JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Mémoire sur les simplifications que peuvent apporter les changements de coordonnées dans les questions relatives au mouvement de la chaleur

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 1-20.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__1_0>

JOURNAL

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE

Sur les simplifications que peuvent apporter les changements de coordonnées dans les questions relatives au mouvement de la chaleur;

PAR M. J. BERTRAND.

Les équations qu'il faut intégrer pour déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans un corps de forme quelconque contiennent quatre variables indépendantes, le temps et les trois coordonnées qui déterminent la position d'un point. Lorsque l'on connaît à priori les surfaces isothermes, ces trois coordonnées peuvent être remplacées par un seul paramètre, ce qui simplifie notablement le problème.

Les deux seules questions relatives au mouvement de la chaleur dans lesquelles on ait fait usage de ce moyen de simplification sont celles de la propagation de la chaleur dans une sphère ou dans un cylindre à base circulaire, lorsque les températures initiales ne dépendent que de la distance au centre ou à l'axe. M. Lamé a traité aussi, par cette méthode, une question importante relative aux températures permanentes, et il a fait voir, en général, que la connaissance des surfaces isothermes permet d'exprimer sous forme d'intégrale définie la température de chaque point.

Dans ce Mémoire, j'ai résolu les deux questions suivantes :

1°. Dans quels cas est-il possible de ramener l'équation du mouvement de la chaleur à ne contenir que deux variables indépendantes, le temps et un seul paramètre relatif à la position du point considéré, ou, ce qui revient au même, quels sont tous les systèmes de surfaces qui jouissent de la propriété de rester isothermes pendant toute la durée du refroidissement d'un corps, pourvu qu'elles le soient au commencement?

2°. Dans quels cas est-il possible de ramener l'équation du mouvement de la chaleur à ne contenir que trois variables indépendantes, le temps et deux paramètres relatifs à la position du point considéré, ou, ce qui revient au même, quels sont tous les systèmes de lignes qui jouissent de la propriété de rester isothermes pendant toute la durée du refroidissement d'un corps, pourvu qu'elles le soient au commencement?

Je prouve que la première condition ne peut être remplie que si les surfaces isothermes sont des sphères ou des cylindres; la seconde exige que les lignes isothermes soient des cercles ou des hélices.

J'ai traité aussi le cas où l'on demanderait qu'une même série de surfaces restassent isothermes pendant le refroidissement d'un corps, pour un état initial convenablement choisi. Je prouve qu'une infinité de systèmes différents satisfont à cette condition, et qu'ils présentent tous ce caractère particulier que, pendant la durée du refroidissement, les températures de deux points quelconques conservent un rapport constant. La sphère et le cylindre font seuls exception à ce dernier théorème.

I.

1. L'équation qui exprime le mouvement de la chaleur est, en prenant pour unité le coefficient que Fourier désigne par K,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}. \tag{1}$$

Cherchons d'abord la condition pour qu'on puisse substituer aux trois coordonnées x, y, z un seul paramètre λ. Supposons, pour cela, que v soit fonction seulement de t et de λ; on aura

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx},\quad \frac{dv}{dy}=\frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dy},\quad \frac{dv}{dz}=\frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dz},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2v}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\frac{dv}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dx^2},\quad \frac{d^2v}{dy^2}=\frac{d^2v}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\frac{dv}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dy^2},$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{d^2v}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2+\frac{dv}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dz^2},$$

ce qui met l'équation (1) sous la forme

$$(2)\qquad \frac{dv}{dt}=\frac{d^2v}{d\lambda^2}\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]+\frac{dv}{d\lambda}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}\right).$$

Pour que x, y, z disparaissent de cette équation, il faut que l'on ait

$$(3)\qquad \frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}=F(\lambda),$$

$$(4)\qquad \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2=F_1(\lambda),$$

F et F_1 étant des fonctions quelconques.

2. L'équation (4) a une signification géométrique très-simple. Elle exprime que deux surfaces infiniment voisines, correspondant à des valeurs infiniment peu différentes de λ, sont partout également distantes. On sait, en effet, que si $\lambda=\varphi(x,y,z)$ représente une série de surfaces, la distance de celles qui correspondent aux paramètres λ et $\lambda+d\lambda$ est exprimée, en chaque point, par la formule

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}}.$$

Si donc l'équation (4) est satisfaite, cette distance sera constante pour tous les points d'une même surface [*]. Il résulte de cette remarque,

---

[*] Si l'on contestait la rigueur de ce raisonnement, on pourrait lui substituer les considérations suivantes :

L'équation

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2=F_1(\lambda)$$

que les surfaces qui répondent aux mêmes valeurs de λ sont *parallèles*, c'est-à-dire qu'on pourrait obtenir l'une quelconque d'entre elles en portant sur les normales de l'une d'elles des longueurs constantes. On sait que de pareilles surfaces ont les mêmes normales, et que les rayons de courbure aux points correspondants ont une différence égale à la distance de ces points.

