lambda}{da} + \frac{d^2\lambda}{da\,dt} = 0.$$

C'est précisément la condition pour que

$$\frac{d\lambda}{da}(dv - \lambda\,dt)$$

soit une différentielle exacte. L'intégrale complète de l'équation (4) est donc

$$\int\left(\frac{d\lambda}{da}dv - \frac{d\lambda}{da}\lambda\,dt\right) = \text{constante}.$$

7. Revenons à l'équation (1) et à la transformation par laquelle on en tire l'équation (3). Cette transformation nous montre que l'équa-

tion (3) doit rester la même pour une infinité d'équations comprises dans le type (1), mais répondant à des formes diverses des fonctions f et φ, telles que pourtant on retrouve toujours la même fonction θ. On peut, en effet, faire varier f et φ, sans que θ varie, dans les relations

$$v = \int f(z) dz, \quad f(z)\varphi(z) = \theta(v),$$

c'est-à-dire dans l'équation résultante

$$f(z)\,\varphi(z) = \theta\left[\int f(z) dz\right].$$

Ainsi changez la fonction $f(z)$ à volonté, mais en même temps changez $\varphi(z)$ de manière à avoir toujours

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}\theta\left[\int f(z) dz\right],$$

et les équations différentielles que la formule (1), ou, si vous voulez, que les formules (1) et (2) vous fourniront par ces changements successifs, offriront toutes la même difficulté à l'intégration, et dépendront toutes de la même équation du second ordre

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{\varpi(t)}{\theta(v)},$$

en sorte que si l'intégrale complète, ou même si une seule intégrale première de l'une d'elles est connue, on en déduira immédiatement les intégrales complètes de tout le système.

8. L'équation (3) sera linéaire si l'on a

$$\theta(v) = \frac{1}{Av + B}. \tag{5}$$

Alors, en effet, elle deviendra

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \varpi(t)(Av + B),$$

ou

$$\frac{d^2(Av + B)}{dt^2} = A\varpi(t)(Av + B), \tag{6}$$

équation qui s'intègre dès qu'on connaît une valeur particulière de $Av + B$ qui la vérifie.

La condition (5) exige que

$$f(z)\,\varphi(z) = \frac{1}{\mathrm{A}\int f(z)\,dz + \mathrm{B}};$$

elle est remplie lorsque l'on fait

$$\varphi(z) = z^3,\quad f(z) = \frac{1}{z^2},$$

car on a alors

$$\int f(z)\,dz = -\frac{1}{z},\quad \varphi(z)\,f(z) = z,$$

et, par conséquent,

$$f(z)\,\varphi(z) = -\frac{1}{\int f(z)\,dz}.$$

Ce cas est celui de l'équation (B). Nous allons le traiter avec détail. Mais ajoutons encore que l'intégrale particulière dont on a besoin pour former l'intégrale complète de l'équation (6) peut s'obtenir soit à l'inspection de cette équation, soit par la connaissance antérieure d'une intégrale particulière de l'équation (1), pourvu toutefois que cette dernière ne rende pas constante la quantité

$$\varphi(z)\,\frac{d^2z}{dx^2},$$

que nous avons désignée par u et supposée variable.

Toute valeur de z satisfaisant à l'équation (1) et qui laisse u variable, conduit, en effet, évidemment à une valeur de ν convenable.

9. Appliquons maintenant notre méthode générale à l'équation de M. Jacobi, mise sous la forme

$$\text{(B)}\qquad \frac{d.z^3\,\dfrac{d^2z}{dx^2}}{dx} = \frac{1}{z^2}\left(z^3\,\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(16\,z^3\,\frac{d^2z}{dx^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il faut poser d'abord (car à cause de l'importance de l'exemple je reprends le calcul en entier)

$$z^3\,\frac{d^2z}{dx^2} = u,\quad \frac{dx}{z^2} = dt.$$

moyennant quoi l'équation (B) devient

$$\frac{du}{dt} = u\sqrt{16u+1},$$

et fournit

$$t = \int \frac{du}{u\sqrt{16u+1}} = -\int \frac{d\frac{1}{u}}{\sqrt{\left(\frac{1}{u}+8\right)^2 - 64}};$$

par conséquent,

$$t - \varepsilon = -\log\left[\frac{1}{u} + 8 + \sqrt{\left(\frac{1}{u}+8\right)^2 - 64}\right],$$

