JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULES VIEILLE

Sur les équations différentielles de la dynamique réduites au plus petit nombre possible de variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 201-224.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__201_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur les équations différentielles de la dynamique réduites au plus petit nombre possible de variables;

PAR M. JULES VIEILLE.

Soient $L=0$, $M=0$, $N=0$, etc., les équations de condition qui existent entre les coordonnées x, y, z, x', etc., des différents points d'un système en mouvement, et qui sont données par la nature de chaque problème. Désignons par n le nombre des points matériels, par i le nombre de ces équations de condition. On peut en tirer les valeurs de i coordonnées en fonction des $3n-i$ autres, ou, plus généralement, on peut concevoir que les $3n$ coordonnées soient remplacées par des fonctions connues de $3n-i$ nouvelles variables θ, φ, ψ, etc., et, par cette transformation, on sait que la formule générale de la dynamique

$$(1)\quad \sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0$$

se partage en $3n-i$ équations distinctes, qui suffisent pour déterminer les valeurs de θ, φ, ψ, etc., en fonction du temps.

Lagrange a donné, dans la deuxième partie de la *Mécanique analytique,* une forme remarquable à ces équations différentielles. Ce qui les caractérise et les rend éminemment propres à la résolution de la plupart des problèmes, c'est que les termes différentiels qu'elles renferment proviennent uniquement d'une seule fonction T, qui n'est autre que la demi-somme des forces vives de tous les points du système.

Cependant ces équations, si utiles, sont omises dans les Traités de mécanique les plus répandus.

La démonstration de Lagrange n'est pas complète. Elle suppose, en effet, que l'expression de chaque *différentielle* dx, en fonction des nouvelles variables θ, φ, ψ, etc., ne diffère de la *variation* correspondante δx que par le changement du d en δ. Or cela est bien vrai, lorsque la fonction des variables θ, φ, ψ, etc., que x représente, ne contient pas le temps t explicitement. Mais il n'en est plus ainsi, si x est une fonction explicite de t et de θ, φ, ψ, etc.; soit

$$x = f(t, \theta, \varphi, \psi, \ldots).$$

Alors la différentielle dx renferme le terme $\frac{df}{dt}dt$ qui n'a pas son correspondant dans la variation δx, puisqu'en prenant cette variation on doit laisser t constant.

C'est pourquoi nous croyons faire une chose utile à l'enseignement en reprenant l'analyse de Lagrange, et lui donnant toute la rigueur désirable; en même temps, nous en simplifierons l'algorithme, puis nous appliquerons ces équations à divers problèmes de dynamique, dont elles fournissent une solution très-simple.

Soient donc θ, φ, ψ, etc., les variables réduites au plus petit nombre possible, dont x, y, z, x', etc., sont des fonctions connues, déduites des équations de condition

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

comme ces dernières peuvent contenir le temps t explicitement, cette variable entrera généralement dans les fonctions que x, y, z, x', etc., représentent. Posons

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta', \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\psi}{dt} = \psi', \ldots.$$

On aura, pour $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, δx, δy, δz, des expressions de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha + a\theta' + a_1\varphi' + \ldots, & \delta x = a\delta\theta + a_1\delta\varphi + \ldots, \\ \frac{dy}{dt} = \beta + b\theta' + b_1\varphi' + \ldots, & \delta y = b\delta\theta + b_1\delta\varphi + \ldots, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma + c\theta' + c_1\varphi' + \ldots, & \delta z = c\delta\theta + c_1\delta\varphi + \ldots, \end{cases}$$

α, β, γ représentant les dérivées partielles de x, y, z, par rapport à t. Ces quantités, ainsi que a, b, c, a_1, b_1, c_1, etc., sont des fonctions connues de t, θ, φ, ψ, etc.

Cela posé, avant de substituer dans l'équation (1) les valeurs de

$x, y, z, \frac{dx}{dt}, \ldots, \delta x$, etc., on transforme le trinôme

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$

en deux groupes contenant des différentielles du premier ordre, et soumis, l'un au signe d, l'autre au signe δ; à cet effet, on a identiquement

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

en sorte que l'équation (1) prend la forme

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum m\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)\right] \\ &- \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0. \end{aligned} \right.$$

Maintenant, nous calculerons séparément les deux quantités

$$\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right);$$

mais, comme on devra finalement égaler à zéro l'ensemble des termes que multipliera chacune des variations indépendantes $\delta\theta$, $\delta\varphi$, etc., et que d'ailleurs ces variables entrent évidemment de la même manière dans les calculs, nous nous attacherons seulement à faire ressortir la composition du coefficient de $\delta\theta$.

On aura ainsi

$$\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z = (H + P\theta' + Q\varphi' + \ldots)\delta\theta + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = G + H\theta' + P\frac{\theta'^2}{2} + Q\theta'\varphi' + \ldots,$$

en posant

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= G, \\ \alpha a + \beta b + \gamma c &= H, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= P, \\ \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 &= Q \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \end{aligned}$$

