JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Sur une question relative à la théorie des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 21-30.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__21_0>

SUR

UNE QUESTION RELATIVE A LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. HERMITE.

Soient $n+1$ nombres entiers

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \ldots, \quad \varkappa, \quad \lambda,$$

dont le plus grand commun diviseur est l'unité; on propose de trouver tous les systèmes de $n(n+1)$ autres nombres, savoir :

$$\begin{array}{lll}
\alpha', & \alpha'', \ldots, & \alpha^{(n)}, \\
\beta', & \beta'', \ldots, & \beta^{(n)}, \\
\gamma', & \gamma'', \ldots, & \gamma^{(n)}, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\varkappa', & \varkappa'', \ldots, & \varkappa^{(n)}, \\
\lambda', & \lambda'', \ldots, & \lambda^{(n)},
\end{array}$$

qui rendent le déterminant

$$\begin{array}{llll}
\alpha, & \alpha', \ldots, & \alpha^{(i)}, \ldots, & \alpha^{(n)}, \\
\beta, & \beta', \ldots, & \beta^{(i)}, \ldots, & \beta^{(n)}, \\
\gamma, & \gamma', \ldots, & \gamma^{(i)}, \ldots, & \gamma^{(n)}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\varkappa, & \varkappa', \ldots, & \varkappa^{(i)}, \ldots & \varkappa^{(n)}, \\
\lambda, & \lambda', \ldots, & \lambda^{(i)}, \ldots, & \lambda^{(n)},
\end{array}$$

égal à plus ou moins un.

Solution. Nommons respectivement

$$\begin{array}{llll}
\pi_1 & \text{le plus grand commun diviseur de} & \alpha & \text{et } \beta, \\
\pi_2 & \quad\quad\quad \textit{idem} & \pi_1 & \text{et } \gamma, \\
\pi_3 & \quad\quad\quad \textit{idem} & \pi_2 & \text{et } \delta, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\pi_{n-1} & \quad\quad\quad \textit{idem} & \pi_{n-2} & \text{et } \varkappa, \\
\pi_n & \quad\quad\quad \textit{idem} & \pi_{n-1} & \text{et } \lambda;
\end{array}$$

dans l'hypothèse admise, π_n sera l'unité. Prenons ensuite les nombres entiers

$$\begin{array}{cccccc}
a, & b, & c, & d,\ldots, & k, & l, \\
 & & c', & d',\ldots, & k', & l',
\end{array}$$

d'après les conditions

$$\begin{aligned}
a\beta - b\alpha &= \pi_1, \\
c'\gamma - c\pi_1 &= \pi_2, \\
d'\delta - d\pi_2 &= \pi_3, \\
\ldots & \ldots \\
k'\varkappa - k\pi_{n-2} &= \pi_{n-1}, \\
l'\lambda - l\pi_{n-1} &= \pi_n = 1.
\end{aligned}$$

On satisfera à la question proposée par les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= am_i + \mathrm{M}_i \frac{\alpha}{\pi_1}, \\
\beta_i &= bm_i + \mathrm{M}_i \frac{\beta}{\pi_1}, \\
\gamma_i &= cn_i + \mathrm{N}_i \frac{\gamma}{\pi_2} \\
\delta_i &= dp_i + \mathrm{P}_i \frac{\delta}{\pi_3}, \\
\ldots & \ldots \\
\varkappa_i &= ks_i + \mathrm{S}_i \frac{\pi}{\pi_{n-1}}, \\
\lambda_i &= lt_i + \mathrm{T}_i \frac{\lambda}{\pi_n},
\end{aligned}$$

les quantités

$$\mathrm{M}_i, \quad \mathrm{N}_i, \quad \mathrm{P}_i, \ldots, \quad \mathrm{S}_i, \quad \mathrm{T}_i$$

dépendant des nombres entiers

$$m_i, \quad n_i, \quad p_i, \ldots, \quad s_i, \quad t_i$$

par les équations

$$\mathrm{M}_i = c' n_i + \mathrm{N}_i \frac{\pi_1}{\pi_2},$$

$$\mathrm{N}_i = d' p_i + \mathrm{P}_i \frac{\pi_2}{\pi_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{S}_i = l' t_i + \mathrm{T}_i \frac{\pi_{n-1}}{\pi_n},$$

et toutes les solutions possibles s'obtiendront en prenant toutes les valeurs des n^2 quantités

$$m_i, \quad n_i, \quad p_i, \ldots, \quad s_i, \quad t_i,$$

pour lesquelles le déterminant

$$\begin{matrix} m_1, & m_2, \ldots, & m_n, \\ n_1, & n_2, \ldots, & n_n, \\ p_1, & p_2, \ldots, & p_n, \\ \vdots & \vdots & \\ s_1, & s_2, \ldots, & s_n, \\ t_1, & t_2, \ldots, & t_n, \end{matrix}$$

égale plus ou moins un.

