JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-G.-J. JACOBI

Mémoire sur l'équation différentielle à laquelle satisfont les séries $1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \ldots, 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \ldots$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 181-200.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__181_0>

MÉMOIRE

Sur l'équation différentielle à laquelle satisfont les séries

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \ldots,$$
$$2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots;$$

Par M. C.-G.-J. JACOBI.

(Extrait du Journal de M. Crelle, tome XXXIV. — Traduction de M. Puiseux.)

Le problème de définir par une équation différentielle une fonction donnée est, en général, indéterminé; car, au moyen de l'équation qui a lieu entre la fonction et la variable indépendante, on peut transformer l'équation différentielle d'une infinité de manières. Mais le problème devient déterminé si, la fonction n'étant pas algébrique, il s'agit, comme on le sous-entend ordinairement, de trouver une équation algébrique entre la variable indépendante, la fonction et ses dérivées. Parmi toutes les équations différentielles de cette sorte auxquelles une même fonction satisfait, il y en a une de l'ordre le moins élevé possible et dont les autres se déduisent par la différentiation. C'est de celle-là qu'il sera question dans ce Mémoire quand on parlera de l'équation différentielle à laquelle une fonction satisfait. Si l'on rend le premier membre rationnel et entier, le second étant zéro, le plus haut exposant dont se trouvera affectée la dérivée de l'ordre le plus élevé sera appelé le *degré de l'équation.*

On n'a pas de méthode générale pour reconnaître s'il existe une pareille équation différentielle finie entre la fonction et la variable indépendante, ou pour la trouver, en supposant qu'on soit assuré de son existence. Dans le cas seulement où la fonction satisfait à une équation différentielle *linéaire,* on a quelques procédés généraux pour s'en assurer et former l'équation différentielle elle-même. Si l'on considère en particulier la série

$$y = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots,$$

dont la loi est si simple, il n'y a, malgré cette simplicité, aucun moyen de reconnaître, *par la considération de la série elle-même,* si elle peut être définie par une équation différentielle finie, c'est-à-dire par une équation algébrique entre la variable indépendante, la fonction et ses dérivées. Et, s'il est possible de trouver une pareille équation à l'aide de la théorie des fonctions elliptiques, à quelles considérations indirectes et compliquées ne faut-il pas recourir! On est obligé de montrer d'abord que les quantités y et q peuvent s'exprimer en fonction d'une troisième variable k à l'aide des équations transcendantes

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}},$$

$$\log\frac{1}{q} = \frac{\pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi}}}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}}.$$

Bien que les méthodes variées de la théorie des fonctions elliptiques permettent d'abréger la démonstration de ce théorème remarquable, on n'y parvient cependant que par une longue chaîne de propositions délicates. Cela fait, on prouve que le numérateur et le dénominateur de l'expression de $\log\frac{1}{q}$ satisfont l'un et l'autre à une même équation différentielle du second ordre, où k est la variable indépendante. Alors il devient possible d'exprimer en y et k le rapport $\frac{d\log q}{dk}$, et, par suite, de remplacer, dans l'équation différentielle du second ordre qui a lieu entre y et k, les dérivées de y prises par rapport à k par d'autres prises par rapport à q. On obtient ainsi une équation qui détermine k au moyen de y et de ses dérivées relatives à q. Enfin, par une nouvelle différentiation et par l'élimination de k, on trouve entre y

et ses dérivées prises par rapport à q, une équation du troisième ordre et du second degré, qui est l'équation différentielle demandée. Relativement à y et à ses dérivées, elle monte à la *quatorzième dimension* : aussi, malgré tout ce que nous savons sur les formes quadratiques, il serait sans doute difficile de la vérifier par la substitution immédiate de la série. Je veux donner ici, avec quelques détails, le calcul assez pénible qui conduit à cette équation différentielle, dont la complication contraste singulièrement avec la simplicité de la série proposée.

La substitution

$$\cos\psi = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta}, \quad \sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta}, \quad \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} = \frac{k'}{\Delta},$$

où l'on a

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \quad \Delta = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

donne

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = -\frac{d\varphi}{\Delta},$$

et, par suite, les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \Delta\, d\varphi = k'^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta^3},\\ &\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3},\\ &\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = k'^2 \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3},\end{aligned}\right.$$

où les intégrales, comme dans tout ce qui suivra, doivent être supposées prises de o à $\frac{1}{2}\pi$. Si l'on désigne la fonction complète de première espèce par

$$K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

on a

$$kK = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{k^2} - \sin^2\varphi}}, \quad k'K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k'^2} + \sin^2\varphi}}.$$

En différentiant ces trois intégrales par rapport à k^2, et ayant égard aux formules (1), on obtient les équations suivantes :

$$\frac{dK}{d.k^2} = \frac{1}{2}\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2k'^2}\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{d.kK}{d.k^2} = \frac{1}{2k}\int\frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2kk'^2}\int\Delta\,d\varphi,$$

$$\frac{d.k'K}{d.k^2} = -\frac{1}{2k'}\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3} = -\frac{1}{2k'}\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}.$$

La dernière se trouve aisément, si l'on observe que $d.k^2 = -d.k'^2$.