Différentions la première expression par d et la deuxième par δ, il viendra $\left(\text{en observant que } \frac{d.\delta\theta}{dt} = \delta.\frac{d\theta}{dt} = \delta.\theta'\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)$$
$$= \delta\theta \times \frac{d}{dt}(\mathrm{H} + \mathrm{P}\theta' + \mathrm{Q}\varphi' + \ldots) + (\mathrm{H} + \mathrm{P}\theta' + \mathrm{Q}\varphi' + \ldots)\delta\theta' + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = \left(\frac{d\mathrm{G}}{d\theta} + \theta'\frac{d\mathrm{H}}{d\theta} + \frac{\theta'^2}{2}\frac{d\mathrm{P}}{d\theta} + \theta'\varphi'\frac{d\mathrm{Q}}{d\theta} + \ldots\right)\delta\theta$$
$$+ (\mathrm{H} + \mathrm{P}\theta' + \mathrm{Q}\varphi' + \ldots)\delta\theta' + \ldots.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (3), les *termes multipliés par* $\delta\theta'$ *disparaissent d'eux-mêmes*, c'est cette réduction qui fait le succès de la méthode. Et il reste pour le coefficient de la variation $\delta\theta$

$$(4)\ \sum m\left[\frac{d}{dt}(\mathrm{H}+\mathrm{P}\theta'+\mathrm{Q}\varphi'+\ldots) - \left(\frac{d\mathrm{G}}{d\theta}+\theta'\frac{d\mathrm{H}}{d\theta}+\frac{\theta'^2}{2}\frac{d\mathrm{P}}{d\theta}+\theta'\varphi'\frac{d\mathrm{Q}}{d\theta}+\ldots\right)\right].$$

Actuellement, soit T la demi-somme des forces vives du système, on aura

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = \sum m\left(\mathrm{G} + \mathrm{H}\theta' + \mathrm{P}\frac{\theta'^2}{2} + \mathrm{Q}\theta'\varphi' + \ldots\right):$$

et, par suite, on voit que l'expression (4) n'est autre chose que

$$\frac{d\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'}\right)}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{d\theta}.$$

Quant à la partie du premier membre de l'équation (3) qui renferme les forces appliquées (X, Y, Z), savoir :

$$\sum(\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z),$$

sa transformation en fonction des variables θ, φ, ψ, etc., s'effectuera par voie de simple substitution, et on connaîtra ainsi, dans chaque cas particulier, le coefficient de $\delta\theta$ qui en provient. Dans les applications ordinaires de la dynamique, il existe une *fonction des forces ;* c'est-à-dire qu'on a

$$\sum(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = d\mathrm{V},$$

V étant fonction de θ, φ, ψ, etc.; et, par suite.

$$\sum (\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z) = \delta \mathrm{V} = \frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\delta\theta + \ldots .$$

Le coefficient complet de $\delta\theta$, dans l'équation (3), sera donc

$$\frac{d\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'}\right)}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{d\theta} - \frac{d\mathrm{V}}{d\theta}.$$

En définitive, l'équation (3) se partage dans les suivantes

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d.\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'}\right)}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{d\theta} - \frac{d\mathrm{V}}{d\theta} = 0, \\ &\frac{d.\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi'}\right)}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{d\varphi} - \frac{d\mathrm{V}}{d\varphi} = 0, \\ &\frac{d.\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\psi'}\right)}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{d\psi} - \frac{d\mathrm{V}}{d\psi} = 0 \ldots . \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont en même nombre que les variables θ, φ, ψ, etc., dont dépend à chaque instant la position du système.

Quand la fonction T ne renfermera pas t explicitement, on obtiendra immédiatement une intégrale première des équations (5) en les multipliant respectivement par $d\theta$, $d\varphi$, $d\psi$, et ajoutant les produits, cette intégrale

$$(6) \qquad \mathrm{T} - \mathrm{V} = \text{constante}$$

contient le principe des forces vives.

M. Liouville a fait une application remarquable de ces équations (*Journal de Mathématiques*, t. XI) à divers cas où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer : notamment le problème du mouvement d'un point attiré par deux centres fixes, dans lequel Euler n'était parvenu à séparer les variables que par un calcul très-pénible, se trouve réduit aux quadratures avec une extrême simplicité; et la même méthode résout sans plus de peine le cas, imaginé par Lagrange, d'un troisième centre fixe d'attraction placé au milieu de la droite qui joint les deux autres.

Pour montrer avec quelle facilité ces équations se prêtent à la solution des problèmes, nous allons présenter quelques applications. Nous traiterons d'abord deux problèmes qui ont été proposés dans ces dernières années au concours d'agrégation.

Problème. *Déterminer le mouvement d'une droite pesante, libre de tourner dans l'espace autour d'un de ses points supposé fixe.*

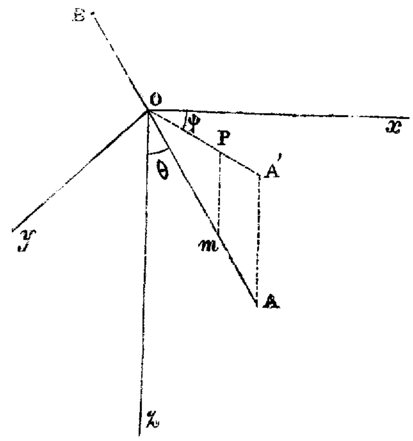


Fig. 1.

On prendra pour origine le point fixe O, et l'axe des z vertical dans le sens de la pesanteur. Ici, les variables qui déterminent la position du système à chaque instant sont au nombre de deux, savoir, l'angle $AOz = \theta$, que fait la tige AB avec l'axe des z, et l'angle $A'Ox = \psi$, que sa projection horizontale fait avec l'axe des x. Soient M la masse de la tige que nous ne supposons pas homogène; a la distance de son centre de gravité au point O; r le rayon vecteur Om d'un point quelconque m; r' la projection OP de r; on cherchera d'abord les fonctions T et V.