Ainsi, par exemple, lorsque $n = 2$, s'il s'agit de rendre égal à l'unité le déterminant

$$\left\{\begin{matrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{matrix}\right\} = \alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''),$$

on aura

$$\alpha' = am_1 + \mathrm{M}_1 \frac{\alpha}{\pi_1},$$

$$\beta' = bm_1 + \mathrm{M}_1 \frac{\beta}{\pi_1},$$

$$\gamma' = cn_1 + \mathrm{N}_1 \gamma,$$

avec

$$\mathrm{M}_1 = c' n_1 + \mathrm{N}_1 \pi_1,$$

ce qui donne

$$\alpha' = am_1 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_1 + \mathrm{N}_1 \alpha,$$

$$\beta' = bm_1 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_1 + \mathrm{N}_1 \beta,$$

$$\gamma' = cn_1 \qquad\qquad + \mathrm{N}_1 \gamma;$$

on trouvera ensuite semblablement

$$\alpha'' = am_2 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_2 + \mathrm{N}_2 \alpha,$$

$$\beta'' = bm_2 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_2 + \mathrm{N}_2 \beta,$$

$$\gamma'' = cn_2 \qquad\qquad + \mathrm{N}_2 \gamma,$$

et l'on devra prendre pour m_1, n_1, m_2, n_2 indéfiniment tous les nombres entiers pour lesquels

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = \pm 1.$$

Si $n = 3$, la solution générale de l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \alpha''' \\ \beta, & \beta', & \beta'', & \beta''' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'', & \gamma''' \\ \delta, & \delta', & \delta'', & \delta''' \end{vmatrix} = \pm 1$$

sera de même comprise dans les formules

$$\alpha' = am_1 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_1 + \frac{\alpha d'}{\pi_2} p_1 + \mathrm{P}_1 \alpha,$$

$$\beta' = bm_1 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_1 + \frac{\beta d'}{\pi_2} p_1 + \mathrm{P}_1 \beta,$$

$$\gamma' = cn_1 \qquad\qquad + \frac{\gamma d'}{\pi_2} p_1 + \mathrm{P}_1 \gamma,$$

$$\delta' = dp_1 \qquad\qquad\qquad + \mathrm{P}_1 \delta;$$

$$\alpha'' = am_2 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_2 + \frac{\alpha d'}{\pi_2} p_2 + \mathrm{P}_2 \alpha,$$
$$\beta'' = bm_2 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_2 + \frac{\beta d'}{\pi_2} p_2 + \mathrm{P}_2 \beta,$$
$$\gamma'' = cn_2 \qquad + \frac{\gamma d'}{\pi_2} p_2 + \mathrm{P}_2 \gamma,$$
$$\delta'' = dp_2 \qquad + \mathrm{P}_2 \delta;$$

$$\alpha''' = am_3 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_3 + \frac{\alpha d'}{\pi_2} p_3 + \mathrm{P}_3 \alpha,$$
$$\beta''' = bm_3 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_3 + \frac{\beta d'}{\pi_2} p_3 + \mathrm{P}_3 \beta,$$
$$\gamma''' = cn_3 \qquad + \frac{\gamma d'}{\pi_2} p_3 + \mathrm{P}_3 \gamma,$$
$$\delta''' = dp_3 \qquad + \mathrm{P}_3 \delta.$$

Voici maintenant l'analyse qui nous a conduit à ces résultats.

Soient, pour abréger, A le déterminant des quantités

$$(\mathrm{A}) \qquad \alpha^{(i)}, \quad \beta^{(i)}, \quad \gamma^{(i)}, \ldots, \quad \lambda^{(i)},$$

B celui du système

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{array}{llllll} \xi, & \beta, & 0, & 0, \ldots, & 0, \\ \xi', & -\alpha, & \gamma, & 0, \ldots, & 0, \\ \xi'', & 0, & -\beta, & \delta, \ldots, & 0, \\ \xi''', & 0, & 0, & -\gamma, \ldots, & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi^{(n-1)}, & 0, & 0, & 0, \ldots, & \lambda, \\ \xi^{(n)}, & 0, & 0, & 0, \ldots, & -\varkappa, \end{array} \right\}$$

dont la loi est facile à saisir, et où les quantités ξ sont définies par les équations

$$\begin{array}{l} \alpha\xi + \beta\xi' + \gamma\xi'' + \ldots + \lambda\xi^{(n)} = 1, \\ \alpha'\xi + \beta'\xi' + \gamma'\xi'' + \ldots + \lambda'\xi^{(n)} = 0, \\ \alpha''\xi + \beta''\xi' + \gamma''\xi'' + \ldots + \lambda''\xi^{(n)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^{(n)}\xi + \beta^{(n)}\xi' + \gamma^{(n)}\xi'' + \ldots + \lambda^{(n)}\xi^{(n)} = 0. \end{array}$$

