JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BRAVAIS

Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 141-180.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__141_0>

MÉMOIRE

SUR LES POLYÈDRES DE FORME SYMÉTRIQUE;

PAR M. A. BRAVAIS,

Professeur à l'École Polytechnique.

Dans les recherches que nous allons faire sur les polyèdres, nous ferons abstraction de leurs faces et de leurs arêtes pour ne considérer que leurs sommets, de sorte que tout polyèdre sera pour nous une agrégation de points distincts, de nombre limité, et distribués d'une certaine manière autour de leur centre de gravité.

Définition I. Je nommerai *centre de symétrie* d'un polyèdre, un point C, *fig.* 1, *Pl. I,* tel, qu'en le joignant à un sommet quelconque S du polyèdre, et prolongeant CS d'une quantité égale à elle-même, le point s ainsi obtenu soit aussi un sommet du polyèdre; ce point s sera l'*homologue* de S par rapport au centre C.

THÉORÈME I. *Dans tout polyèdre limité, il ne peut exister qu'un centre de symétrie.*

Cette proposition est évidente.

Définition II. Je nommerai *axe de symétrie* d'un polyèdre, une droite AB, *fig.* 1, telle, qu'en faisant tourner le polyèdre d'un angle Q autour de AB, les nouveaux lieux des sommets coïncident avec les anciens. Si, par exemple, cette rotation amène le sommet S en S', S' devra aussi être le lieu d'un sommet du polyèdre, et alors S, S' seront dits *homologues l'un de l'autre,* par rapport à l'axe AB.

THÉORÈME II. *L'angle qui restitue les lieux des sommets d'un polyèdre, dans sa rotation autour d'un axe de symétrie, est toujours commensurable avec* 360 *degrés.*

En effet, soit S', *fig.* 1, un homologue de S par rapport à l'axe AB: par S, S' menez un plan normal à AB, et qui coupera cet axe en c;

de c, avec le rayon cS, décrivez une circonférence de cercle, sur laquelle vous prendrez

$$\text{arc } S''S' = \text{arc } SS', \quad \text{arc } S'''S'' = \text{arc } SS', \text{ etc.}$$

Pendant que la rotation entraînera S de S en S', le sommet S', participant à ce mouvement, viendra en S'' qui devra être aussi le lieu d'un sommet; ainsi, non-seulement S, S' seront des sommets du polyèdre, mais il en sera de même de S'', et des autres points S''',... obtenus par la même voie. En répétant ainsi l'arc SS', on doit, après un ou plusieurs tours, revenir au point de départ S; sans cela le nombre des sommets serait illimité, ce qui ne peut être. Donc on aura, en nommant K l'angle SCS', p et q deux nombres entiers, premiers entre eux,

$$K = \frac{p}{q}\, 360°.$$

Corollaire. Le plus petit des angles de rotation capables de restituer les lieux des sommets est $\frac{360°}{q}$. En effet, l'expression générale de ces angles est

$$mK - n.360° = \frac{mp - nq}{q}\, 360°,$$

m et n étant des nombres entiers; or on peut toujours déterminer m et n d'après la condition

$$mp - nq = \pm 1:$$

donc, etc.

Définition III. On peut donc définir l'*axe de symétrie* une droite telle, qu'en faisant tourner le polyèdre autour d'elle, d'une partie aliquote $\frac{1}{q}$ de 360 degrés, la position apparente des sommets du polyèdre ne soit point troublée.

Le dénominateur q sera appelé le *numéro d'ordre de la symétrie de l'axe.* Si l'on a $q = 2$, l'axe sera dit *axe de symétrie du deuxième ordre,* ou *axe de symétrie binaire,* ou, plus simplement, *axe binaire.* Si l'on a $q = 3, 4,\ldots$, l'axe sera dit *ternaire, quaternaire,....* Dans ces divers cas, il y aura restitution des lieux des sommets après $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,... de tour.

Définition IV. Je nommerai *plan de symétrie* du polyèdre un plan PQ, *fig.* 1, tel, qu'en abaissant d'un sommet quelconque S une perpendiculaire Sp sur ce plan, et la prolongeant d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité Σ ainsi obtenue soit aussi un sommet du polyèdre. Les sommets S, Σ seront *homologues* par rapport au plan PQ.

Définition V. Nous pouvons maintenant définir un *polyèdre de forme symétrique*, ou, plus simplement, un *polyèdre symétrique*, celui qui possédera, soit un centre de symétrie, soit un ou plusieurs axes de symétrie, soit un ou plusieurs plans de symétrie. Le polyèdre qui ne possédera ni centre, ni axes, ni plans de symétrie, sera dit *asymétrique*.