On a immédiatement

$$V = Mag \cos \theta.$$

Pour la fonction T, on trouve successivement

$$T = \frac{1}{2} \sum m \left(\frac{dr'^2 + r'^2 d\psi^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) = \frac{1}{2} \sum mr^2 (\theta'^2 + \sin^2 \theta . \psi'^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\theta'^2 + \sin^2 \theta . \psi'^2) M (a^2 + K^2);$$

MK^2 désigne le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe perpendiculaire à sa direction et passant par le centre de gravité.

Cela posé, l'équation (6) donne d'abord

$$\theta'^2 + \sin^2\theta\,\psi'^2 = C + \frac{2g}{a + \frac{K^2}{a}}\cos\theta, \tag{7}$$

C étant une constante arbitraire.

Il suffira donc d'associer à cette équation l'une des équations (5); comme T et V ne contiennent pas la variable ψ, on choisira de préférence la suivante

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\psi'}\right)}{dt} - \frac{dT}{d\psi} - \frac{dV}{d\psi} = 0$$

qui se réduit à

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\psi'}\right)}{dt} = 0,$$

d'où

$$\frac{dT}{d\psi'} = \text{constante},$$

ou bien

$$\sin^2\theta\,.\,\psi' = C', \tag{8}$$

C' étant une deuxième constante arbitraire.

Les équations (7) et (8) résolvent le problème proposé.

Si la tige pesante se réduisait à un point matériel distant du point O de la longueur l, les équations de son mouvement se déduiraient des deux précédentes en faisant

$$K = 0 \quad \text{et} \quad a = l.$$

Il suit de là que la tige pesante se meut autour du point O, comme un pendule simple de longueur

$$l = a + \frac{K^2}{a}.$$

Le problème qui nous occupe est ainsi ramené au pendule conique.

On tirera des équations (7) et (8) les valeurs de dt et $d\psi$ en fonction de θ,

$$dt = \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\left(C + \frac{2g}{l}\cos\theta\right)\sin^2\theta - C'^2}}, \quad d\psi = \frac{C'\, d\theta}{\sin\theta\sqrt{\left(C + \frac{2g}{l}\cos\theta\right)\sin^2\theta - C'^2}}.$$

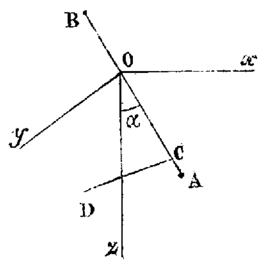
Ces formules sont réductibles aux fonctions elliptiques, et ne peuvent conséquemment s'intégrer que par approximation. Quand la tige sera homogène, on aura aisément la longueur du pendule simple correspondant; car, en désignant par L la longueur de la tige, et supposant, pour plus de simplicité, que le point fixe soit l'une des extrémités, on trouve

$$l = a + \frac{K^2}{a} = \frac{\int r^2 dr}{aL} = \frac{2}{3}L.$$

Ainsi, dans ce cas, la longueur du pendule simple est $\frac{2}{3}$ de celle de la tige.

Les constantes C et C′ se détermineront d'après les données initiales.

Fig. 2.



Soient α l'angle AOz que la tige AB, dans sa position initiale, fait avec la verticale; CD la direction de la percussion qui lui a été imprimée, et qu'on peut supposer perpendiculaire à la tige. Celle-ci commencera évidemment à tourner dans le plan OCD; car il n'y a pas de raison pour que le mouvement commence d'un côté de ce plan plutôt que d'un autre : d'ailleurs, on peut considérer ce plan comme celui de deux axes principaux relatifs au point O. On appliquera donc la formule de la vitesse angulaire de rotation, comme s'il y avait un axe fixe perpendiculaire en O au plan OCD. Soient ω cette vitesse angulaire, $\mu\nu$ l'intensité de la percussion, f la distance OC, on aura

$$\omega = \frac{\mu\nu f}{M(a^2 + K^2)};$$

or la vitesse initiale v d'un point quelconque M de la tige est $r\omega$. Si donc on remplace le premier membre de l'équation (7), qui n'est autre que $\frac{v^2}{r^2}$, par la valeur ci-dessus de ω^2, on aura l'équation

$$(9) \qquad \omega^2 = c + \frac{2g}{l}\cos\alpha, \quad \left(l = a + \frac{k^2}{a}\right),$$

qui déterminera la constante c.

Quant à la constante c', on a, d'après l'équation (8),

$$c' = \sin^2\alpha \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0;$$

or $\sin\alpha \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ représente la vitesse initiale de la projection horizontale du point de la tige dont la distance au point fixe est l'unité; on a donc, en désignant par ε l'angle de la direction CD avec une perpendiculaire au plan zOA,

$$\sin\alpha \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = \omega\cos\varepsilon;$$

il en résulte

$$(10) \qquad c' = \omega\cos\varepsilon.\sin\alpha.$$

Nous ne dirons rien du cas où la tige s'écarte très-peu de la verticale. On néglige alors les quantités très-petites du troisième ordre en θ et α, et les valeurs de θ et ψ s'obtiennent en fonction du temps sous forme finie par les formules du pendule conique.

Quelles conditions doit remplir la percussion initiale *pour que la tige décrive un cône droit* autour de la verticale?