On a, de plus, en ayant de nouveau égard aux équations (1),

$$\frac{d.\int\frac{k^2\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}}{d.k^2} = \frac{d.\int\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\left(\frac{1}{\Delta}-\Delta\right)d\varphi}{d.k^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos^2\varphi}{\Delta}+\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{d.\int\frac{1}{k}\Delta\,d\varphi}{d.k^2} = \frac{d.\int\sqrt{\frac{1}{k^2}-\sin^2\varphi}\,d\varphi}{d.k^2} = -\frac{1}{2k^3}\int\frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{d.\int\frac{k^2}{k'}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}}{d.k^2} = \frac{d.\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi}}}{d.k'^2} - \frac{d.\int\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi}\,d\varphi}{d.k'^2}$$

$$= \frac{1}{2k'^3}\int\left(\frac{k'^2\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3}+\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}\right) = \frac{1}{2k'^3}\int\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Si donc on pose

$$K = \frac{1}{2}\pi.A,\quad kK = \frac{1}{2}\pi.A_1,\quad k'K = \frac{1}{2}\pi.A_2,$$

et, en outre,

$$k^2\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2}\pi.B,$$

$$\frac{1}{k}\int\Delta\,d\varphi = \frac{1}{2}\pi.B_1,$$

$$\frac{k^2}{k'}\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2}\pi.B_2,$$

on aura

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dA}{d.k^2} = \dfrac{1}{2k^2k'^2}B, & \dfrac{dB}{d.k^2} = \dfrac{1}{2}A; \\ \dfrac{dA_1}{d.k^2} = \dfrac{1}{2k'^2}B_1, & \dfrac{dB_1}{d.k^2} = -\dfrac{1}{2k^4}A_1; \\ \dfrac{dA_2}{d.k^2} = -\dfrac{1}{2k^2}B_2, & \dfrac{dB_2}{d.k^2} = \dfrac{1}{2k'^4}A_2. \end{cases}$$

La première de ces équations montre que A satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d.k^2k'^2\dfrac{dA}{d.k^2}}{d.k^2} = \frac{1}{4}A,$$

ou, en faisant, pour abréger,

$$\frac{d.k^2}{k^2k'^2} = d.\log\frac{k^2}{k'^2} = dl,$$

à l'équation différentielle

$$\frac{d^2A}{dl^2} = \frac{1}{4}k^2k'^2A.$$

Cette équation différentielle ne change pas, quand on y change k en k'. La quantité

$$K' = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}$$

en est donc aussi une intégrale. Des deux équations

$$\frac{d^2A}{dl^2} = \frac{1}{4}k^2k'^2A, \quad \frac{d^2K'}{dl^2} = \frac{1}{4}k^2k'^2K',$$

il suit

$$A\frac{d^2K'}{dl^2} - K'\frac{d^2A}{dl^2} = 0;$$

et, en intégrant,

$$A\frac{dK'}{dl} - K'\frac{dA}{dl} = \alpha,$$

où α est une constante. Cette équation peut être écrite

$$\frac{d.\dfrac{K'}{A}}{dl} = \frac{\alpha}{A^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d.\dfrac{K'}{A}}{d.k^2} = \frac{\alpha}{k^2k'^2.A^2}.$$

La fraction $\frac{1}{k'^2 A^2} = \frac{\pi^2}{4 k'^2 K^2}$ peut se développer pour de petites valeurs de k en une série ordonnée suivant les puissances positives de k^2, et commençant par l'unité; d'où il suit, par l'intégration, que, pour les petites valeurs de k, la valeur de $\frac{K'}{A} = \frac{\pi K'}{2 K}$ est, aux quantités près de l'ordre k^2,

$$\alpha \log k^2 + \beta,$$

β désignant une nouvelle constante. Euler a trouvé les valeurs de α et de β dans les *Opuscula varii argumenti*, savoir :