Le terme de polyèdre symétrique est pris ici dans un sens plus étendu que celui qu'on a coutume de lui donner dans la géométrie élémentaire, où l'on appelle polyèdres symétriques deux polyèdres distincts disposés symétriquement par rapport à un plan; mais, pour nous, un polyèdre sera dit symétrique lorsqu'il satisfera aux conditions énoncées ci-dessus.

Théorème III. *S'il existe deux ou plusieurs axes de symétrie, ces axes, et les plans de symétrie que le polyèdre pourrait posséder, doivent tous se couper en un même point.*

Car le centre de gravité des sommets du polyèdre, supposés également pesants, devra évidemment, par la construction connue des centres de gravité, se trouver sur chacun des axes de symétrie, et aussi sur tous les plans de symétrie du polyèdre.

Définition VI. Le point de mutuelle rencontre des axes et plans de symétrie du polyèdre sera nommé *centre de figure* du polyèdre. Lorsqu'il existe un seul axe de symétrie, lorsque tous les plans de symétrie passent par cet axe, et qu'il n'y a pas de centre de symétrie, il n'y a pas non plus de centre de figure.

Le centre d'un tétraèdre régulier est un centre de figure, mais non de symétrie, pour ce polyèdre.

Définition VII. Deux axes de symétrie de même ordre sont dits *axes de même espèce* lorsque la configuration des sommets autour de l'un est la même qu'autour de l'autre. Pour constater cette similitude de configuration, on lie par la pensée les sommets du polyèdre à chacun des deux axes, et l'un de ces deux systèmes est supposé mobile. Alors, si l'on peut faire coïncider en même temps l'axe mobile avec l'axe fixe, les sommets mobiles avec les sommets fixes, les axes sont dits *de même espèce* et *directement semblables*. Si les polyèdres ne peuvent se superposer pendant que les axes coïncident, s'ils sont simplement homologues par rapport à un certain plan de symétrie, c'est-à-dire symétriques l'un de l'autre, dans le sens adopté par LEGENDRE (*Éléments de Géométrie*), les axes seront encore *de même espèce;* mais ils seront dits *inversement semblables*.

Deux plans de symétrie sont *de même espèce* et *directement semblables* lorsqu'en faisant tourner l'un d'eux autour de leur commune intersection, et permettant au polyèdre de participer à ce mouvement, la coïncidence avec l'autre plan de symétrie entraîne la restitution des lieux des sommets. Mais lorsque l'égalité par symétrie des géomètres remplace l'égalité par coïncidence, les plans de symétrie sont dits *de même espèce*, mais *inversement semblables*.

Lorsque ces deux genres de similitude font défaut, les axes ou plans de symétrie sont dits *d'espèces différentes*.

Deux axes de même espèce sont nécessairement de même ordre; mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Définition VIII. Je nomme *axe principal* un axe de symétrie auquel tous les autres axes, s'il en existe, sont perpendiculaires, et auquel tous les plans de symétrie, s'il en existe, sont parallèles ou normaux, pourvu d'ailleurs que l'ordre de la symétrie de cet axe principal ne soit pas inférieur à celui de la symétrie des autres axes.

Lorsqu'il existe deux ou plusieurs axes satisfaisant à ces conditions, l'un d'eux peut être choisi arbitrairement, et considéré comme axe principal du polyèdre.

Notations. Pour représenter symboliquement les diverses sortes de symétrie que les polyèdres peuvent comporter, j'emploierai la lettre C comme désignant un centre de symétrie; $0C$ indiquera que le polyèdre est privé d'un tel centre.

Les lettres Λ, L, L' désigneront des axes de symétrie; Λ^2, L^2, L'^2 des axes binaires, Λ^3, L^3,... des axes ternaires, et ainsi de suite, l'indice supérieur indiquant le numéro d'ordre de la symétrie.

La lettre Λ s'appliquera toujours à l'axe principal.

Ces notations suffisent pour les axes, attendu qu'il ne peut jamais en exister plus de trois espèces différentes dans un polyèdre.

Le nombre des axes de même espèce sera indiqué par le coefficient qui précède la lettre symbole de ces axes : ainsi la notation $[A^6, 3L^2, 3L'^2]$ indiquera un axe principal sénaire combiné avec trois axes binaires d'une certaine espèce, et trois autres axes binaires d'une autre espèce.

Les plans de symétrie seront désignés par les lettres Π, P, P'; on affectera la lettre Π au plan de symétrie normal à l'axe principal A, les symboles P et P' aux plans de symétrie qui ne sont normaux à aucun axe du polyèdre, et les symboles P^q, P'^q, $P^{q'}$ aux plans de symétrie normaux aux axes L^q, L'^q, $L^{q'}$ de ce polyèdre. Le nombre maximum d'espèces de ces plans ne dépasse jamais trois.