3. En divisant membre à membre les équations (3) et (4), on trouve

$$\frac{\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}=\frac{F(\lambda)}{F_1(\lambda)}.$$

Cette équation exprime, ce qui, du reste, est évident à priori, que les surfaces considérées doivent être aussi isothermes dans le sens que M. Lamé attache à cette dénomination, c'est-à-dire qu'elles doivent être isothermes dans un corps en équilibre de température; ces surfaces doivent donc satisfaire à la condition que j'ai donnée dans mon Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales, et qui consiste en

---

peut être remplacée par

$$(a)\qquad \left(\frac{d\lambda_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda_1}{dz}\right)^2=1,$$

en posant $\lambda=\varpi(\lambda_1)$ et $[\varpi'(\lambda_1)]^2=F_1[\varpi(\lambda_1)]$.

Pour intégrer l'équation (a), occupons-nous d'abord de

$$\left(\frac{d\lambda_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda_1}{dy}\right)^2=1.$$

Cette équation, considérée comme ayant lieu entre les coordonnées x, y, λ_1 d'un point, représente une surface développable dont la normale fait en chaque point, avec l'axe des λ_1, un angle dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Cette surface a évidemment pour arête de rebroussement une hélice tracée sur un cylindre de base quelconque et dont chaque élément fait avec le plan de la base un angle ayant pour tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Or les sections d'une pareille surface par des plans perpendiculaires aux arêtes du cylindre (sections qui ont pour équation $\lambda_1=$ constante) sont, comme on sait, les développantes de la section droite du cylindre, par conséquent des courbes parallèles entre elles, et l'on voit sans peine ce que, si l'on désigne par s la longueur comptée à partir d'une surface fixe sur une ligne coupant toutes les surfaces à angle droit, et par R, r les rayons de courbure principaux de l'une des surfaces à l'extrémité de la ligne s, l'expression

$$\frac{\frac{d^2 s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} - \frac{ds}{d\lambda}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$$

doit être fonction du seul paramètre λ.

Dans le cas actuel, la ligne s est droite et sa longueur ne dépend évidemment que de λ; il en sera donc de même de $\frac{ds}{d\lambda}$ et $\frac{d^2 s}{d\lambda^2}$. On conclut de là que $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$ ne doit dépendre aussi que de λ, c'est-à-dire que cette somme doit être constante sur une même surface isotherme.

Si nous désignons par R_1, r_1, R_2, r_2 les rayons de courbure princi-

---

que les deux sections $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_1 = \beta$ sont des courbes parallèles dont la distance est égale à $(\alpha - \beta)$.

Si nous reprenons maintenant l'équation

$$(a) \qquad \left(\frac{d\lambda_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda_1}{dz}\right)^2 = 1,$$

je dis que les deux surfaces qui ont pour équations $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_1 = \beta$ sont parallèles. Si, en effet, nous posons $\frac{d\lambda_1}{dz} = 0$ dans chacune de ces surfaces, nous aurons

$$\left(\frac{d\lambda_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda_1}{dy}\right)^2 = 1,$$

et $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_1 = \beta$ représenteront, d'après ce qui précède, deux courbes parallèles situées sur le plan des xy dont la distance sera $(\alpha - \beta)$: ce qui prouve que les cylindres circonscrits aux deux surfaces parallèlement à l'axe des z sont parallèles et situés à la distance $(\alpha - \beta)$. Mais le premier membre de (a) ne change pas quand on change de coordonnées, pourvu que les axes restent rectangulaires: deux cylindres circonscrits parallèlement à une droite quelconque seront donc parallèles et situés à une distance constante $(\alpha - \beta)$. Si donc l'on considère la première surface comme l'enveloppe d'un cylindre, l'autre sera l'enveloppe d'un cylindre parallèle situé à cette distance fixe du premier, et coïncidera, par conséquent, avec une surface parallèle à la première située à la distance $(\alpha - \beta)$.