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \log 4.$$

En substituant la valeur de α, et posant

$$\log q = -\frac{\pi K'}{K} = -\frac{2 K'}{A},$$

on trouve

$$(3) \qquad \frac{d.\log q}{d.k^2} = \frac{1}{k^2 k'^2 A^2} = \frac{1}{k'^2 A_1^2} = \frac{1}{k^2 A_2^2},$$

ou encore

$$(3\ bis) \qquad \frac{d.\log \frac{k^2}{k'^2}}{d.\log q} = A^2, \quad \frac{d.\log \frac{1}{k'^2}}{d.\log q} = A_1^2, \quad \frac{d.\log k^2}{d.\log q} = A_2^2.$$

Si, à l'aide des formules (3), on introduit la différentielle de $\log q$ à la place de $d.k^2$, les formules (2) deviennent

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dA}{d\log q} &= \frac{1}{2} BA^2, & \frac{dB}{d\log q} &= \frac{1}{2} k^2 k'^2 A^3, \\ \frac{dA_1}{d\log q} &= \frac{1}{2} B_1 A_1^2, & \frac{dB_1}{d\log q} &= -\frac{1}{2} \frac{k'^2}{k^4} A_1^3, \\ \frac{dA_2}{d\log q} &= -\frac{1}{2} B_2 A_2^2, & \frac{dB_2}{d\log q} &= \frac{1}{2} \frac{k^2}{k'^4} A_2^3. \end{aligned} \right.$$

Si donc on pose

$$A = \frac{1}{C}, \quad A_1 = \frac{1}{C_1}, \quad A_2 = \frac{1}{C_2},$$

et qu'on indique par des accents les dérivées des fonctions C, prises par rapport à $\log q$, on aura

$$(5)\qquad 4C^3C'' = -k^2k'^2,\quad 4C_1^3C_1'' = \frac{k'^2}{k^4},\quad 4C_2^3C_2'' = \frac{k^2}{k'^4}.$$

Je remarque maintenant que, si dans l'expression

$$\frac{\sqrt{4h+1}-1}{\sqrt{4h+1}+1}$$

on substitue pour h les trois quantités précédentes

$$-k^2k'^2,\quad \frac{k'^2}{k^4},\quad \frac{k^2}{k'^4},$$

en prenant pour la deuxième le radical négativement, on trouve

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad \frac{1}{k'^2},\quad k^2,$$

c'est-à-dire, d'après les équations ($3\,bis$), les trois quantités dont les logarithmes ont pour différentielles

$$A^2\,d\log q,\quad A_1^2\,d\log q,\quad A_2^2\,d\log q,$$

ou bien

$$\frac{d\log q}{C^2},\quad \frac{d\log q}{C_1^2},\quad \frac{d\log q}{C_2^2};$$

mais on a

$$d\log\frac{\sqrt{4h+1}-1}{\sqrt{4h+1}+1} = \frac{dh}{h\sqrt{4h+1}} = \frac{d\log h}{\sqrt{4h+1}}.$$

Si donc on substitue pour h dans $\frac{d\log h}{\sqrt{4h+1}}$ les trois valeurs (5), on obtiendra

$$\frac{d\log q}{C^2},\quad \frac{d\log q}{C_1^2},\quad \frac{d\log q}{C_2^2}.$$

Il suit de là que la même équation différentielle

$$(6)\qquad d\log C^3C'' = \sqrt{16\,C^3C''+1}\,\frac{d\log q}{C^2}$$

a lieu pour les trois quantités C, C_1, C_2, pourvu qu'on prenne le radical négativement quand on met C_1 à la place de C. En rendant cette équation rationnelle, on trouve, pour les trois fonctions

$$C = \frac{\pi}{2K}, \quad C_1 = \frac{\pi}{2kK}, \quad C_2 = \frac{\pi}{2k'K},$$

la même équation différentielle du troisième ordre et du second degré

$$(7) \qquad C^2(CC''' + 3C'C'')^2 = C''^2(16C^3C'' + 1).$$

Si l'on pose

$$C = y^{-2},$$

et qu'on indique encore par des accents les dérivées de y prises par rapport à $\log q$, on trouve successivement

$$C' = -2y^{-3}y', \quad C'' = -2y^{-3}y'' + 6y^{-4}y'^2,$$
$$C''' = -2y^{-3}y''' + 18y^{-4}y'y'' - 24y^{-5}y'^3,$$

et, par suite,

$$CC''' + 3C'C'' = -2y^{-5}y''' + 30y^{-6}y'y'' - 60y^{-7}y'^3.$$

Alors l'équation différentielle (7) devient, en la multipliant par $\frac{1}{4}y^{18}$.