Le nombre des plans de symétrie de même espèce sera représenté, comme pour les axes, par le coefficient qui précède le symbole de ces plans : ainsi $[\Pi, 3P^2, 3P'^2]$ signifiera un plan de symétrie normal à l'axe principal, trois plans de symétrie de même espèce normaux aux axes $3L^2$, et trois plans de symétrie d'une autre espèce normaux aux axes $3L'^2$.

Définition IX *et divisions.* Au point de vue de leur symétrie, les polyèdres peuvent se partager en quatre grandes classes :

1°. Polyèdres asymétriques ;

2°. Polyèdres symétriques dépourvus d'axes ;

3°. Polyèdres symétriques a axe principal ; cette classe se divise en deux, *polyèdres à axe principal d'ordre pair* et *polyèdres à axe principal d'ordre impair ;*

4°. Polyèdres symétriques sphéroédriques, lesquels possèdent un ou plusieurs axes, dont aucun n'est un axe principal : ils se divisent en deux groupes, les *polyèdres quaterternaires* et les *polyèdres décemternaires,* selon le nombre des axes ternaires qui leur sont propres.

§ I. — Polyèdres asymétriques.

Puisque ces polyèdres n'ont ni axes, ni centre, ni plans de symétrie, ils peuvent, conformément aux conventions précédentes, être représentés par le symbole

$$[oL, oC, oP].$$

§ II. — Polyèdres symétriques dépourvus d'axes.

Théorème IV. *Dans tout polyèdre possédant un plan de symétrie et un centre de symétrie, la droite menée par ce centre normalement au plan est un axe de symétrie d'ordre pair.*

Soient PQ, *fig.* 2, le plan de symétrie, C le centre, S un sommet quelconque du polyèdre, CaA la normale au plan. Par cette droite et S menez le plan ACS normal à PQ, et contenant le sommet s homologue de S par rapport au centre C, ainsi que le sommet S' homologue de s par rapport au plan PQ. Si l'on joint S et S', il est visible que la droite de jonction sera perpendiculaire sur CA, et que l'on aura $aS' = aS$. Donc la condition pour que l'axe AC soit un axe binaire sera satisfaite. L'axe AC pourrait aussi être un axe quaternaire, sénaire, et, en général, un axe d'ordre $2q$. Donc, etc.

Théorème V. *Lorsqu'il existe deux plans de symétrie dans un polyèdre, leur intersection est un axe de symétrie.*

Soit S, *fig.* 3, un sommet quelconque du polyèdre; prenez pour plan de la figure le plan mené par S normalement aux deux plans de symétrie donnés; soient CP, Cp les traces de ces plans sur le plan de la figure. On obtiendra l'homologue s de S par rapport au plan CP, en faisant, dans le plan PCp,

$$\text{angle } SCs = 2 \text{ angle } SCP = 2 \text{ angle } sCP, \quad Cs = CS;$$

de même, on aura l'homologue S' de s par rapport au plan Cp, en faisant

$$\text{angle } S'Cs = 2 \text{ angle } sCp, \quad CS' = Cs;$$

d'où, par soustraction,

$$S'CS = 2\, PCp, \quad CS' = CS.$$

En répétant sur le sommet S' la construction faite sur S, on arrivera de même à un autre homologue S″, pareillement déterminé par les équations polaires

$$S''CS' = 2\,PCp, \quad CS'' = CS'.$$

Si donc de C, avec un rayon CS, on décrit la circonférence SS′S″, et si l'on porte un certain nombre de fois l'arc SS′ sur cette circonférence, les points S, S′, S″, etc., formant un système nécessairement limité, seront les sommets d'un polygone régulier inscrit à ce cercle. Si q est le nombre de ces sommets, on voit qu'à chaque point S correspondent $q - 1$ autres points homologues de S par rapport à la normale au plan : cette normale sera donc un axe de symétrie dont le numéro d'ordre q dépendra de la valeur de l'angle PCp.

Corollaire. L'angle SCS′ est nécessairement de la forme

$$\frac{p}{q}\,360°,$$

p, q étant des nombres entiers premiers entre eux, et, dans le cas où S, S′ sont deux homologues aussi voisins que possible, on a

$$SCS' = \frac{360°}{q},$$

d'après le corollaire du théorème II.

Théorème VI. *Les polyèdres symétriques dépourvus d'axes n'ont que deux modes distincts de symétrie, selon qu'ils possèdent un centre ou un plan de symétrie.*

Car ils ne peuvent posséder à la fois un centre et un plan de symétrie, en vertu du théorème IV, ni deux plans de symétrie, en vertu du théorème V. Les symboles de ces deux modes de symétrie seront donc

$$[oL,\ C,\ oP],$$
$$[oL,\ oC,\ P].$$

§ III. — Polyèdres symétriques a axe principal.