paux en deux points déterminés d'une même surface, les rayons relatifs aux points correspondants de la surface parallèle située à la distance s seront R_1+s, r_1+s, R_2+s, r_2+s, et l'on devra par conséquent avoir, quel que soit s,

$$\frac{1}{R_1+s}+\frac{1}{r_1+s}=\frac{1}{R_2+s}+\frac{1}{r_2+s}.$$

Chassant les dénominateurs de cette équation, il vient

$$s^2(R_2+r_2-R_1-r_1)+R_2r_2(R_1+r_1)-R_1r_1(R_2+r_2)=0;$$

et, comme s désigne une quantité arbitraire, on en conclut

$$R_1+r_1=R_2+r_2,\quad R_1r_1(R_2+r_2)=(R_1+r_1)R_2r_2,$$

d'où l'on déduit évidemment

$$R_1=R_2,\quad r_1=r_2.$$

Les deux rayons de courbure sont donc constants en tous les points d'une même surface isotherme, et cette surface est, par suite, une sphère ou un cylindre droit à base circulaire. Les surfaces parallèles sont des sphères concentriques ou des cylindres de même axe.

II.

4. Supposons maintenant que l'on ne demande plus que les coordonnées x, y, z disparaissent d'elles-mêmes de l'équation (2), mais seulement qu'elles puissent disparaître pour un certain état initial.

Posons

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}=\varphi(x,y,z),$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2=\varphi_1(x,y,z);$$

l'équation (2) du paragraphe précédent deviendra

$$(a)\qquad \frac{dv}{dt}=\varphi(x,y,z)\frac{dv}{d\lambda}+\varphi_1(x,y,z)\frac{d^2v}{d\lambda^2}.$$

En appliquant cette équation à un second point d'une même surface isotherme dont nous désignerons les coordonnées par x', y', z', elle devra fournir la même valeur de $\frac{dv}{dt}$; on aura donc

$$\frac{dv}{d\lambda}[\varphi(x, y, z) - \varphi(x', y', z')] + \frac{d^2v}{d\lambda^2}[\varphi_1(x, y, z) - \varphi_1(x', y', z')] = 0,$$

d'où

$$(b) \qquad -\frac{\frac{d^2v}{d\lambda^2}}{\frac{dv}{d\lambda}} = \frac{\varphi(x, y, z) - \varphi(x', y', z')}{\varphi_1(x, y, z) - \varphi_1(x', y', z')}.$$

Le second membre de cette équation étant indépendant de t, le premier doit l'être aussi, et ne peut alors dépendre que de λ; on aura donc

$$(c) \qquad \frac{\frac{d^2v}{d\lambda^2}}{\frac{dv}{d\lambda}} = F(\lambda),$$

d'où l'on conclut sans peine que v est de la forme

$$(d) \qquad v = F_1(\lambda)\psi(t) + \psi_1(t),$$

F_1 étant une fonction qui dépend de F, et ψ et ψ_1 deux fonctions inconnues de la seule variable t. Remarquons, avant d'aller plus loin, que si $\varphi(x, y, z)$ dépendait du seul paramètre λ, ce qui serait le cas traité dans le paragraphe précédent, le second membre de l'équation (b) se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$, et nos conclusions ne seraient plus applicables.

On peut évidemment substituer au paramètre λ une fonction quelconque de la forme $F_1(\lambda)$; posons donc

$$F_1(\lambda) = \lambda_1,$$

la valeur obtenue pour v deviendra

$$(e) \qquad v = \lambda_1\psi(t) + \psi_1(t).$$

En substituant cette valeur dans l'équation (a), on trouve

$$(f)\qquad \frac{d\psi_1}{dt}+\lambda_1\frac{d\psi}{dt}=\psi(t)\left(\frac{d^2\lambda_1}{dx^2}+\frac{d^2\lambda_1}{dy^2}+\frac{d^2\lambda_1}{dz^2}\right).$$

Cette équation prouve que $\frac{d^2\lambda_1}{dx^2}+\frac{d^2\lambda_1}{dy^2}+\frac{d^2\lambda_1}{dz^2}$ est une fonction de λ_1 et de t, et comme cette somme est évidemment indépendante de t, elle ne dépend que de λ_1. Posons donc

$$\frac{d^2\lambda_1}{dx^2}+\frac{d^2\lambda_1}{dy^2}+\frac{d^2\lambda_1}{dz^2}=\varpi(\lambda_1);$$

l'équation (f) deviendra

$$\frac{d\psi_1}{dt}+\lambda_1\frac{d\psi}{dt}=\varpi(\lambda_1)\,\psi(t).$$

En considérant, dans cette équation, $\psi(t)$ comme une fonction inconnue, on en tire

$$\psi(t)=e^{\frac{\varpi(\lambda_1)}{\lambda_1}t}\left[C-\frac{1}{\lambda_1}\int_0^t e^{-\frac{\varpi(\lambda_1)}{\lambda_1}t}\frac{d\psi_1}{dt}\,dt\right].$$