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(y^2y''' - 15yy'y'' + 30y'^3)^2 + 32(yy'' - 3y'^2)^3 \\ &\quad = y^{10}(yy'' - 3y'^2)^2. \end{aligned} \right.$$

Aux trois valeurs de C correspondent trois valeurs de y qui satisfont à cette équation, savoir :

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}.$$

Si donc on a égard aux développements en séries ordonnées, suivant les puissances de q que la théorie des fonctions elliptiques fournit pour ces quantités, on obtient le théorème suivant :

Théorème. *Si l'on désigne par y une des trois séries*

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + 2q^{16} \pm 2q^{25} + \ldots,$$
$$2\left(\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \sqrt[4]{q^{49}} + \ldots\right),$$

et qu'on prenne $d\log q$ pour la différentielle constante, il existe entre

y et q l'équation différentielle suivante du troisième ordre et du second degré,

$$\begin{aligned}(y^2 d^3 y - 15 dy d^2 y + 30 dy^3)^2 + 32(yd^2 y - 3dy^2)^3 \\ = y^{10}(yd^2 y - 3dy^2)^2 (d\log q)^2.\end{aligned}$$

Les deux séries

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

$$1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

qui satisfont toutes deux à l'équation différentielle précédente, se déduisent l'une de l'autre par le changement de q en $-q$. Plus généralement, comme l'équation différentielle (8) ne contient pas la variable q elle-même, mais seulement des différentielles prises par rapport à $\log q$, on peut, de chaque expression de y qui satisfait à cette équation, en déduire une autre par la substitution de αq à la place de q, α étant une constante arbitraire. Si dans la série

$$2\sqrt[4]{q}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \ldots) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},$$

qui est une solution de l'équation différentielle (8), on change q en $-q$, ce qui revient à poser $\alpha = -1$, cette série se trouve multipliée par une racine huitième de l'unité. L'équation différentielle (8) ne doit donc pas changer quand on y multiplie y par une racine huitième de l'unité, c'est-à-dire que les dimensions de ses termes, évaluées par rapport à y et à ses dérivées, doivent différer entre elles de multiples de 8. Et, en effet, par rapport à y et à ses dérivées, les termes du premier membre sont de la sixième dimension, tandis que ceux du second sont de la quatorzième.

L'équation

$$d\log q = \frac{d.k^2}{k^2 k'^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2} = \frac{d.k^2}{k^2 k'^2 y^4}$$

reste la même, quand on y change q en q^m, et en même temps y en $\frac{y}{\sqrt[4]{m}}$ (ou C en $\sqrt{m}\,$C). Il suit de là que, *étant donnée une fonction* *qui satisfait à l'équation différentielle* (8), *on en déduit une autre qui satisfait à la même équation, en multipliant la fonction donnée par* $\sqrt[4]{m}$ *et changeant en même temps* q *en* q^m. Il faut donc que, dans chaque terme de l'équation (8), la somme des ordres des dérivées, moins le quart de la dimension de ce terme évaluée par rapport à y et à ses dérivées, soit toujours un même nombre, ou que la différence entre les sommes des ordres des dérivées dans deux termes quelconques soit égale au quart de la différence de leurs dimensions. C'est bien ce qui a lieu, car le quart de la différence des dimensions des termes du premier et du second membre est

$$\frac{1}{4}(14-6)=2,$$

et la différence extre les sommes des ordres des dérivées est de même

$$6-4=2.$$

On démontre, dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, que, par le changement de q en q^m, m étant un nombre rationnel quelconque, la fonction complète K $\left(\text{et par conséquent aussi } C=\frac{\pi}{2K}\right)$ est multipliée par un facteur qui est une fonction algébrique de k. Soit g ce facteur; il suit de ce qui précède que l'équation différentielle (7) étant satisfaite par la fonction C, doit l'être aussi par la fonction $\frac{gC}{\sqrt{m}}$. Il y a donc une infinité de cas dans lesquels deux intégrales de l'équation (7) peuvent se déduire l'une de l'autre, en multipliant l'une d'elles par une fonction algébrique de k. Si, en général, on désigne par f un facteur tel que $fC=\frac{\pi f}{2K}$, mis à la place de C, satisfasse encore à l'équation (7), on peut trouver, comme il suit, l'équation qui a lieu entre ce facteur f et le module k.