ε étant une constante à laquelle on donnera plus tard telle valeur qu'on voudra. De là résulte

$$\frac{1}{u} + 8 + \sqrt{\left(\frac{1}{u}+8\right)^2 - 64} = e^{-(t-\varepsilon)}.$$

En multipliant le premier membre par

$$\frac{1}{u} + 8 - \sqrt{\left(\frac{1}{u}+8\right)^2 - 64},$$

on a 64 pour produit. Donc

$$\frac{1}{u} + 8 - \sqrt{\left(\frac{1}{u}+8\right)^2 - 64} = 64e^{t-\varepsilon}.$$

Par suite,

$$2\left(\frac{1}{u}+8\right) = e^{-(t-\varepsilon)} + 64e^{t-\varepsilon},$$

ou bien encore

$$\frac{2}{u} = \left(8e^{\frac{t-\varepsilon}{2}} - e^{-\frac{t-\varepsilon}{2}}\right)^2.$$

Je dispose maintenant de la constante ε, et je la prends telle que l'on ait

$$e^{\frac{z}{2}} = \sqrt{-8}.$$

J'obtiens ainsi cette valeur définitive

$$\text{(C)} \qquad u = -\frac{1}{4\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right)^2}.$$

Cherchons maintenant à avoir z en t. On a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{1}{z^2}\,\frac{dz}{dt},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{dv}{dt},$$

en posant

$$\frac{1}{z} = v.$$

Il vient ensuite

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{d^2v}{dt^2}\,\frac{1}{z^2}.$$

Donc

$$z^3\frac{d^2z}{dx^2} \quad \text{ou} \quad u = -z\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{1}{v}\,\frac{d^2v}{dt^2};$$

et de là résulte, eu égard à la valeur de u,

$$\text{(D)} \qquad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{v}{4\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right)^2}.$$

10. Toute la difficulté de l'équation qui nous est proposée roule sur l'équation (D). Or l'intégrale de cette équation a été donnée par M. Besge. M. Besge, en effet, a démontré (tome XI de ce Journal, page 96), que par un changement de variable indépendante l'équation (D) se transforme dans l'équation fameuse à laquelle satisfont les fonctions elliptiques complètes de première espèce à modules complémentaires. Mais en laissant même de côté la remarque de M. Besge et sans vouloir tirer aucun secours de la théorie des fonctions elliptiques, j'observe qu'en faisant

$$e^t = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

c'est-à-dire

$$t = \log\frac{\zeta}{1-\zeta},$$

on change l'équation (D) en celle-ci

$$(\zeta - \zeta^2)\frac{d^2 v}{d\zeta^2} + (1 - 2\zeta)\frac{dv}{d\zeta} - \frac{v}{4} = 0.$$

laquelle est comprise, comme cas très-particulier, dans l'équation

$$(m\zeta^2 + n\zeta + p)\frac{d^2 v}{d\zeta^2} + (q\zeta + r)\frac{dv}{d\zeta} + sv = 0,$$

dont on peut toujours trouver l'intégrale à l'aide des différentielles à indices quelconques, ainsi que je l'ai prouvé dans le XXI^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Il ne reste donc aucune difficulté relativement à l'intégration de l'équation (D). Mais voyons la forme de l'intégrale et continuons notre calcul.