Posons

$$e^{\frac{\varpi(\lambda_1)}{\lambda_1}}=\alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda_1}=\varphi(\alpha);$$

il viendra

$$\psi(t)=\alpha^t.C-\alpha^t\varphi(\alpha)\int^t\alpha^{-t}\frac{d\psi_1}{dt}\,dt.$$

ou

$$\frac{\psi(t).\alpha^{-t}-C}{\varphi(\alpha)}=-\int_0^t\alpha^{-t}\frac{d\psi_1}{dt}\,dt.$$

Différentiant les deux membres par rapport à t,

$$\frac{\frac{d\psi(t)}{dt}\alpha^{-t}-\alpha^{-t}\log\alpha\psi(t)}{\varphi(\alpha)}=\alpha^{-t}\frac{d\psi_1}{dt},$$

ou, en supprimant α^{-t}, et chassant le dénominateur,

$$\frac{d\psi(t)}{dt}-\log\alpha\psi(t)=\frac{d\psi_1}{dt}\cdot\varphi(\alpha).$$

Prenant les logarithmes des deux membres, puis la dérivée par rapport à t,

$$\frac{\frac{d^2\psi}{dt^2} - \log\lambda \frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\psi}{dt} - \log\lambda\,\psi(t)} = \frac{\frac{d^2\psi_1}{dt^2}}{\frac{d\psi_1}{dt}}.$$

Or le premier membre ne peut être indépendant de λ que si

$$\frac{\frac{d^2\psi}{dt^2}}{\frac{d\psi}{dt}} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\psi},$$

c'est-à-dire

$$\psi(t) = \mathrm{A}e^{mt},$$

m désignant une constante arbitraire. On déduit de là

$$\frac{\frac{d^2\psi_1}{dt^2}}{\frac{d\psi_1}{dt}} = m,$$

donc

$$\psi_1(t) = \mathrm{B}e^{mt} + \mathrm{C};$$

et, par suite, l'expression

$$v = \lambda_1 \psi(t) + \psi_1(t)$$

devient

$$v = e^{mt}(\mathrm{A}\lambda_1 + \mathrm{B}) + \mathrm{C},$$

ou, en posant $\mathrm{A}\lambda_1 + \mathrm{B} = \lambda_2$,

$$v = e^{mt}\lambda_2 + \mathrm{C}.$$

La constante C peut évidemment être supprimée, car cela revient à changer le zéro de l'échelle thermométrique, et la valeur de v devient enfin

$$(k) \qquad v = e^{mt}\lambda_2.$$

On vérifie que cette valeur satisfait effectivement à l'équation de la propagation de la chaleur, pourvu que l'on ait

$$m\lambda_2 = \frac{d^2\lambda_2}{dx^2} + \frac{d^2\lambda^2}{dy^2} + \frac{d^2\lambda_2}{dz^2}.$$

Lorsque cette condition sera remplie, et elle peut l'être évidemment d'une infinité de manières, la formule (k) montre que, si les températures initiales sont représentées par la formule $v = \lambda_2$, *tous les points du corps éprouveront, pendant la durée du refroidissement, des variations de températures telles que le rapport des températures de deux points quelconques sera indépendant du temps.*

III.

5. Cherchons maintenant dans quels cas un changement de coordonnées peut réduire à trois le nombre des variables indépendantes qui entrent dans l'équation. Nommons α et β les deux paramètres qui pourront ainsi être substitués à x, y, z. En supposant que la température des points du corps ne dépende que de t, α et β, on aura

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d\beta}{dx},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\beta^2}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2v}{d\alpha\, d\beta}\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{dv}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d^2\beta}{dx^2},$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d\beta}{dy},$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\beta^2}\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + 2\frac{d^2v}{d\alpha\, d\beta}\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \frac{dv}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d^2\beta}{dy^2},$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dz} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d\beta}{dz},$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2v}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\beta^2}\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2v}{d\alpha\, d\beta}\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz} + \frac{dv}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d^2\beta}{dz^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation du mouvement de la chaleur, elle devient