On a constamment, dans ce cas,

$$\theta = \alpha,$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

D'après la valeur précédente de $\frac{d\theta}{dt}$, on en conclut

$$\sin^2\alpha\left(c + \frac{2g}{l}\cos\alpha\right) - c'^2 = 0;$$

mais cette équation exprime seulement que $\frac{d\theta}{dt}$ est nul pour $\theta = \alpha$, c'est-à-dire à l'origine du mouvement : il faut y joindre la condition $d\frac{d\theta}{dt} = 0$; ce qui donne

$$\frac{g}{\cos\alpha} = \frac{c'^2}{\sin^4\alpha}.$$

Il reste à substituer dans ces deux équations les valeurs des constantes c et c' tirées des équations (9) et (10); la première se réduit alors à

$$\cos\varepsilon = 1, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon = 0,$$

et la seconde se réduit à

$$\omega^2 = \frac{g\sin^2\alpha}{l\cos\alpha}:$$

$\varepsilon = 0$ signifie que la percussion doit être dirigée perpendiculairement au plan vertical qui contient la tige. L'équation

$$\omega^2 = \frac{g\sin^2\alpha}{l\cos\alpha}$$

permettra d'assigner la grandeur de la percussion correspondante à un angle α donné; et réciproquement, si la percussion est donnée, on en conclura l'angle α, en résolvant l'équation

$$\cos^2\alpha + \frac{\omega^2 l}{g}\cos\alpha - 1 = 0,$$

qui admet toujours pour $\cos\alpha$ *une* valeur réelle, et plus petite que 1. Enfin, l'équation (8) montre que le cône droit sera décrit d'un mouvement uniforme : la vitesse de ce mouvement

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{\sin\alpha}.$$

Désignons cette vitesse par k, et remplaçons ω par la valeur précédente, nous aurons

$$k = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

On voit que, dès que l'angle α sera donné, cette vitesse k sera déterminée indépendamment de la percussion; quelle que soit cette vitesse, il y aura une valeur minima $\sqrt{\frac{g}{l}}$, au-dessous de laquelle k ne saurait tomber : mais cette limite ne sera jamais atteinte, car il faudrait que α fût zéro; la tige serait alors verticale, et comme ω serait nul aussi, il n'y aurait pas de percussion; la tige resterait donc en repos.

Pour compléter la solution du problème, il nous reste à calculer la pression variable P que supporte le point fixe. Cette recherche conduit à des résultats dignes d'être remarqués. La méthode consiste, comme on sait, à imaginer qu'on applique en O une force égale et contraire à la pression; on peut alors regarder la tige comme devenue libre, et appliquer les six équations d'équilibre d'un corps solide. Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la pression P; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité de la tige; les forces perdues s'expriment aisément en fonction de x_1, y_1, z_1, et les sommes de leurs composantes parallèlement à chaque axe sont

$$-M\frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad -M\frac{d^2y_1}{dt^2}, \quad -M\left(\frac{d^2z_1}{dt^2}-g\right).$$

D'après cela, les trois premières équations d'équilibre, qui renferment seules les composantes X_1, Y_1, Z_1 de la pression, sont

$$(11)\qquad \begin{cases} X_1 + M\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \\ Y_1 + M\frac{d^2y_1}{dt^2} = 0, \\ Z_1 + M\left(\frac{d^2z_1}{dt^2} - g\right) = 0. \end{cases}$$

On a, d'ailleurs,

$$x_1 = a\sin\theta\cos\psi, \quad y_1 = a\sin\theta\sin\psi, \quad z_1 = a\cos\theta.$$

Ces équations feront connaître les trois composantes de la pression en fonction des variables θ et ψ, qui, elles-mêmes, sont des fonctions connues de t, par les formules précédentes; mais le calcul direct des valeurs de X_1, Y_1, Z_1 serait fort compliqué. On le simplifie notablement, en ayant recours aux trois équations des moments. Ces équations, dans lesquelles nous introduisons les coordonnées $x_1 y_1 z_1$, sont

$$(12)\quad \begin{cases} x_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \\ y_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = \dfrac{g a y_1}{l}, \\ z_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} - x_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = -\dfrac{g a x_1}{l}. \end{cases}$$

Elles se réduisent à deux distinctes.

Des équations (11) et (12) combinées, on déduit, sans difficulté,

$$Y_1 x_1 - X_1 y_1 = 0 \quad \text{et} \quad Z_1 y_1 - Y_1 z_1 = Mg\, y_1 \left(1 - \frac{a}{l}\right).$$

Ces équations mettent en évidence deux propriétés de la pression : 1° les composantes X_1, Y_1 étant proportionnelles à x_1, y_1, il s'ensuit que *la pression est toujours comprise dans le plan vertical qui contient la tige;* 2° les composantes Z_1, Y_1 n'étant pas proportionnelles aux coordonnées z_1, y_1 $\left(\text{puisque } l \text{ ou } a + \frac{k^2}{a} \text{ est essentiellement différent de } a\right)$, il s'ensuit que *la pression n'est pas dirigée suivant la tige.*

Les deux équations précédentes permettent, en outre, d'exprimer X_1 et Y_1 en fonction de Z_1 *sans coefficients différentiels :*

$$Y_1 = \left[Z_1 - Mg\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]\frac{y_1}{z_1}, \quad X_1 = \left[Z_1 - Mg\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]\frac{x_1}{z_1};$$

on en conclut

$$P^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = Z_1^2 + \left[Z_1 - Mg\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]^2 \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}.$$

Tout se réduit donc à déterminer Z_1 en fonction de θ. La troisième équation (11) donne, à cet effet,

$$Z_1 = M\left(g + a\cos\theta \cdot \frac{d\theta^2}{dt^2} + a\sin\theta \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}\right).$$

On connaît déjà $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ; on en tirera $\frac{d^2\theta}{dt^2}$; et, substituant, il viendra

$$Z_1 = M\left[g\left(1 - \frac{a}{l}\right) + ac\cos\theta + \frac{3ag}{l}\cos^2\theta\right];$$

par suite,

$$P^2 = M^2 \left[\begin{array}{c} g^2 \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 + a^2 c^2 + 2agc\left(1 + \frac{2a}{l}\right)\cos\theta \\ + \frac{3ag^2}{l}\left(2 + \frac{a}{l}\right)\cos^2\theta \end{array} \right].$$