11. Soit $v_1(t)$ ou simplement v_1 une valeur particulière quelconque de v satisfaisant à l'équation (1). On en conclura

$$v_1\frac{d^2 v}{dt^2} - v\frac{d^2 v_1}{dt^2} = 0,$$

d'où

$$v_1\frac{dv}{dt} - v\frac{dv_1}{dt} = \text{constante}.$$

Soit $v_2(t)$ ou v_2 une seconde valeur particulière de v telle que la constante ne soit pas nulle, telle, par exemple, que l'on ait

$$v_1\frac{dv_2}{dt} - v_2\frac{dv_1}{dt} = 1.$$

L'intégrale complète de l'équation (D) sera

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

α, β étant des constantes arbitraires. De là

$$z = \frac{1}{v} = \frac{1}{\alpha v_1 + \beta v_2}.$$

De plus, on aura

$$v_1 \frac{dv_2}{dt} - v_2 \frac{dv_1}{dt} = \alpha,$$

d'où

$$d\frac{v_2}{v_1} = \frac{\alpha\, dt}{v_1^2}.$$

En se rappelant que

$$dx = z^2\, dt = \frac{dt}{v^2},$$

on en conclura donc

$$dx = \frac{1}{\alpha}\, d\frac{v_2}{v},$$

d'où

$$x - h = \gamma + \frac{v_2}{\alpha(\alpha v_1 + \beta v_2)},$$

h étant une constante déterminée à volonté et γ une troisième constante arbitraire.

Ainsi l'intégrale complète de l'équation (B) résulte de l'élimination de t entre les deux équations

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} z = \dfrac{1}{\alpha v_1(t) + \beta v_2(t)}, \\[2ex] x - h = \gamma + \dfrac{v_2(t)}{\alpha[\alpha v_1(t) + \beta v_2(t)]}. \end{cases}$$

12. Les équations (E) se changent aisément dans celles-ci

$$\frac{z}{\alpha(x - h - \gamma)} = \frac{1}{v_2(t)},$$

$$\frac{\alpha^2(x - h - \gamma)}{1 - \alpha\beta(x - h - \gamma)} = \frac{v_2(t)}{v_1(t)}.$$

Si donc on représente par

$$z_1 = \frac{1}{x_1}\Psi(x_1)$$

le résultat de l'élimination de t entre les deux équations

$$z_1 = \frac{1}{v_2(t)}, \quad x_1 = \frac{v_2(t)}{v_1(t)},$$

on aura, pour l'intégrale complète de l'équation (B),

$$\text{(F)} \qquad z = \frac{1-\alpha\beta(x-h-\gamma)}{\alpha}\Psi\left[\frac{\alpha^2(x-h-\gamma)}{1-\alpha\beta(x-h-\gamma)}\right].$$

A cause de la présence de h et parce que $v_1(t)$ est une intégrale particulière quelconque de l'équation (D), on aura une valeur particulière quelconque de z en prenant $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, ce qui donne

$$z = \Psi(x-h).$$

Je poserai

$$\Psi(x-h) = \Phi(x),$$

et de la sorte

$$z = \Phi(x)$$

représentera une intégrale particulière quelconque de l'équation (B). Pour repasser de là à l'intégrale complète, j'observerai que

$$\Psi(x) = \Phi(x+h),$$

et par la formule (F) j'en conclurai cette valeur générale de z

$$z = \frac{1-\alpha\beta(x-h-\gamma)}{\alpha}\Phi\left[\frac{\alpha^2(x-h-\gamma)}{1-\alpha\beta(x-h-\gamma)} + h\right].$$

Mais pour me débarrasser de la quantité h, et aussi pour arriver à la même formule que M. Jacobi, je pose encore

$$1 + \alpha\beta(h+\gamma) = a'\alpha, \quad \beta = -\sqrt{-1}\,b,$$

ce qui rendra le facteur de la fonction Φ égal à $a' + \sqrt{-1}\,bx$. La quantité sous le signe Φ peut s'écrire ainsi

$$\frac{(\alpha^2 - h\alpha\beta)x - \alpha^2(h+\gamma) + h[1+\alpha\beta(h+\gamma)]}{1+\alpha\beta(h+\gamma) - \alpha\beta x},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(\alpha + hb\sqrt{-1})x - \alpha(h+\gamma) + ha'}{a' + \sqrt{-1}\,bx}.$$

Soit donc

$$\alpha + hb\sqrt{-1} = a, \quad ha' - \alpha(h+\gamma) = \sqrt{-1}\,b',$$

et il nous viendra

$$(G) \qquad z = (a' + \sqrt{-1}\,bx)\,\Phi\left(\frac{ax + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,bx}\right).$$

Trois des constantes a, a', b, b' sont arbitraires, mais la quatrième dépend des trois autres.