L'équation différentielle (7) entre C et q a été trouvée par l'élimination de $k^2k'^2$ entre les équations

$$4C^3C''=-k^2k'^2,\quad \frac{d\log-k^2k'^2}{\sqrt{1-4k^2k'^2}}=\frac{d\log q}{C^2},$$

dont la seconde est une conséquence de l'équation

$$d \log \frac{k^2}{k'^2} = dl = \frac{d \log q}{C^2}.$$

Celle-ci nous donne pour une fonction quelconque u,

$$C^2 u' = C^2 \frac{du}{d \log q} = \frac{du}{dl}.$$

Si l'on pose

$$D = f.C.$$

et qu'on indique par des accents les dérivées de D et de f prises par rapport à $\log q$, comme on l'a fait pour les dérivées de y, C et u, il vient

$$D'' = fC'' + 2f'C' + f''C.$$

On a donc

$$\begin{aligned} 4D^3D'' &= -4f^4 k^2 k'^2 + 4f^3 C^2 \frac{d.C^2 f'}{d \log q} \\ &= -4f^4 k^2 k'^2 + 4f^3 \frac{d^2 f}{dl^2}. \end{aligned}$$

$$\frac{dl}{f^2} = \frac{d \log q}{D^2}.$$

Si l'on fait

(9)
$$-4f^4 k^2 k'^2 + 4f^3 \frac{d^2 f}{dl^2} = H,$$

et qu'on suppose la fonction f déterminée de façon qu'on ait

(10)
$$\frac{d \log H}{\sqrt{4H+1}} = \frac{dl}{f^2},$$

on a les deux équations

(11)
$$4D^3D'' = H, \quad \frac{d \log H}{\sqrt{4H+1}} = \frac{d \log q}{D^2}.$$

Si l'on élimine H entre ces équations, on obtient entre D et q une équation différentielle qui est la même qu'on a trouvée entre C et q. D'un autre côté, si l'on substitue dans l'équation (10) la valeur de H donnée par la formule (9), on obtient entre f et k une équation différentielle du troisième ordre, qui, en faisant

$$l = \log h,$$

ou

$$\frac{k^2}{k'^2} = k_1,$$

devient

(12) $$k_1^2 f^4 \left(\frac{d\mathrm{H}}{dk_1}\right)^2 = \mathrm{H}^2 + 4\mathrm{H}^3,$$

et où la lettre H, en vertu de l'équation (9), désigne la quantité

(13) $$4k_1^2 f^3 \frac{d^2 f}{dk_1^2} + 4k_1 f^3 \frac{df}{dk_1} - \frac{4k_1 f^4}{(1+k_1)^2} = \mathrm{H}.$$

Comme la fonction

$$\mathrm{D} = \frac{\pi f}{2\mathrm{K}}$$

est une intégrale de l'équation (7), pourvu que f soit une intégrale de l'équation (12), de même et réciproquement la quantité

$$f = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{D}$$

sera une intégrale de l'équation (12), si D est une intégrale de l'équation (7). En effet, quand on pose

$$4\mathrm{D}^3\mathrm{D}'' = \mathrm{H},$$

l'équation (7), à laquelle D satisfait, se change dans l'équation (10). Si donc on détermine f par l'équation

$$\mathrm{D} = \frac{\pi f}{2\mathrm{K}} = f\mathrm{C},$$

on obtiendra pour H, en différentiant deux fois, la valeur (9), et, en la substituant dans l'équation (10), on trouvera l'équation différentielle (12).

Il suit des équations (3 *bis*) et (5) qu'on peut, sans changer $d\log q$ et l'équation (7), mettre $\frac{1}{k'^2}$ et k^2 à la place de $-\frac{k^2}{k'^2}$, pourvu qu'en même temps on change K en $k\mathrm{K}$ et $k'\mathrm{K}$. Si donc $f(k_1)$ désigne une quelconque des intégrales de l'équation (12), non-seulement

$$\frac{\pi}{2\mathrm{K}} f\left(\frac{k^2}{k'^2}\right),$$

mais encore les fonctions

$$\frac{\pi}{2k\mathrm{K}} f\left(-\frac{1}{k'^2}\right), \quad \frac{\pi}{2k'\mathrm{K}} f(-k^2)$$

seront des intégrales de l'équation (7). Réciproquement, si D est une quelconque des intégrales de l'équation (7), les fonctions