Théorème VII. *Lorsqu'un polyèdre possède deux plans de symétrie* P, *p*, *non perpendiculaires entre eux, il en possède un troisième* P′

qui est l'homologue de P *par rapport au plan p, et de même espèce que* P.

Soient CP, Cp, *fig.* 3, les traces des deux plans P, p sur un plan normal à leur commune intersection, et soit s' un sommet situé sur ce dernier plan. Soit, de plus, CP′ la trace du plan P′ homologue de P par rapport au plan intermédiaire Cp. Le sommet s' aura un homologue en S par rapport à Cp, et S un homologue en s de l'autre côté de CP : de même, s aura un homologue en S′ par rapport au plan Cp; il est facile de voir que S′ sera l'homologue de s' par rapport au plan CP′ : ainsi à chaque sommet correspond un autre sommet qui est son homologue par rapport à ce dernier plan; donc P′ est aussi un plan de symétrie, et l'on voit qu'il est de même espèce que P.

Théorème VIII. *Lorsqu'un polyèdre possède un plan de symétrie* P, *et un axe de symétrie* L *oblique à ce plan, la droite* L′ *homologue de* L *par rapport au plan est aussi un axe de symétrie.*

Car soit S, *fig.* 4, un sommet quelconque, ayant un homologue en s par rapport au plan P, et soient s, s', s'', etc., le système des homologues de s par rapport à l'axe L; soient S, S′, S″, etc., les homologues de s, s', s'', etc., par rapport au plan P. La configuration de S, S′, S″, etc., autour de L′ sera la même que celle de s, s', s'', etc., autour de L; donc L′ est aussi un axe de symétrie, et de même espèce que L.

Corollaire. Tout plan de symétrie entraîne la reproduction sur le côté opposé de ce plan, non-seulement de chaque sommet, mais aussi de chaque plan ou axe de symétrie du polyèdre. Les plans et axes ainsi reproduits sont de même espèce que les primitifs, et inversement semblables à ces derniers.

Théorème IX. *Dans tout polyèdre possédant un axe* L *d'ordre q, à tout plan de symétrie oblique à l'axe correspondent* $q - 1$ *autres plans de symétrie de même espèce.*

Ce théorème se démontrerait comme les théorèmes VII et VIII.

On peut aussi se borner à remarquer que, pendant la rotation du polyèdre autour de l'axe L^q, le plan de symétrie peut être considéré comme participant à cette rotation; or, pendant qu'elle s'effectue, ce plan ne cesse pas d'être un plan de symétrie par rapport au polyèdre qui participe à son mouvement; il en sera donc encore de même lorsque la rotation aura atteint une valeur angulaire de $\frac{360°}{q}$.

THÉORÈME X. *Dans tout polyèdre possédant un axe* L *d'ordre* q, *à tout axe de symétrie* L′ *oblique sur le précédent correspondent* $q - 1$ *autres axes de même ordre et de même espèce que l'axe* L′.

Ce théorème se démontre comme le précédent; lorsque le polyèdre tourne de $\frac{360°}{q}$ autour de L^q, l'axe L′ ne cesse pas d'être un axe de symétrie du polyèdre mobile.

Corollaire. Tout axe de symétrie d'ordre q nécessite la coexistence de tous les axes ou plans de symétrie qui sont les homologues d'un axe ou d'un plan donné, par rapport à l'axe d'ordre q. Les plans ou axes homologues ainsi obtenus sont de même espèce et directement semblables entre eux.

THÉORÈME XI. *Lorsqu'il existe un nombre total* q *de plans de symétrie se coupant suivant une même droite, cette droite est un axe de symétrie dont le numéro d'ordre est* q *ou un de ses multiples.*

Les angles dièdres de ces plans sont nécessairement égaux entre eux; sans cela ces plans se reproduiraient symétriquement l'un par rapport à l'autre (théorème VII), et leur nombre total serait supérieur à q.

Soient donc CPA et CpA, *fig.* 5, deux plans de symétrie voisins : on aura évidemment

$$\mathrm{PC}p = \frac{180°}{q}.$$

Or, le point σ étant l'homologue de S par rapport au plan PCA, et S′ l'homologue de σ par rapport au plan pCA, la rotation qui amènera S en S′, en faisant tourner le polyèdre autour de CA, sera, d'après la démonstration du théorème V,

$$\mathrm{PCP}' = 2\,\mathrm{PC}p = \frac{360°}{q}.$$

Donc l'ordre de symétrie de l'axe CA sera q, ou l'un de ses multiples.