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} = {} & \frac{d^2v}{d\alpha^2}\left[\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2\right] + \frac{d^2v}{d\beta^2}\left[\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2\right] \\ & + 2\frac{d^2v}{d\alpha\, d\beta}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz}\right) \\ & + \frac{dv}{d\alpha}\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{d^2\alpha}{dz^2}\right) + \frac{dv}{d\beta}\left(\frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} + \frac{d^2\beta}{dz^2}\right).\end{aligned}$$

Pour que x, y, z disparaissent de cette équation, il faut que

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2=f_1(\alpha,\beta),\\ &\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2=f_2(\alpha,\beta),\\ &\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz}=f_3(\alpha,\beta),\\ &\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}=f_4(\alpha,\beta),\\ &\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}+\frac{d^2\beta}{dz^2}=f_5(\alpha,\beta), \end{aligned}\right.$$

f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 pouvant être des fonctions quelconques de α et β.

6. Avant de chercher la forme générale des fonctions α et β qui peuvent satisfaire aux cinq équations précédentes, remarquons qu'en nommant α_1 et β_1 deux solutions quelconques, on aura une solution plus générale en posant

$$\alpha=\varphi(\alpha_1,\beta_1),\quad \beta=\varphi_1(\alpha_1,\beta_1),$$

quelles que soient les fonctions φ et φ_1. En substituant, en effet, ces valeurs dans les cinq équations (α), on vérifiera sans peine qu'elles seront satisfaites si α_1 et β_1 en forment une solution; les propriétés exprimées par les équations (α) appartiennent, par conséquent, à deux systèmes quelconques de surfaces se coupant suivant les lignes isothermes que nous voulons étudier.

Cela posé, les trois premières des équations (α) expriment que deux surfaces quelconques représentées par

$$\alpha=\text{constante},\quad \beta=\text{constante},$$

se coupent suivant une courbe le long de laquelle elles forment le même angle, et que, de plus, pour tous les points de cette courbe, la distance de deux surfaces infiniment voisines appartenant au même système est constante. D'après ce qui vient d'être dit, les surfaces qui ont pour équations

$$\alpha=\text{constante},\quad \beta=\text{constante},$$

ne sont pas assujetties à d'autre condition que celle d'être le lieu d'un nombre infini de courbes qui, pendant le refroidissement, restent constamment isothermes. On pourra donc, après avoir choisi arbitrairement une première surface, faire en sorte que, pour un point donné de chacune des lignes isothermes qui la composent, la distance à la surface infiniment voisine du même système ait une valeur infiniment petite donnée. En vertu des conditions précédentes, ces deux surfaces auront alors partout la même distance et seront parallèles. On pourra, de même, choisir une troisième surface parallèle à la seconde, qui, comme elle, sera le lieu d'une infinité de lignes isothermes, puis une quatrième parallèle à cette troisième, etc.; en sorte que, après avoir choisi arbitrairement une première surface, on pourra toujours faire en sorte que les autres surfaces du même système lui soient parallèles. Le premier système de surfaces étant choisi de cette manière, nous déterminerons le second comme il suit: Après avoir pris une ligne isotherme quelconque sur une surface du premier système, nous élèverons en un de ses points une normale à cette surface, jusqu'à la rencontre de la surface infiniment voisine. La courbe isotherme appartenant à la surface infiniment voisine et passant par l'extrémité de cette normale sera une seconde génératrice de la surface que nous formons; un point quelconque de cette nouvelle génératrice en fournira, de même, une troisième, puis une quatrième, et ainsi de suite. Or, d'après la manière dont nous obtenons ces diverses génératrices, nous sommes assurés qu'en un point de chacune d'elles, et, par conséquent, tout le long de la courbe d'intersection, la surface qui les contient coupe à angle droit la surface correspondante du premier système, et comme celles-ci sont des surfaces parallèles, les autres sont nécessairement des surfaces réglées. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Les lignes isothermes que nous considérons doivent toujours être situées sur une série de surfaces parallèles à l'une quelconque de celles qui sont le lieu d'un nombre infini de ces lignes. Elles sont aussi situées sur une série de surfaces réglées coupant les premières à angle droit.