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{D}, \quad \frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{D}, \quad \frac{2k'\mathrm{K}}{2\pi}\mathrm{D}$$

seront des intégrales de l'équation (12), pourvu que dans cette équation k_1 représente respectivement les quantités

$$\frac{k^2}{k'^2}, \quad -\frac{1}{k'^2}, \quad -k^2.$$

L'équation différentielle (12) est satisfaite par une infinité de valeurs algébriques de f qui ne diffèrent que par un facteur numérique des valeurs du multiplicateur M qui se présente dans la théorie de la multiplication des fonctions elliptiques. L'équation algébrique entre le module donné k et le module transformé λ étant connue, le carré de ce multiplicateur est donné rationnellement en k et λ par la formule générale

$$(14) \qquad \mathrm{M}^2 = \frac{(\lambda - \lambda^3)\,dk}{n(k - k^3)\,d\lambda},$$

où n désigne l'ordre de la transformation. Outre cela, on a, entre les deux premières dérivées de M par rapport à k et la première dérivée de λ, l'équation différentielle

$$(15) \qquad \mathrm{M}\left\{(k - k^3)\frac{d^2\mathrm{M}}{dk^2} + (1 - 3k^2)\frac{d\mathrm{M}}{dk} - k\mathrm{M}\right\} + \frac{\lambda\,d\lambda}{n\,dk} = 0.$$

Dans les *Fundamenta* (page 77) on a déduit des équations (14) et (15), par l'élimination de M, l'équation différentielle du troisième ordre qui a lieu entre deux modules susceptibles d'être transformés l'un dans l'autre. Mais si entre les deux mêmes équations différentielles on élimine au lieu de M le module transformé λ, on obtient pour $\sqrt{n}.\mathrm{M}$ la même équation différentielle qu'on a trouvée ci-dessus pour f, et qui est indépendante de l'ordre de la transformation. On peut, en effet, en posant

$$\lambda'^2 = 1 - \lambda^2, \quad l = \log \frac{k^2}{k'^2},$$

remplacer les deux équations (14) et (15) par les deux suivantes :

$$(16) \quad \begin{cases} n^2\left(-4M^4k^2k'^2 + 4M^3\dfrac{d^2M}{dl^2}\right) = -\lambda^2\lambda'^2, \\ d\log\dfrac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \dfrac{d\log - \lambda^2\lambda'^2}{\sqrt{1-4\lambda^2\lambda'^2}} = \dfrac{dl}{nM^2}. \end{cases}$$

Mais si l'on fait

$$H = -\lambda^2\lambda'^2, \quad f = \sqrt{n}.M,$$

les équations (9) et (10) reviennent aux équations (16); les fonctions $\sqrt{n}.M$ sont donc des intégrales, et des intégrales algébriques, de l'équation différentielle entre f et $k_1 = \frac{k^2}{k'^2}$.

Les équations différentielles en C et y, établies plus haut, ont été déduites de l'équation différentielle linéaire du second ordre dont k et K′ sont des intégrales particulières, combinée avec l'équation

$$d\log q = d.\frac{-\pi K'}{K} = \frac{d.k^2}{k^2k'^2\left(\dfrac{2K}{\pi}\right)^2}.$$

Si l'on met pour K et K′ les deux intégrales complètes de la premiere, savoir :

$$Q = aK + \sqrt{-1}\,bK', \quad Q' = a'K' + \sqrt{-1}\,b'K,$$

il vient

$$d.\frac{-\pi Q'}{Q} = \frac{(aa'+bb')d.k^2}{k^2k'^2\left(\dfrac{2Q}{\pi}\right)^2}.$$

Il suit de là que, dans les équations différentielles trouvées entre K, k et q, on peut, au lieu de K et de $\log q$, mettre généralement les quantités

$$\frac{Q}{\sqrt{aa'+bb'}} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi Q'}{Q}.$$

L'intégrale complète des équations différentielles (7) *et* (8) *est donc fournie par le système des deux équations*

$$
(17)\qquad \begin{cases} C^{-\frac{1}{2}} = y = \sqrt{\dfrac{\frac{2}{\pi}(a\mathrm{K}+\sqrt{-1}\,b\mathrm{K}')}{\sqrt{aa'+bb'}}}, \\ \log q = -\dfrac{\pi(a'\mathrm{K}'+\sqrt{-1}\,b'\mathrm{K})}{a\mathrm{K}+\sqrt{-1}\,b\mathrm{K}'}, \end{cases}
$$

où a, b, a', b' *désignent des constantes arbitraires, et où les quantités* K *et* K′ *sont des fonctions données d'une troisième quantité* k, *savoir, les fonctions elliptiques complètes de première espèce pour les modules* k *et* $\sqrt{1-k^2}$.