De la composition des systèmes (A) et (B) résultera le nouveau système

$$\begin{array}{llllll}
1, & 0, & 0,\ldots, & 0,\ldots, & 0, \\
0, & \alpha'\beta-\beta'\alpha, & \alpha''\beta-\beta''\alpha,\ldots, & \alpha^{(i)}\beta-\beta^{(i)}\alpha,\ldots, & \alpha^{(n)}\beta-\beta^{(n)}\alpha, \\
0, & \beta'\gamma-\gamma'\beta, & \beta''\gamma-\gamma''\beta,\ldots, & \beta^{(i)}\gamma-\gamma^{(i)}\beta,\ldots, & \beta^{(n)}\gamma-\gamma^{(n)}\beta, \\
0, & \gamma'\delta-\delta'\gamma, & \gamma''\delta-\delta''\gamma,\ldots, & \gamma^{(i)}\delta-\delta^{(i)}\gamma,\ldots, & \gamma^{(n)}\delta-\delta^{(n)}\gamma, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0, & \varkappa'\lambda-\lambda'\varkappa, & \varkappa''\lambda-\lambda''\varkappa,\ldots, & \varkappa^{(i)}\lambda-\lambda^{(i)}\varkappa,\ldots, & \varkappa^{(n)}\lambda-\lambda^{(n)}\varkappa.
\end{array}$$

En appelant C son déterminant, ou, ce qui revient au même, celui des n^2 quantités

$$\text{(C)}\qquad \alpha^{(i)}\beta-\beta^{(i)}\alpha,\quad \beta^{(i)}\gamma-\gamma^{(i)}\beta,\ldots,\quad \varkappa^{(i)}\lambda-\lambda^{(i)}\varkappa,$$

on aura, par ce théorème connu,

$$C = AB.$$

Or on trouve facilement, au signe près,

$$B = \beta\gamma\delta\ldots\varkappa;$$

donc on peut remplacer la condition proposée, savoir

$$A = \pm 1,$$

par la suivante,

$$C = \pm\beta\gamma\delta\ldots\varkappa,$$

dont nous allons nous occuper.

Exposons d'abord une transformation des termes du système (C); j'observe, à cet effet, que π_1 désignant le plus grand commun diviseur de α et β, on aura nécessairement

$$\alpha^{(i)}\beta-\beta^{(i)}\alpha = m_i\pi_1,$$

d'où l'on tire

$$\alpha^{(i)} = am_i + M_i\frac{\alpha}{\pi_1},$$

$$\beta^{(i)} = bm_i + M_i\frac{\beta}{\pi_1},$$

les nombres entiers m_i et M_i restant entièrement arbitraires, et a et b étant déterminés par l'équation

$$a\beta - b\alpha = \pi_1.$$

Au moyen de cette valeur de $\beta^{(i)}$, on trouve

$$\beta^{(i)}\gamma - \gamma^{(i)}\beta = b\gamma m_i + \frac{\beta}{\pi_1}(M_i\gamma - \gamma^{(i)}\pi_1).$$

Or, π_2 désignant le plus grand commun diviseur de π_1 et γ, on aura nécessairement

$$M_i\gamma - \gamma^{(i)}\pi_1 = n_i\pi_2,$$

d'où

$$M_i = c'n_i + N_i\frac{\pi_1}{\pi_2},$$

$$\gamma^{(i)} = cn_i + N_i\frac{\gamma}{\pi_2},$$

les nombres entiers n_i et N_i étant quelconques, c et c' dépendant de l'équation

$$c'\gamma - c\pi_1 = \pi_2.$$

La répétition du même calcul nous conduira de l'expression précédente de $\gamma^{(i)}$ à celle de $\delta^{(i)}$; il vient, en effet,

$$\gamma^{(i)}\delta - \delta^{(i)}\gamma = c\delta n_i + \frac{\gamma}{\pi_2}(N_i\delta - \delta^{(i)}\pi_2),$$

et posant encore

$$N_i\delta - \delta^{(i)}\pi_2 = p_i\pi_3,$$

π_3 étant le plus grand commun diviseur de π_2 et δ, on en conclura

$$N_i = d'p_i + P_i\frac{\pi_2}{\pi_3},$$

$$\delta^{(i)} = dp_i + P_i\frac{\delta}{\pi_3},$$

d et d' étant donnés par l'équation

$$d'\delta - d\pi_2 = \pi_3.$$

La loi que suivent ces opérations est maintenant évidente, et on en conclura, d'une part,

$$\alpha^{(i)}\beta - \beta^{(i)}\alpha = m_i\pi_1,$$

$$\beta^{(i)}\gamma - \gamma^{(i)}\beta = b\gamma m_i + \frac{\beta\pi_2}{\pi_1} n_i,$$

$$\gamma^{(i)}\delta - \delta^{(i)}\gamma = c\delta n_i + \frac{\gamma\pi_3}{\pi_2} p_i,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varkappa^{(i)}\lambda - \lambda^{(i)}\varkappa = k\lambda s_i + \frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}} t_i,$$

où il est essentiel d'observer que m_i, n_i,..., s_i, t_i restent jusqu'à présent des entiers entièrement arbitraires.