L'inclinaison γ de la pression sur la verticale sera également connue en fonction de θ, puisque

$$\cos\gamma = \frac{Z_1}{P}.$$

La grandeur et la direction de la pression ne dépendent explicitement que de la variable θ, et non de ψ. Quand l'angle θ sera constant, c'est-à-dire dans le cas où la tige décrit un cône droit, la pression sera constante, et sa direction décrira également un cône droit autour de la verticale. La valeur générale de P se réduit, dans ce cas, à

$$P = Mg\sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}\operatorname{tang}^2\alpha};$$

on a, d'ailleurs,

$$Z_1 = Mg;$$

d'où

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}\operatorname{tang}^2\alpha}},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{a}{l}\operatorname{tang}\alpha.$$

Comme $\frac{a}{l}$ est < 1, l'angle au centre du cône droit que décrit la pression est plus petit que celui du cône droit que décrit la tige.

Ces dernières formules, relatives au cas du cône droit, s'obtiendraient directement et d'une manière beaucoup plus simple, en remarquant que les *forces effectives* sont alors immédiatement connues de grandeur et de direction, puisque chaque point m décrit un cercle dont le rayon ρ est $r\sin\alpha$, avec une vitesse

$$v = r\omega = r\sin\alpha\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

La force effective $\frac{mv^2}{\rho}$ a donc pour valeur $\frac{mrg}{l}\operatorname{tang}\alpha$, et comme sa direction ne varie pas d'un point à un autre, la résultante des forces effectives est égale à leur somme

$$\sum \frac{mv^2}{\rho} = \mathrm{M}a\frac{g}{l}\,\mathrm{tang}\,\alpha.$$

Cette résultante, prise en sens contraire et composée avec la pesanteur $\mathrm{M}g$, donne, pour la pression P, la valeur précédemment trouvée.

Problème II. *Déterminer le mouvement d'un fil flexible et inextensible suspendu à un point fixe o et chargé de deux points matériels pesants m, m'. On suppose qu'à l'origine du mouvement, les deux points matériels aient été écartés de la verticale sans sortir d'un plan vertical passant par le point fixe, puis abandonnés à eux-mêmes sans vitesse initiale.*

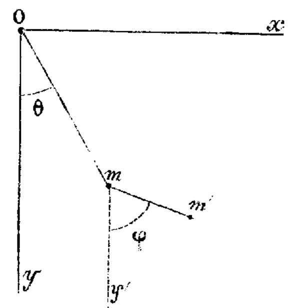


Fig. 3.

Le mouvement oscillatoire de chaque point aura évidemment lieu dans le plan vertical yox qui passe par la position initiale du fil. Soit $om = a$, $mm' = b$; les deux inconnues du problème sont les angles $moy = \theta$, $m'my' = \varphi$ que font les deux portions du fil avec la verticale.

On a, pour le point m,

$$x = a\sin\theta,$$
$$y = a\cos\theta,$$

et pour m',

$$x' = a\sin\theta + b\sin\varphi,$$
$$y' = a\cos\theta + b\cos\varphi;$$

d'où l'on conclut aisément

$$\mathrm{V} = (m + m')ga\cos\theta + m'gb\cos\varphi.$$

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\left[(m + m')a^2.\theta'^2 + m'b^2\varphi'^2 + 2m'ab\cos(\varphi - \theta).\theta'\varphi'\right].$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (5), fournissent les deux équations du mouvement :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &(m+m')a\frac{d^2\theta}{dt^2}+m'b\cos(\varphi-\theta)\frac{d^2\varphi}{dt^2}-m'b\sin(\varphi-\theta)\frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}-\frac{d\theta}{dt}\right)\\ &\qquad\qquad -m'b\sin(\varphi-\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\frac{d\varphi}{dt}+(m+m')g\sin\theta=0.\\ &b\frac{d^2\varphi}{dt^2}+a\cos(\varphi-\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2}-a\sin(\varphi-\theta)\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}-\frac{d\theta}{dt}\right)\\ &\qquad +a\sin(\varphi-\theta)\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+g\sin\varphi=0. \end{aligned}\right.$$

On pourrait remplacer l'une d'elles par l'*équation des forces vives*, qui n'est que du premier ordre; mais nous ne le ferons pas, parce que cette dernière équation se prête moins bien à la détermination des *petites oscillations* dont nous allons nous occuper.

Si les oscillations sont supposées très-petites, on pourra négliger les carrés de θ, φ, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, et les produits de ces variables; les équations (13) se réduisent ainsi aux deux suivantes :

$$(m+m')a\frac{d^2\theta}{dt^2}+m'b\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(m+m')g\theta=0,$$

$$b\frac{d^2\varphi}{dt^2}+a\frac{d^2\theta}{dt^2}+g\varphi=0.$$

La première peut encore se simplifier, eu égard à la seconde, et l'on a finalement le système

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &ma\frac{d^2\theta}{dt^2}+g(m+m')\theta-gm'\varphi=0,\\ &a\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d^2\varphi}{dt^2}+g\varphi=0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations sont linéaires et à coefficients constants, tandis que si l'on avait employé l'équation des forces vives, on aurait obtenu une équation, du premier ordre à la vérité, mais *non linéaire*, puisqu'elle eût évidemment renfermé les carrés de $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$.