En posant

$$-\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = r,$$

d'où il suit

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}} = 1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \ldots,$$

on déduit de la seconde des équations (17),

$$\log q = \frac{\pi(a'r-\sqrt{-1}\,b')}{a-\sqrt{-1}\,br},$$

et, par conséquent,

$$r = \frac{a\log q + \sqrt{-1}\,b'\pi}{a'\pi+\sqrt{-1}\,b\log q},\quad a-\sqrt{-1}\,br = \frac{(aa'+bb')\pi}{a'\pi+\sqrt{-1}\,b\log q}.$$

La valeur complète de y, exprimée en x, devient

$$y = \sqrt{\frac{a-\sqrt{-1}\,br}{\sqrt{aa'+bb'}}}\cdot\left(1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\ldots\right).$$

Si dans ces formules on met a, b, a', b', au lieu de

$$\frac{a}{\sqrt{aa'+bb'}},\quad \frac{b}{\sqrt{aa'+bb'}},\quad \frac{a'}{\sqrt{aa'+bb'}},\quad \frac{b'}{\sqrt{aa'+bb'}},$$

et qu'on fasse

$$q = e^{\pi\rho}, \quad \log q = \pi\rho,$$

on obtient le théorème suivant :

La série

$$y = 1 + 2e^{\pi\rho} + 2e^{4\pi\rho} + 2e^{9\pi\rho} + \ldots,$$

satisfait à l'équation différentielle du troisième ordre

$$\begin{gathered}(y^2 d^3 y - 15 y\,dy\,d^2 y + 30\,dy^3)^2 + 32(y\,d^2 y - 3\,dy^2)^3 \\ = y^{10}(y\,d^2 y - 3\,dy^2)^2 \pi^2 d\rho^2,\end{gathered}$$

dans laquelle $d\rho$ *est la différentielle constante, et l'intégrale complète de cette équation différentielle est*

$$y = \frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \ldots}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}},$$

où

$$r = \frac{a\rho + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,b\rho},$$

et où a, a', b, b' *désignent des constantes arbitraires, mais assujetties toutefois à vérifier la relation*

$$aa' + bb' = 1.$$

On peut déduire ce théorème du premier théorème donné plus haut, en démontrant :

Que si, ayant fait $\pi\rho = \log q$, *on désigne par* $y = f(\rho)$ *une intégrale particulière quelconque de l'équation différentielle* (8), *et qu'on pose*

$$r = \frac{a\rho + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}, \quad \text{où} \quad aa' + bb' = 1,$$

la fonction

$$y = \frac{f(r)}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}}$$

est l'intégrale complète de l'équation (8).

C'est ce qu'on démontre aisément comme il suit :

L'équation différentielle (8), quand on y fait $y = C^{-\frac{1}{2}}$, se change dans l'équation différentielle (7), qui résulte, comme nous l'avons vu, de l'élimination de H entre les deux équations

$$4C^3C'' = H, \quad \frac{d\log H}{\sqrt{1+4H}} = \frac{d\log q}{C^2}.$$

Si l'on pose

$$\log q = \pi\rho,$$

et qu'on prenne pour C une intégrale particulière quelconque de l'équation différentielle (7),

$$C = \varphi(\rho) = [f(\rho)]^{-2},$$

les deux équations précédentes deviennent, en se servant, pour indiquer les dérivées, de la notation de Lagrange,

$$4\varphi(\rho)^3\,\varphi''(\rho) = \pi^2 H, \quad \frac{d\log H}{\sqrt{1+4H}} = \frac{\pi\, d\rho}{\varphi(\rho)^2}.$$

En écrivant r à la place de ρ, on aura à la fois deux équations de la forme

$$4\varphi(r)^3\,\varphi''(r) = \pi^2 H_1, \quad \frac{d\log H_1}{\sqrt{1+4H_1}} = \frac{\pi\, dr}{\varphi(r)^2}.$$

Soient a, b, a', b' des constantes pour lesquelles on ait

$$aa' + bb' = 1,$$

et

$$r = \frac{a\rho + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}, \quad dr = \frac{d\rho}{(a' + \sqrt{-1}\,b\rho)^2},$$

puis

$$\psi(\rho) = (a' + \sqrt{-1}\,b\rho)\,\varphi(r):$$

on trouve, en différentiant deux fois,

$$\psi'(\rho) = \sqrt{-1}\,b\varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{a' + \sqrt{-1}\,b\rho},$$

$$\psi''(\rho) = \frac{\varphi''(r)}{(a' + \sqrt{-1}\,b\rho)^3}:$$

et, par suite,

$$\psi(\rho)^3\,\psi''(\rho) = \varphi(r)^3\,\varphi''(r).$$

D'après cela, et en ayant égard à la formule

$$\frac{dr}{\varphi(r)^2} = \frac{d\rho}{(a' + \sqrt{-1}\,b\rho)^2\,\varphi(r)^2} = \frac{d\rho}{\psi(\rho)^2},$$

on voit que les deux équations

$$4\,\varphi(r)^3\,\varphi''(r) = \pi^2\,\mathrm{H}_1\,,\quad \frac{d\log\mathrm{H}_1}{\sqrt{1+4\,\mathrm{H}_1}} = \frac{\pi\,dr}{\varphi(r)^2}$$

se changent dans les deux équations toutes pareilles

$$4\,\psi(\rho)^3\,\psi''(\rho) = \pi^2\,\mathrm{H}_1\,,\quad \frac{d\log\mathrm{H}_1}{\sqrt{1+4\,\mathrm{H}_1}} = \frac{\pi\,d\rho}{\psi(\rho)^2}.$$