THÉORÈME XII. *Lorsqu'il existe deux axes de symétrie binaires, la normale à leur plan, menée par leur point d'intersection, est un axe de symétrie du polyèdre.*

Soient CP, Cp, *fig.* 3, les deux axes binaires, et S un sommet du polyèdre ; je supposerai que S soit situé à une hauteur Δ au-dessus du plan PCp qui est le plan de la figure, et qu'il se projette orthogonalement en S : l'homologue de S par rapport à l'axe CP sera le point s situé à une distance Δ au-dessous du plan de la figure, et l'on aura, entre les projections S et s, les relations

$$\text{angle } \mathrm{SC}s = 2 \text{ angle } \mathrm{SCP}, \quad \mathrm{C}s = \mathrm{CS};$$

de même on obtiendra l'homologue S′ de s par rapport à l'axe Cp, en posant

$$\text{angle } \mathrm{S'C}s = 2 \text{ angle } s\mathrm{CP}, \quad \mathrm{CS'} = \mathrm{C}s,$$

et le point S′ sera à une hauteur Δ au-dessus du plan de la figure ; donc

$$\mathrm{S'CS} = 2\,\mathrm{PC}p, \quad \mathrm{CS'} = \mathrm{CS}.$$

En répétant les mêmes opérations sur S′, on atteindra de même S″, puis S‴ ; tous ces points formeront les sommets d'un polygone régulier inscrit au cercle de rayon CS, et seront les homologues de S par rapport à la normale au plan. Donc cette normale sera un axe de symétrie dont le numéro d'ordre q dépendra de la valeur de l'angle PCp.

Théorème XIII. *Lorsqu'il existe un nombre total q d'axes binaires répartis sur un plan, la normale au plan est un axe de symétrie dont le numéro d'ordre est q ou un multiple de q.*

Les angles de ces axes sont nécessairement égaux entre eux ; sans cela, ces axes se reproduiraient l'un l'autre, dans le même plan (théorème X, *corollaire*), et leur nombre total serait supérieur au nombre q.

Soient donc CP, Cp deux axes binaires voisins, *fig.* 5, et CA la normale à leur plan : on aura évidemment

$$\mathrm{PC}p = \frac{180^\circ}{q}.$$

Or, si s est l'homologue de S par rapport à l'axe CP, et S′ l'homologue de s par rapport à l'axe Cp, la rotation qui amènera S en S′, en faisant tourner le polyèdre autour de CA, sera, d'après la démonstration du théorème précédent,

$$\text{angle PCP}' = 2\,\text{PC}p = \frac{360^\circ}{q};$$

donc la droite CA sera un axe de symétrie d'ordre égal à q ou à un multiple de q.

Théorème XIV. *Lorsqu'il existe trois axes quaternaires rectangulaires entre eux, il existe en même temps quatre axes ternaires extérieurs aux plans qui joignent deux à deux les axes quaternaires.*

Soient OA, OB, OC, *fig.* 6, les trois axes quaternaires se coupant au centre de figure O du polyèdre. Faisons faire au polyèdre un quart de tour autour de OA et de B vers C; le lieu apparent des sommets restera le même, et l'axe OB viendra en OC. Faisons faire au polyèdre un second quart de tour, autour de la verticale OC, de A vers B; le lieu apparent des sommets restera encore le même; l'axe OB restera en OC, et l'axe OA viendra en OB. Le résultat de cette double rotation sera donc de transporter le système des axes OA, OB, fixes avec le polyèdre et mobiles avec lui, sur le système des droites fixes OB, OC. Or il est visible que ce transport équivaut à une rotation unique de 120 degrés autour de la droite OD qui joint le centre de figure O au centre D du triangle sphérique trirectangle ABC. D'où l'on voit que la ligne OD est un axe ternaire du polyèdre, et comme il existe huit triangles trirectangles à centres opposés deux à deux, ces axes ternaires seront au nombre de quatre, tous extérieurs aux plans AOB, AOC, BOC.

Corollaire. Un polyèdre à trois axes quaternaires rectangulaires ne possède pas d'axe principal; car, dans tout polyèdre pourvu d'un axe principal, si l'on prend trois axes quelconques L, L', L'' non situés dans le même plan, deux au moins des trois angles qu'ils comprennent doivent, d'après la définition de l'axe principal, être égaux à 90 degrés. Or, cette condition n'est pas satisfaite par le système des trois axes OA, OB, OD.