La méthode ordinaire conduit aux intégrales générales

$$\theta = A_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2 \cos t\sqrt{r_2} + B_1 \sin t\sqrt{r_1} + B_2 \sin t\sqrt{r_2},$$

$$\varphi = A_1\mu_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2\mu_2 \cos t\sqrt{r_2} + B_1\mu_1 \sin t\sqrt{r_1} + B_2\mu_2 \sin t\sqrt{r_2};$$

A_1, A_2, B_1, B_2 sont quatre constantes arbitraires; r_1, r_2 sont des quantités réelles et positives, racines de l'équation du deuxième degré en r,

$$(15)\qquad [(m+m')g - mar](g-br) - m'agr = 0,$$

et μ_1, μ_2 sont les valeurs correspondantes de μ, tirées de l'équation

$$(16)\qquad \mu = \frac{ar}{g-br};$$

μ_1 et μ_2 sont de signes contraires, car l'une des racines de l'équation (15) est plus petite que $\frac{g}{b}$, et l'autre plus grande que $\frac{g}{b}$, puisque l'hypothèse $r=\frac{g}{b}$ rend le premier membre négatif. Comme on suppose qu'il n'y a pas de vitesses initiales, on doit avoir, pour $t=0$,

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

ce qui entraîne

$$B_1 = 0 \quad \text{et} \quad B_2 = 0.$$

Soient α et β les valeurs initiales de θ et de φ, on aura

$$(17)\qquad A_1 + A_2 = \alpha, \quad A_1\mu_1 + A_2\mu_2 = \beta,$$

d'où l'on tirera les valeurs des constantes A_1 et A_2. Cela fait, le mouvement du système sera déterminé par les formules

$$(18)\qquad \begin{cases} \theta = A_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2 \cos t\sqrt{r_2}, \\ \varphi = A_1\mu_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2\mu_2 \cos t\sqrt{r_2}. \end{cases}$$

Dans le cas où les deux points matériels se trouveraient à l'origine du mouvement en ligne droite avec le point de suspension, on aurait

$$\alpha = \beta,$$

et, par suite,

$$A_1 = \frac{\alpha(1-\mu_2)}{\mu_1-\mu_2}, \quad A_2 = \frac{\alpha(\mu_1-1)}{\mu_1-\mu_2}.$$

Soit $\mu_1 > 0$, μ_2 sera < 0; il est aisé de voir, en outre, que μ_1 sera > 1, en sorte que les valeurs des constantes $A_1 A_2$ seront positives. Si l'on demandait quelle condition doit être remplie pour que *chacun des points m et m' oscille comme un pendule simple,* on poserait, dans les équations (17), $A_1 = 0$ ou bien $A_2 = 0$; soit $A_2 = 0$, il en résulte

$$A_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \mu_1 = \frac{\beta}{\alpha},$$

et, par suite, l'équation (16) donne

$$r_1 = \frac{\beta g}{a\alpha + b\beta};$$

cette valeur, étant substituée dans l'équation (15), conduit à une relation entre les masses m, m', les distances a, b, et les écarts α, β, savoir :

$$(19) \qquad (m + m')a\alpha^2 + (m + m')(b - a)\alpha\beta - m'b\beta^2 = 0.$$

Telle est la condition cherchée : elle est impossible si $\alpha = \beta$, car l'hypothèse $\alpha = \beta$ réduit l'équation précédente à $mb = 0$, d'où $m = 0$ ou $b = 0$, ce qui veut dire que les deux points matériels se réduisent à un seul. Effectivement, les équations (18) donneraient, dans ce cas, pour θ et φ, des valeurs constamment égales entre elles,

$$\theta = \varphi = \alpha \cos t\sqrt{r_1},$$

c'est-à-dire que les deux points matériels demeureraient toujours en ligne droite avec le point de suspension, ce qui est évidemment impossible, à moins qu'ils ne se confondent.

Étant données les masses m, m' et les distances a, b, l'équation (19) fournira toujours une valeur réelle, positive et plus petite que 1, du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$; soit par exemple $a = b$, on aura

$$\alpha = \beta\sqrt{\frac{m'}{m + m'}},$$

puis

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{m + m'}{m'}}$$

et

$$r_1 = \frac{g}{a\left(1 + \sqrt{\frac{m'}{m+m'}}\right)}.$$

En général, quand la condition (19) sera remplie, on aura

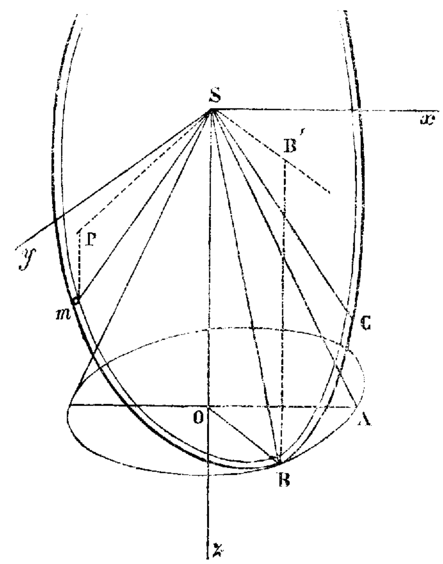
$$\theta = \alpha \cos t\sqrt{r_1}, \quad \varphi = \beta \cos t\sqrt{r_1};$$

les durées des petites oscillations seront donc les mêmes pour les deux pendules, mais leur amplitude sera différente; ils seront en même temps d'un même côté de la verticale, et se confondront en même temps avec elle.