Il suit de là que la fonction

$$\psi(\rho) = (a' + \sqrt{-1}\,b\rho)\,\varphi(r)$$

est, aussi bien que $\varphi(\rho)$, une intégrale de l'équation (7); donc aussi la fonction

$$[\psi(\rho)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{f(r)}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}}$$

est une intégrale de l'équation (8); et ce sont bien là les intégrales complètes de ces deux équations différentielles, puisqu'elles contiennent trois constantes arbitraires.

On a vu, ci-dessus, que la série

$$2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots$$

est une intégrale de l'équation (8). On peut donc, au moyen du théorème qui vient d'être démontré, déduire aussi de cette série l'intégrale complète de l'équation (8), et il faut que l'intégrale ainsi trouvée comprenne l'intégrale complète qu'on a obtenue sous une autre forme. Il est donc toujours possible de déterminer les constantes a, b, a', b' dans l'expression

$$r = \frac{a\rho + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,b\rho},$$

de sorte qu'on ait

$$\frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \ldots}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}} = 2e^{\frac{1}{4}\pi\rho} + 2e^{\frac{9}{4}\pi\rho} + 2e^{\frac{25}{4}\pi\rho} + \ldots.$$

La théorie des fonctions elliptiques enseigne que cette détermination est possible d'une infinité de manières. Il résulte, en effet, de la théorie des formes en nombre infini de la transcendante Θ [*], que l'équation précédente a toujours lieu, lorsque les nombres a, b, a', b' étant des entiers positifs ou négatifs, a, a' et b sont impairs, et que les restes de la division de a' et de b par 4 sont inégaux. *Le signe de la racine carrée qui forme le dénominateur dans la formule précédente, dépend de la valeur de la quantité désignée par* $\left(\frac{a'}{b}\right)$ *dans la théorie des résidus quadratiques.* On peut arriver de deux manières à cette détermination du signe, soit au moyen d'un développement en fraction continue, soit à l'aide des sommes considérées par Gauss, dans le Mémoire intitulé : *Summatio serierum quarundam singularium.* L'équation précédente aura toujours lieu en supposant a et b impairs, pourvu qu'on multiplie un de ses deux membres par une racine huitième de l'unité. Si les nombres a et b sont l'un pair et l'autre impair, on a l'équation

$$\delta . \frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \ldots}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\, b\rho}} = 1 \pm 2e^{\pi\rho} + 2e^{4\pi\rho} \pm 2e^{9\pi\rho} + \ldots,$$

où δ désigne une racine huitième de l'unité, et où l'on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que des deux nombres a' et b l'un est pair et l'autre impair, ou que tous deux sont impairs.

Les développements en série qui précèdent supposent que les parties réelles des quantités ρ et r sont négatives. Si ρ remplit cette condition, mais qu'elle n'ait pas lieu pour r, on peut multiplier les constantes a et b' par $\sqrt{-1}$, et diviser les constantes a' et b par $\sqrt{-1}$, de façon qu'on ait toujours

$$aa' + bb' = 1,$$

et que r se changeant en $-r$ acquière une partie réelle négative. *Pour des valeurs réelles quelconques des constantes arbitraires a, a',*

---

[*] J'ai développé cette théorie dans plusieurs leçons faites à l'Université de Kœnigsberg, et je me propose de la publier dans une autre occasion.

b, b', si la partie réelle de ρ est négative, celle de r sera aussi toujours négative. En effet, si l'on pose

$$\rho = -\rho_0 + \rho_1 \sqrt{-1},$$

on aura

$$\begin{aligned} r &= -\frac{a\rho_0 + (a\rho_1 + b_1)\sqrt{-1}}{a' - b\rho_1 - b\rho_0\sqrt{-1}} \\ &= -\frac{\rho_0 + \sqrt{-1}\,[(a' - b\rho_1)(a\rho_1 + b_1) - ab\rho_0^2]}{(a' + b\rho_1)^2 + b^2\rho_0^2}; \end{aligned}$$

d'où résulte la proposition qu'on vient d'énoncer.