En effet, à cause de $\beta = \sqrt{-1}\,b$, l'équation

$$1 + \alpha\beta(h+\gamma) = a'\alpha$$

donne

$$\alpha(h+\gamma) = \frac{1 - a'\alpha}{b\sqrt{-1}};$$

l'équation

$$\alpha + hb\sqrt{-1} = a$$

donne d'autre part

$$h = \frac{a - \alpha}{b\sqrt{-1}}.$$

Substituons ces valeurs de h et $h + \gamma$ dans

$$ha' - \alpha(h+\gamma) = \sqrt{-1}\,b',$$

et il nous viendra

$$\frac{a'(a-\alpha)}{b\sqrt{-1}} - \frac{1 - a'\alpha}{b\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\,b'$$

d'où

$$aa' + bb' = 1.$$

On verra que ces résultats coïncident avec ceux de M. Jacobi, si l'on se rappelle que la quantité désignée par y dans le Mémoire de l'illustre auteur est égale à $z^{-\frac{1}{2}}$, en sorte que $z = \frac{1}{y^2}$.

13. On se souvient que, sans rien perdre de sa généralité, l'équation (1) peut être réduite à

$$\frac{d.\varphi(z)\frac{d^2z}{dx^2}}{dx} = \mathrm{F}\left[\varphi(z)\frac{d^2z}{dx^2}\right].$$

Mais cette dernière n'est qu'un cas très-particulier de la suivante:

$$(\alpha) \qquad \frac{d.\varphi(x, z)\frac{d^2z}{dx^2}}{dx} = \mathrm{F}\left[x, \varphi(x, z)\frac{d^2z}{dx^2}\right],$$

dont il est bon de dire aussi un mot.

Posons

$$\varphi(x, z)\frac{d^2z}{dx^2} = u,$$

et nous aurons d'abord à intégrer l'équation du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{F}(x, u).$$

Soit

$$u = \varpi(x)$$

le résultat de cette intégration; il ne restera plus à traiter qu'une équation du second ordre,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\varpi(x)}{\varphi(x, z)},$$

du genre de celles dont on a parlé n° 6, et qui s'intègrent complétement dès qu'on en donne une seule intégrale première.

14. On pourrait considérer encore, au lieu d'une seule équation (α), un système d'équations simultanées, tel que

$$\frac{d . \varphi_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2}}{dx} = \mathrm{F}_1 \left(x, \varphi_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \varphi_n \frac{d^2 z_n}{dx^2}\right),$$

$$\frac{d . \varphi_2 \frac{d^2 z_2}{dx^2}}{dx} = \mathrm{F}_2 \left(x, \varphi_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \varphi_n \frac{d^2 z_n}{dx^2}\right),$$

. . . .

$$\frac{d . \varphi_n \frac{d^2 z_n}{dx^2}}{dx} = \mathrm{F}_n \left(x, \varphi_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \varphi_n \frac{d^2 z_n}{dx^2}\right),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions de x, $z_1, \ldots, z_n$. On poserait alors

$$\varphi_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2} = u_1, \ldots, \quad \varphi_n \frac{d^2 z_n}{dx^2} = u_n;$$

et cela conduirait à des conséquences utiles, surtout dans le cas où l'on supposerait généralement φ_m fonction de z_m et x seules. Mais je ne crois pas devoir insister sur ces remarques que le lecteur développera aisément de lui-même.