Théorème XV. *Dans tout polyèdre possédant un axe principal Λ^q, s'il existe un second axe de symétrie, cet axe, nécessairement situé dans un plan normal à Λ^q, aura une symétrie simplement binaire.*

Soient CA, *fig.* 7, l'axe A^q, et CL le second axe, x étant le numéro d'ordre inconnu de sa symétrie; il est clair que cet axe sera situé dans un plan normal à A^q, et je dis, de plus, que l'on aura $x = 2$.

En effet, d'après la définition de l'axe principal, les axes homologues de A^q par rapport à L^x (théorème X, *corollaire*) doivent être normaux à A^q, ou coïncider avec lui. Ainsi, on ne peut faire que les suppositions $x = 2$, $x = 4$, correspondant, la première au cas d'un demi-tour autour de L^x, la deuxième au cas d'un quart de tour.

Si $x = 4$, l'axe CL sera quaternaire, et l'axe CA se reproduira en CL', qui sera un axe de même espèce que lui (théorème X), et situé dans le plan normal à CA, passant par C; CL' sera donc aussi un axe d'ordre q, et pour que les axes homologues de l'axe CL par rapport à CL' ne sortent pas du plan LCL', comme l'exige la définition de l'axe principal, il faudra que l'on ait $q = 4$ ou $q = 2$.

Le cas $q = 4$ correspond au cas de trois axes quaternaires rectangulaires, et doit être rejeté; car il n'y a pas alors d'axe principal (théorème XIV, *corollaire*).

Dans le cas $q = 2$, l'axe CL sera le véritable axe principal. En effet, il est facile de voir qu'il ne peut y avoir de plan de symétrie passant par CA et oblique à CL; car son premier homologue par rapport à l'axe quaternaire CL ne serait ni normal ni parallèle à CA, et cela serait contraire à la supposition que CA est un axe principal : donc rien ne s'oppose à ce que l'on considère CL comme axe principal, et l'on doit le faire, puisque l'ordre de sa symétrie est plus élevé que l'ordre de la symétrie de CA. Donc, si CA est réellement un axe principal, on ne peut jamais avoir $x = 4$.

Il ne reste que la supposition $x = 2$; donc le deuxième axe de symétrie sera un axe simplement binaire.

Théorème XVI. *Dans tout polyèdre à axe principal, les q axes binaires situés dans le plan normal à cet axe sont également inclinés, chacun sur son voisin, et sont de même espèce de deux en deux.*

Car soient CP, Cp, *fig.* 3, deux axes binaires voisins; l'axe binaire Cp forcera l'axe CP à se reproduire du côté opposé en CP' (théorème X, *corollaire*); CP' entraîne à son tour l'existence de l'axe Cp', et ainsi de suite : d'où l'on voit que les q angles PCp, pCP', $P'Cp'$, etc., doivent être égaux entre eux et à $\frac{180^\circ}{q}$.

Les axes CP et CP' sont de même espèce et directement semblables par rapport à l'axe intermédiaire Cp; de même Cp et Cp' sont de même espèce entre eux et directement semblables par rapport à l'axe CP'; donc, etc.

THÉORÈME XVII. *Les polyèdres qui possèdent un axe Λ^q, q plans de symétrie passant par cet axe, et le plan de symétrie* Π *normal à l'axe principal, possèdent aussi q axes binaires, aux intersections de ces q plans avec le plan* Π.

La rencontre de deux plans de symétrie est toujours un axe de symétrie (théorème V); or, cet axe ne peut être que binaire (théorème XV); donc, etc.

On peut aussi, pour démontrer ce théorème, recourir à la *fig.* 5, où CPQ est l'un des q plans passant par l'axe Λ^q, et CPP' le plan Π.

Soit Σ l'homologue du sommet S par rapport au plan Π; soit s l'homologue de Σ par rapport au plan CPQ : il est visible que S et s sont homologues l'un de l'autre par rapport à CP, qui est ainsi un axe binaire du polyèdre.

THÉORÈME XVIII. *Les polyèdres qui ont un axe Λ^q, q axes binaires normaux à Λ^q, et le plan de symétrie* Π *normal à Λ^q, ont aussi q plans de symétrie passant par l'axe Λ^q et par chacun des axes binaires.*

Soit CP, *fig.* 5, l'un des axes binaires; soit CPP' le plan Π normal à l'axe principal CA. Le sommet S aura un homologue en s, de l'autre côté de l'axe binaire CP; le sommet s aura un homologue en σ, de l'autre côté du plan Π : les points S et σ seront homologues l'un de l'autre par rapport au plan CPQ; donc ce dernier plan sera l'un des plans de symétrie du polyèdre.

THÉORÈME XIX. *Les polyèdres qui possèdent un axe principal Λ^q, q plans de symétrie passant par cet axe, et un centre de symétrie, possèdent aussi q axes binaires menés par le centre normalement à chacun de ces plans.*

C'est une conséquence des théorèmes IV et XV.