7. Considérons l'un des systèmes de surfaces parallèles sur lesquels les lignes isothermes sont situées, et sur l'une de ces surfaces, en deux points d'une même ligne isotherme, deux éléments superficiels ayant la même surface $d\omega$. Par les différents points du contour de ces deux éléments, concevons les normales à la surface qui les contient, et prolongeons-les jusqu'à la surface infiniment voisine. Nous formerons ainsi deux petits volumes équivalents comme ayant même base et même hauteur, et pour que, au bout d'un temps infiniment petit, ces deux volumes aient conservé la même température (ce qui doit être, puisqu'ils sont sur une même ligne isotherme), il faut qu'ils aient gagné la même quantité de chaleur. Ceci devant avoir lieu dans toute hypothèse de distribution calorifique dans laquelle la température d'un point ne dépend que de deux paramètres qui définissent une courbe isotherme, on peut supposer que les surfaces isothermes soient précisément, au moment considéré, les surfaces parallèles que nous avons choisies. Dans cette hypothèse, les seuls flux de chaleur qui puissent modifier la température de nos petits volumes sont normaux à ces surfaces isothermes; mais, ces surfaces étant parallèles, les flux rapportés à la même superficie sont égaux en deux points de la même surface. Il entrera donc la même quantité de chaleur par les bases inférieures que nous avons supposées équivalentes, et il faudra, par suite, qu'il en sorte la même quantité par les bases supérieures, ce qui exige que ces bases soient aussi équivalentes. Mais en désignant par ε la distance infiniment petite des deux surfaces, et par R, r, R', r' les rayons de courbure de la première aux points considérés, ces deux bases sont égales à

$$d\omega\left[1+\varepsilon\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\right],$$

$$d\omega\left[1+\varepsilon\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}\right)\right].$$

Pour qu'elles soient équivalentes, on doit donc avoir

$$(\beta)\qquad \frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}.$$

Cette formule s'appliquant à deux points quelconques de l'une des surfaces, situés sur une même ligne isotherme, sera encore vraie pour deux points correspondants aux premiers, pris sur une surface parallèle située à la distance s; on aura donc

$$(\gamma) \qquad \frac{1}{R+s} + \frac{1}{r+s} = \frac{1}{R'+s} + \frac{1}{r'+s},$$

car, aux points correspondants de deux surfaces parallèles, les rayons de courbure diffèrent d'une quantité égale à la distance des deux surfaces. L'équation (γ) devant avoir lieu quel que soit s, on en déduit facilement

$$R = R', \qquad r = r',$$

et, par conséquent, on peut énoncer le théorème suivant :

Sur l'une quelconque des surfaces parallèles considérées, les deux rayons de courbure restent constants le long d'une même ligne isotherme.

Remarquons que l'une des surfaces parallèles considérées est une surface quelconque ayant pour génératrices les lignes isothermes dont nous cherchons la nature; nous pouvons donc supposer que ce soit l'une des surfaces réglées sur lesquelles nous avons vu que ces lignes étaient situées. Mais sur ces surfaces, les lignes isothermes sont fournies par leurs intersections, avec d'autres surfaces auxquelles leurs génératrices sont normales; elles sont, par conséquent, les trajectoires orthogonales de ces génératrices. Il résulte de là que :

Les lignes isothermes permanentes sont les trajectoires orthogonales des génératrices d'une série de surfaces réglées, telles que, sur chaque surface, le long d'une même trajectoire orthogonale, les deux rayons de courbure soient constants.

8. Pour déduire de cette dernière proposition la nature de ces surfaces réglées, nous ferons usage d'un théorème démontré par M. O. Bonnet, dans son Mémoire sur la théorie générale des surfaces. Ce théorème consiste en ce que, sur une surface gauche quelconque, l'inverse du produit des rayons de courbure en un point de l'une des génératrices peut s'exprimer par la formule suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{RR'}} = \frac{\sqrt{R_1 R'_1}}{n^2 + R_1 R'_1},$$

où R_1, R'_1 désignent les deux rayons de courbure de la surface au point où la génératrice rencontre *la ligne de striction*, et n la longueur de la génératrice comprise entre ce point et celui que l'on considère.