D'un autre côté, nous obtenons d'ailleurs

$$\alpha^{(i)} = am_i + \mathrm{M}_i\frac{\alpha}{\pi_1},$$

$$\beta^{(i)} = bm_i + \mathrm{M}_i\frac{\beta}{\pi_1},$$

$$\gamma^{(i)} = cn_i + \mathrm{N}_i\frac{\gamma}{\pi_2},$$

$$\delta^{(i)} = dp_i + \mathrm{P}_i\frac{\delta}{\pi_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varkappa^{(i)} = ks_i + \mathrm{S}_i\frac{\varkappa}{\pi_{n-1}},$$

$$\lambda^{(i)} = lt_i + \mathrm{T}_i\frac{\lambda}{\pi_n},$$

et les entiers M_i, N_i, P_i,... s'expriment de proche en proche, uniquement par m_i, n_i, p_i,... au moyen de ces autres équations

$$\mathrm{M}_i = c'n_i + \mathrm{N}_i\frac{\pi_1}{\pi_2},$$

$$\mathrm{N}_i = d'p_i + \mathrm{P}_i\frac{\pi_2}{\pi_3},$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{S}_i = k't_i + \mathrm{T}_i\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n},$$

lesquelles ne laissent d'indéterminé que T_i.

Ces résultats obtenus, reportons-nous maintenant au système (C), qui a été transformé dans le suivant, savoir,

$$\begin{array}{llll}
m_1\pi_1, & m_2\pi_1,\ldots, & m_i\pi_1,\ldots, & m_n\pi_1,\\
b\gamma m_1+\frac{\beta\pi_2}{\pi_1}n_1, & b\gamma m_2+\frac{\beta\pi_2}{\pi_1}n_2,\ldots, & b\gamma m_i+\frac{\beta\pi_2}{\pi_1}n_i,\ldots, & b\gamma m_n+\frac{\beta\pi_2}{\pi_1}n_n,\\
c\delta n_1+\frac{\gamma\pi_3}{\pi_2}p_1, & c\delta n_2+\frac{\gamma\pi_3}{\pi_2}p_2,\ldots, & c\delta n_i+\frac{\gamma\pi_3}{\pi_2}p_i,\ldots, & c\delta n_n+\frac{\gamma\pi}{\pi_2}p_n,\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
k\lambda s_1+\frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}}t_1, & k\lambda s_2+\frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}}t_2,\ldots, & k\lambda s_i+\frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}}t_i,\ldots, & k\lambda s_n+\frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}}t_n.
\end{array}$$

On reconnaît bien facilement qu'un pareil système provient de la composition des deux autres, que voici :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{llll}
m_1, & m_2,\ldots, & m_i,\ldots, & m_n,\\
n_1, & n_2,\ldots, & n_i,\ldots, & n_n,\\
p_1, & p_2,\ldots, & p_i,\ldots, & p_n,\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
s_1, & s_2,\ldots, & s_i,\ldots, & s_n,\\
t_1, & t_2,\ldots, & t_i,\ldots, & t_n,
\end{array}\right\}$$

et

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{llllll}
\pi_1, & b\gamma, & 0, & 0,\ldots, & 0,\\
0, & \frac{\beta\pi_2}{\pi_1}, & c\delta, & 0,\ldots, & 0,\\
0, & 0, & \frac{\gamma\pi_3}{\pi_2}, & d\varepsilon,\ldots, & 0,\\
0, & 0, & 0, & \frac{\delta\pi_4}{\pi_3},\ldots, & 0,\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0, & 0, & 0, & 0,\ldots, & k\lambda,\\
0, & 0, & 0, & 0,\ldots, & \frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}};
\end{array}\right\}$$

donc son déterminant, et, par suite, celui du système (C) est le produit des déterminants de ces deux systèmes.

Or le déterminant du système (2) se réduit à son terme principal

$$\beta\gamma\ldots\varkappa\pi_n$$

ou simplement

$$\beta\gamma\ldots\varkappa.$$

puisque π_n est l'unité; la condition proposée

$$C = \pm\beta\gamma\ldots\varkappa$$

sera donc remplie en prenant égal à l'unité en valeur absolue le déterminant des n^2 nombres entiers du système (1), ce qui est la conclusion que nous avions annoncée, et qu'il s'agissait d'obtenir.