THÉORÈME XX. *Les polyèdres qui possèdent un axe Λ^q, q axes* *binaires normaux à Λ^q, et un centre de symétrie, possèdent aussi q plans de symétrie normaux à ces axes binaires.*

Cela résulte du théorème XXI que nous allons démontrer.

Cas des polyèdres à axe principal d'ordre pair.

Théorème XXI. *Tout polyèdre possédant un axe d'ordre pair et un centre de symétrie, possède un plan de symétrie passant par le centre et normal à cet axe.*

Soit CA, *fig.* 2, l'axe de symétrie d'ordre $2q$; soient C le centre de symétrie, et PQ le plan normal à CA. Le sommet S a $2q-1$ homologues par rapport à l'axe CA; si donc l'on abaisse la normale Sa sur CA, et si on la prolonge de $aS' = aS$, S' sera l'un de ces homologues. Joignant S' au centre C, prolongeant et faisant $c\Sigma = cS'$, on obtient le sommet Σ homologue de S' par rapport au centre C : évidemment S et Σ sont homologues par rapport au plan PQ; donc ce plan est un plan de symétrie du polyèdre.

Théorème XXII. *Tout polyèdre possédant un axe d'ordre pair et un plan de symétrie normal à cet axe, possède un centre de symétrie situé à la rencontre de l'axe et du plan.*

Soit S', *fig.* 2, l'homologue opposé au sommet S par rapport à l'axe CA; soit s l'homologue de S' par rapport au plan PQ normal à l'axe CA : les deux sommets S et s seront homologues relativement au point C où l'axe coupe le plan; ce point sera donc un centre de symétrie du polyèdre.

Théorème XXIII. *Tout polyèdre possédant un axe d'ordre pair, et un plan de symétrie passant par cet axe, possède un second plan de symétrie passant par l'axe et normal au plan précédent.*

Soient CA, *fig.* 7, l'axe d'ordre pair, LCA le plan de symétrie donné, S un sommet du polyèdre, S' son homologue de l'autre côté de CA, s' l'homologue de S' par rapport au plan LCA : S et s' seront homologues par rapport au plan ACL' passant par CA et normal au précédent; donc, etc.

Théorème XXIV. *Dans tout polyèdre possédant un axe* L^{2q}, *s'il* *existe des axes binaires normaux à L^{2q}, leur nombre total est égal à $2q$, savoir : q axes d'une première espèce, et q axes d'une seconde espèce, alternant avec les précédents.*

Soit CP, *fig.* 5, un axe binaire normal à l'axe CA d'ordre $2q$; soit menée, dans le plan PCP′ normal à CA, la droite CP′ faisant avec CP l'angle

$$\mathrm{PCP'} = \frac{360^\circ}{2q} = \frac{180^\circ}{q}:$$

la droite CP′ sera un axe binaire de même espèce que CP, à cause de la symétrie propre à l'axe CA (théorème X, *corollaire*). Le nombre des axes ainsi obtenus sera égal à q; chacun d'eux peut être considéré comme dérivant de CP par des rotations égales à

$$0^\circ,\quad \frac{180^\circ}{q},\quad 2\frac{180^\circ}{q},\ldots,\quad (q-1)\frac{180^\circ}{q}:$$

les axes correspondants aux rotations

$$q\frac{180^\circ}{q},\quad (q+1)\frac{180^\circ}{q},\ldots,\quad (2q-1)\frac{180^\circ}{q},$$

coïncident avec les précédents.

Si maintenant on partage PCP′ en deux parties égales par la bissectrice Cp, Cp sera aussi un axe binaire. Car soit s l'homologue de S par rapport à CP; soit s' l'homologue de s par rapport à l'axe CA, l'angle de rotation qui amène s en s' étant

$$\frac{360^\circ}{2q} = \mathrm{PCP'};$$

les sommets S, s' seront homologues par rapport à Cp considéré comme étant un axe binaire : ces q droites bissectrices seront ainsi des axes binaires, mais d'une autre espèce.

Il y aura donc $2q$ axes binaires, et leur nombre ne peut être plus considérable; car, s'il existait Q axes binaires, Q étant supérieur à $2q$, l'ordre de la symétrie de l'axe normal à leur plan serait Q ou mQ (théorème XIII), ce qui est contraire aux conditions de l'énoncé.

Corollaire I. Le nombre des axes binaires normaux à un axe principal A^{2q} sera toujours égal à o ou à $2q$.

Corollaire II. Les axes binaires normaux à A^{2q} sont perpendiculaires entre eux, deux à deux.