D'après cette formule, le théorème énoncé à la fin du paragraphe précédent peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\sqrt{R_1 R'_1}}{n^2 + R_1 R'_1} = \frac{\sqrt{R_2 R'_2}}{n'^2 + R_2 R'_2},$$

R_1, R'_1, R_2, R'_2 étant les rayons de courbure de la surface en deux points de la ligne de striction, et n, n' les portions de génératrice comprise entre ces points et l'une quelconque de leurs trajectoires orthogonales. En considérant sur une seconde trajectoire orthogonale deux points appartenant aux mêmes génératrices, n et n' augmenteront évidemment d'une même quantité α; on aura donc, quelque soit α,

$$\frac{\sqrt{R_1 R'_1}}{(n+\alpha)^2 + R_1 R'_1} = \frac{\sqrt{R_2 R'_2}}{(n'+\alpha)^2 + R_2 R'_2}.$$

Chassant les dénominateurs et égalant les coefficients des mêmes puissances de α, on trouve

$$n = n',$$
$$R_1 R'_1 = R_2 R'_2.$$

Il résulte de la première de ces deux équations que la ligne de striction coupe à angle droit les génératrices de la surface, car on peut l'obtenir en portant une longueur constante sur chaque génératrice à partir d'une même trajectoire orthogonale. Les deux rayons de courbure de la surface auront donc la même valeur tout le long de la ligne de striction, et nous sommes conduits à nous proposer la question suivante :

Quelles sont les surfaces gauches dont la ligne de striction coupe à angle droit les génératrices, et qui, de plus, a ses deux rayons de courbure constants pour tous les points de cette ligne ?

9. Pour que la ligne de striction d'une surface gauche coupe à angle droit les génératrices, il faut qu'en chaque point son plan osculateur soit normal à la surface, car les éléments de cette ligne sont, dans ce cas, les plus courtes distances entre deux génératrices consécutives, et deux éléments consécutifs sont alors perpendiculaires à une même génératrice. Le rayon de courbure de la ligne de striction sera donc égal, en chaque point, à celui d'une section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à la génératrice, et, par conséquent, il sera constant, puisque la courbure de cette section est évidemment égale à la somme des courbures principales de la surface. La seconde courbure de la ligne de striction sera aussi constante; on sait que l'on entend par seconde courbure le rapport d'un arc infiniment petit à l'angle des plans osculateurs qui répondent à ses extrémités. Or l'angle de ces plans osculateurs est le même que celui de deux génératrices consécutives de la surface gauche, lequel est égal, comme on le reconnaît aisément, à l'inclinaison de l'une d'elles sur le plan qui passe par l'autre et par le point où la première rencontre la ligne de striction. Mais en faisant tourner de 90 degrés autour de la tangente à la ligne de striction le système composé de ce plan et de cette génératrice, le plan devient normal à la surface et la génératrice coïncide avec la normale en un point infiniment voisin. Si donc on appelle α l'angle formé par la ligne de striction avec l'une des lignes de courbure, et R, r les rayons de courbure de la surface au point considéré, en vertu d'un théorème démontré dans mon Mémoire sur la théorie des surfaces, l'angle $d\theta$ que nous voulons évaluer sera donné par la formule

$$d\theta = ds \sin 2\alpha \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

Or, par hypothèse, R et r sont constants; α l'est aussi, puisque l'indicatrice est toujours semblable à elle-même, et que la ligne de striction est dirigée suivant une perpendiculaire à son asymptote. Le rapport $\frac{d\theta}{ds}$ est donc constant, et, par conséquent, les deux courbures de la ligne de striction sont les mêmes en tous ces points. Cette ligne est donc une hélice, et nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Toutes les lignes isothermes permanentes sont situées sur une série *de surfaces gauches ayant des hélices pour lignes de striction, et elles sont, sur chacune de ces surfaces, les trajectoires orthogonales des génératrices.*

10. En étudiant la surface gauche qui a une hélice pour ligne de striction, c'est-à-dire le lieu des perpendiculaires menées par les différents points d'une hélice à ses plans osculateurs, on reconnaît que les courbes qui coupent à angle droit les génératrices de cette surface sont des hélices de même pas que la ligne de striction et tracées sur des cylindres de même axe. Cette première surface étant connue ainsi que les lignes isothermes dont elle est le lieu, nous avons vu que les autres lignes isothermes seront les lignes qui correspondront aux premières sur une série de surfaces parallèles à la surface trouvée; on voit sans peine que de pareilles lignes sont toutes des hélices de même pas que les premières et tracées sur des cylindres de même axe. Un pareil système d'hélices peut évidemment être considéré comme résultant de l'intersection de ces cylindres par une série d'héliçoïdes à plan directeur; leurs équations peuvent donc se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2 = \alpha,$$

$$z - \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = \beta.$$

On vérifie que ces valeurs de α et β satisfont, en effet, aux cinq équations du § IV : on en tire