Problème III. *Une roue circulaire porte, à sa circonférence, un canal annulaire, dans l'intérieur duquel on a introduit une sphère homogène pesante m, d'un très-petit diamètre, égal à celui du canal; cette roue s'appuie, par un point* B *de sa circonférence, sur un plan horizontal* AOB, *et, par son centre* S, *sur un axe fixe vertical* SO *incliné au plan de la roue d'un angle connu* OSB $= \alpha$. *On suppose qu'on fasse rouler la roue sur le plan horizontal, de manière que son point d'appui décrive un cercle de rayon* OB *avec une vitesse constante. Le cône droit dont l'axe est* SO *et le demi-angle au centre* α, *est ainsi touché successivement, suivant toutes ses génératrices, par le plan de la roue mobile.*

On demande les lois du mouvement du centre de la sphère (abstraction faite du frottement).

Fig. 4.



Une solution fausse de ce problème a été donnée dans le tome XIX des *Annales de Gergonne*, page 360. L'auteur prend pour expression de la force accélératrice effective qui anime le point m, la quantité $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$, r étant le rayon de la roue, et θ l'angle que le rayon Sm fait avec un rayon fixe tracé dans le plan de la roue. Mais il y a là une erreur grave, dont l'effet n'est rien moins que de confondre l'élément de la *trajectoire réellement décrite* par le mobile, avec l'élément de la circonférence de la roue.

Prenons pour axe des z la verticale SO, et faisons passer le plan des zx par l'arête SA, suivant laquelle la roue mobile touchait le cône à l'origine du mouvement; au bout du temps t, soient SB l'arête de contact, SC la position qu'occupe à cette époque, sur le plan de la roue, le rayon qui coïncidait primitivement avec SA; Sm le rayon vecteur de la sphère : sa position sera déterminée par les angles

$$m\mathrm{SO} = \varphi \quad \text{et} \quad \mathrm{PS}x = \psi,$$

SP étant la projection horizontale de Sm; mais ces deux angles ne sont pas indépendants l'un de l'autre.

Soit θ l'angle variable CSm. Si l'on désigne par k la vitesse constante et donnée avec laquelle l'angle AOB est décrit, on aura

$$\text{angle AOB} = kt;$$

et comme il résulte de la nature du mouvement que

$$\text{arc AB} = \text{arc BC},$$

on en conclut

$$\text{angle BSC} = kt \sin\alpha$$

et

$$\text{angle } m\mathrm{SB} = \theta - kt\sin\alpha;$$

nous désignerons, pour abréger, ce dernier angle par ω.

20 $$\omega = \theta - kt\sin\alpha.$$

Cela posé, il est facile d'exprimer les angles φ et ψ en fonction de ω.

En effet, l'angle trièdre rectangle $SOmB$ donne d'abord

(21) $$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\omega.$$

Soit SB' la projection horizontale de l'arête SB, on a

$$\psi = PSB' + B'Sx = PSB' + BOA = PSB' + kt;$$

PSB' mesure l'angle dièdre qui a pour arête SO dans le trièdre déjà considéré. On a donc

$$\operatorname{tang} PSB' = \frac{\operatorname{tang}\omega}{\sin\alpha}.$$

Par conséquent,

(22) $$\psi = kt + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\operatorname{tang}\omega}{\sin\alpha}\right).$$

A l'aide des formules (21) et (22), le problème est ramené à déterminer ω en fonction du temps. Comme nous n'avons ici qu'une *seule fonction variable* ω, il suffira d'une seule des équations (5)

$$\frac{d.\frac{dT}{d\omega'}}{dt} - \frac{dT}{d\omega} - \frac{dV}{d\omega} = 0,$$

$$V = mgr\cos\varphi = mgr\cos\alpha\cos\omega,$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \sin^2\varphi\frac{d\psi^2}{dt^2}\right).$$

Si l'on substitue pour φ, $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ leurs valeurs tirées des formules (21) et (22), on trouve que l'expression de T se réduit à cette forme très-simple

$$T = \frac{1}{2}mr^2[\omega'^2 + 2\sin\alpha . k\omega' + (1 - \cos^2\alpha\cos^2\omega)k^2].$$

En définitive, l'équation du mouvement est

$$r\frac{d^2\omega}{dt^2} - r\cos^2\alpha\cos\omega\sin\omega . k^2 + g\cos\alpha\sin\omega = 0;$$

en la multipliant par $2\,d\omega$, on l'intègre une première fois, et l'on a

(23) $$r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + k^2 r\cos^2\alpha\cos^2\omega - 2g\cos\alpha\cos\omega + c = 0,$$

c étant une constante arbitraire, qu'on déterminera d'après les circonstances initiales. Enfin, le calcul de ω en fonction de t est ramené à une quadrature

$$(24) \qquad t = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\pm \sqrt{r}.d\omega}{\sqrt{2g\cos\alpha.\cos\omega - k^2 r\cos^2\alpha\cos^2\omega - c}};$$

cette intégrale ne peut être calculée que par approximation, excepté pour certaines valeurs de c. Si l'on fait $k = 0$, ce qui revient à supposer la roue immobile, ω se confond avec θ, et l'on retrouve la formule ordinaire du pendule simple; seulement, la gravité g est ici remplacée par sa composante $g\cos\alpha$ dans le plan de la roue.