$$\frac{d\alpha}{dx} = 2x, \qquad \frac{d\alpha}{dy} = 2y, \qquad \frac{d\alpha}{dz} = 0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = 2, \qquad \frac{d^2\alpha}{dy^2} = 2, \qquad \frac{d^2\alpha}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{d\beta}{dy} = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{d\beta}{dz} = 1,$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{d^2\beta}{dy^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0;$$

on a donc

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2=4x^2+4y^2=4\alpha,$$

$$\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2=\frac{1}{x^2+y^2}+1=\frac{1}{\alpha}+1,$$

$$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz}=0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}=4,$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}+\frac{d^2\beta}{dz^2}=0.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la propagation de la chaleur, elle devient

$$\frac{dv}{dt}=4\frac{d^2v}{d\alpha^2}+\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\frac{d^2v}{d\beta^2}+4\frac{dv}{d\alpha}.$$

11. Dans la démonstration précédente, nous avons admis que les surfaces réglées sur lesquelles se trouvent les lignes isothermes étaient des surfaces gauches. Il faut encore chercher si aucune surface développable ne remplit les conditions qui leur sont imposées. Or, sur une surface développable, le rayon de courbure, aux différents points d'une même génératrice, varie proportionnellement à la distance du point considéré à l'arête de rebroussement. Si donc on nomme n et n' les distances comptées sur deux génératrices entre l'arête de rebroussement et une même trajectoire orthogonale des génératrices, et C et C' deux quantités constantes pour tous les points de ces génératrices, on devra avoir

$$nC=n'C'.$$

Mais si l'on considère une seconde trajectoire orthogonale des génératrices située à une distance α de la première, il faudra changer n et n' en $n+\alpha$ et $n'+\alpha$; on aura donc, quel que soit α,

$$(n+\alpha)C=(n'+\alpha)C',$$

d'où l'on tire

$$C = C', \quad n = n'.$$

La surface est donc telle que les trajectoires orthogonales des génératrices les coupent toutes à une même distance de l'arête de rebroussement. Si, par conséquent, on la développe sur un plan, l'arête de rebroussement se développera suivant une courbe telle, que les trajectoires orthogonales de ses tangentes les coupent toutes à une même distance du point de contact, ce qui exige que ces trajectoires aient un rayon de courbure constant et soient, par conséquent, des cercles; l'arête de rebroussement est alors un point, et la surface développable est un cône. La courbure de ce cône devant être constante sur une même trajectoire orthogonale aux génératrices, c'est-à-dire sur une même ligne de courbure, nous sommes conduits à nous proposer la question suivante :

Quels sont les cônes dont la courbure est constante le long d'une même ligne de courbure?

12. Si, par les différents points d'une même ligne de courbure, on mène des normales à une surface et que sur chaque normale on porte une longueur égale au rayon de courbure correspondant, le lieu des points ainsi obtenus est une courbe à laquelle toutes ces normales sont tangentes. Dans le cas actuel, tous les rayons de courbure étant égaux entre eux, cette courbe devra se trouver sur une surface parallèle au cône considéré, et, par conséquent, couper à angle droit toutes les normales. Il faut, par conséquent, qu'elle soit à la fois tangente et normale aux mêmes lignes, c'est-à-dire qu'elle se réduise à un point. La ligne de courbure du cône est située sur une sphère ayant ce point pour centre, et à laquelle le cône est évidemment circonscrit. C'est donc un cône droit à base circulaire.

13. On conclut de ce qui précède que les lignes isothermes situées sur ce cône sont, dans ce cas, des cercles dont les plans sont parallèles et les centres situés sur une même droite perpendiculaire à ces plans. Les surfaces parallèles au cône sont d'autres cônes de révolution autour du même axe, et les lignes correspondant aux cercles du premier sont d'autres cercles ayant leurs centres sur le même axe. Une seconde solution de la question que nous nous étions proposée est donc fournie par une série de cercles ayant tous leurs plans parallèles et le centre sur un même axe perpendiculaire à ces plans; les équations de pareils cercles sont

$$z = \alpha,$$
$$x^2 + y^2 = \beta.$$

En substituant ces valeurs de α et β dans l'équation de la propagation de la chaleur, elle devient

$$\frac{dv}{dt} = 4\beta \frac{d^2v}{d\beta^2} + 4\frac{dv}{d\beta} + \frac{d^2v}{d\alpha^2}.$$

Nous avons donc trouvé les deux seuls cas dans lesquels un changement de coordonnées peut diminuer le nombre des variables indépendantes dans les questions relatives au mouvement de la chaleur.