ω étant connu en fonction de t par l'intégrale précédente, les équations (20), (21) et (22) donnent θ, φ et ψ en fonction de la même variable. L'élimination de t entre les expressions de φ et ψ fournit ensuite l'équation polaire de la surface conique décrite par le rayon vecteur de la sphère. Si l'on transforme cette dernière équation en coordonnées rectilignes, au moyen des relations

$$z = r\cos\varphi, \quad \tang\varphi = \frac{y}{x},$$

cette transformée, combinée avec l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

détermine la courbe à double courbure décrite par le centre de la sphère dans l'espace; enfin la vitesse de la sphère dans sa trajectoire sera également connue en fonction du temps par la formule

$$v^2 = r^2\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + 2k\sin\alpha\frac{d\omega}{dt} + (1 - \cos^2\alpha\cos^2\omega)k^2\right].$$

Considérons le cas particulier où l'on aurait, à l'origine du mouvement,

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt} = k\sin\alpha.$$

C'est ce qui aura lieu si la sphère est primitivement en A dans le canal, et qu'elle y reçoive une vitesse initiale précisément égale à celle avec laquelle le rayon SA décrit la circonférence de la roue. Dans cette hypothèse, l'équation (23) donne

$$c = 2g\cos\alpha - k^2 r^2 \cos^2\alpha,$$

et cette valeur, substituée dans (24), conduit à l'intégrale

$$t = \sqrt{r}\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\cos\omega)[k^2 r\cos^2\alpha(1+\cos\omega) - 2g\cos\alpha]}},$$

qu'on peut obtenir sous forme finie; car, en posant

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = u,\quad k^2 r\cos^2\alpha - g\cos\alpha = a,\quad g\cos\alpha = b,$$

cette intégrale devient

$$t = \sqrt{r}\int \frac{du}{u\sqrt{a - bu^2}} = \sqrt{\frac{r}{a}}\, l\left(\frac{-\sqrt{a-bu^2}+\sqrt{a}}{u}\right),$$

et, en remplaçant u par sa valeur, on a

$$c' e^{t\sqrt{\frac{a}{r}}} = \frac{-\sqrt{a - b\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\omega}+\sqrt{a}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega}.$$

Pour déterminer c', on fait, dans cette équation, $t = 0$ et $\omega = 0$, d'où l'on conclut $c' = 0$, et, par conséquent, *tang* $\frac{1}{2}\omega$ *sera constamment nul.*

Ainsi, dans l'état initial supposé, la sphère ne quitterait pas le plan horizontal, et décrirait le cercle AB avec une vitesse constante égale à $kr\sin\alpha$.

La formule (24) s'intégrerait encore complétement, si l'on supposait un état initial tel, que la constante c fût nulle, et qu'en outre le coefficient de $\cos\omega$ sous le radical fût égal à celui de $\cos^2\omega$. Soient θ_0 et $\frac{d\theta_0}{dt}$ les valeurs initiales de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$. L'hypothèse dans laquelle nous nous plaçons entraîne les deux conditions

$$\left(\frac{d\theta_0}{dt} - k\sin\alpha\right)^2 = k^2\cos^2\alpha\cos\theta_0(1-\cos\theta_0),$$

$$2g = k^2 r\cos\alpha;$$

l'expression de dt prend alors la forme

$$dt = \pm \sqrt{\frac{r}{h}} \frac{d\omega}{\sqrt{2\cos\omega\,(1-\cos\omega)}},$$

en désignant, pour abréger, $g\cos\alpha$ par h.

Si l'on fait

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = u,$$

il vient (en prenant d'abord le signe $+$, ce qui suppose que ω croisse avec t)

$$dt = \sqrt{\frac{r}{h}} \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u} = c' e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}},$$

pour $t = 0$, on a

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = u = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_0;$$

donc

$$c' = \frac{1-\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_0}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_0}.$$

Pour que cette valeur soit réelle, il faut que l'angle θ_0 soit au plus égal à $\frac{\pi}{2}$, et alors la constante c' sera plus petite que 1, ou au plus égale à 1, pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

Résolvons l'intégrale précédente par rapport à u, et remplaçons cette variable par $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$, nous aurons

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = \frac{2c'e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}}}{c'^2 e^{2t\sqrt{\frac{h}{r}}}+1}.$$

En prenant le signe $-$ dans l'expression de dt, on arrive à la même intégrale.

La valeur de $\tang \frac{1}{2}\omega$ peut s'écrire $\frac{2M}{M^2+1}$ $\left(\text{en posant } c'e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}} = M\right)$. La dérivée de cette quantité, par rapport à M, est $\frac{2(1-M^2)}{(M^2+1)^2}$; par conséquent, tant que l'on aura $M < 1$, $\tang \frac{1}{2}\omega$ ira en croissant avec le temps. La variable ω atteindra donc un maximum pour la valeur de t qui satisfera à la condition

$$c'e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}} = 1, \quad \text{d'où} \quad t\sqrt{\frac{h}{r}} = l\left(\frac{1}{c'}\right)$$

$\left(\text{on a vu ci-dessus que } \frac{1}{c'} \text{ est plus grand que } 1\right)$; à cette époque

$$\tang \frac{1}{2}\omega = 1,$$

et, par suite,

$$\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Ce maximum de ω s'accorde bien avec l'expression différentielle

$$dt = \sqrt{\frac{r}{h}} \frac{d\omega}{\sqrt{2\cos\omega(1-\cos\omega)}}.$$

Le temps continuant à croître, ω décroît, puisque la dérivée de $\tang \frac{1}{2}\omega$ devient négative, et ce décroissement continue indéfiniment, sans que ω se réduise à zéro autrement que pour $t = \infty$.

La formule (20) donnera l'expression de θ en fonction explicite de t

$$\theta = kt\sin\alpha + 2.\operatorname{arc}\left\{\tang \frac{2c'e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}}}{c'^2e^{2t\sqrt{\frac{h}{r}}}+1}\right\};$$

mais la recherche des maxima et minima de cette variable serait compliquée.