Théorème XXV. *Dans tout polyèdre possédant un axe* L^{2q}, *s'il existe des plans de symétrie passant par cet axe, leur nombre total sera* $2q$, *dont* q *d'une espèce, et* q *d'une autre espèce, alternant avec les précédents.*

Soient ACP, ACP′, *fig.* 5, deux plans de symétrie faisant entre eux l'angle

$$PCP' = \frac{360^\circ}{2q} = \frac{180^\circ}{q}.$$

Le système de ces plans se composera de q plans de symétrie, de même espèce et directement semblables entre eux. De plus, les plans intermédiaires qui partagent en deux parties égales les angles dièdres (ACP, ACP′) sont aussi des plans de symétrie. Car soit ACp un de ces plans intermédiaires; prenez σ homologue d'un sommet donné S par rapport au plan ACP, et soit σ' l'homologue de σ par rapport à CA, l'angle de rotation qui amène σ en σ' étant

$$\frac{360^\circ}{2q} = PCP':$$

il est clair que S et σ' seront symétriquement placés par rapport au plan ACp : donc ce plan est un plan de symétrie, et il en existe en tout q d'une autre espèce que ACP, et tous directement semblables à ACp.

Il existe donc $2q$ plans de symétrie passant par L^{2q}, et leur nombre ne peut être plus considérable; car s'il était égal à $Q > 2q$, l'ordre de la symétrie de l'axe placé à leur commune rencontre serait Q ou mQ (théorème XI), ce qui ne peut être.

Corollaire I. Le nombre des plans de symétrie passant par un axe principal A^{2q} est toujours o ou $2q$, et ne peut être supérieur à ce dernier nombre.

Corollaire II. Ces plans de symétrie sont perpendiculaires deux à deux.

Théorème XXVI. *Les polyèdres à axe principal* A^{2q}, *qui ne possèdent ni plans de symétrie passant par cet axe, ni axes binaires, ont deux modes distincts de symétrie, selon que le plan normal à l'axe principal est ou n'est pas un plan de symétrie.*

Le nombre des axes de symétrie est fixé par l'énoncé du théorème; il en est de même de celui des plans de symétrie, du moment que l'on sait si le plan normal à l'axe principal est ou n'est pas un plan de symétrie. Quant à la présence du centre de symétrie, elle est subordonnée à celle du plan de symétrie normal à l'axe principal (théorèmes XXI et XXII).

Les symboles de ces deux modes de symétrie seront donc

$$[\Lambda^{2q},\ \mathrm{o}L^2,\ \mathrm{o}C,\ \mathrm{o}P],$$
$$[\Lambda^{2q},\ \mathrm{o}L^2,\ C,\ \Pi].$$

THÉORÈME XXVII. *Les polyèdres à axe principal Λ^{2q}, qui possèdent isolément, soit les $2q$ plans de symétrie, soit les $2q$ axes binaires, compatibles avec cet axe principal, ne peuvent avoir ni plan de symétrie normal à l'axe principal, ni centre de symétrie.*

C'est une conséquence évidente des théorèmes XVII, XVIII, XIX et XX.

Le groupe de polyèdres auquel se rapporte l'énoncé du théorème actuel se décompose en deux classes à symétrie distincte, selon que les plans de symétrie ou les axes binaires font défaut; les axes binaires étant de deux espèces différentes (théorème XXII), nous représenterons ceux d'une première espèce par L^2, ceux d'une deuxième espèce par L'^2. De même pour les plans de symétrie; ceux d'une espèce seront désignés par P, ceux de l'autre espèce par P'. On aura ainsi, pour représenter les deux classes de polyèdres, les symboles

$$[\Lambda^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ \mathrm{o}C,\ \mathrm{o}P],$$
$$[\Lambda^{2q},\ \mathrm{o}L^2,\ \mathrm{o}C,\ qP,\ qP'].$$

THÉORÈME XXVIII. *Dans les polyèdres possédant l'axe principal Λ^{2q}, $2q$ axes binaires et $2q$ plans de symétrie passant par l'axe principal, les axes binaires peuvent être situés sur les plans de symétrie, ou bien alterner avec eux, c'est-à-dire coïncider avec les bissectrices de leurs angles dièdres; ce qui donne, pour ce cas particulier, deux modes distincts de symétrie.*

Pour toute autre position relative, les axes binaires, en reproduisant par des rotations de 180 degrés les $2q$ plans de symétrie (théorème X, *corollaire*), feraient doubler le nombre de ces derniers; et, de même, les axes binaires se répétant dans des positions homologues de l'autre côté des plans (théorème VIII, *corollaire*), doubleraient aussi en nombre; ce qui est contraire aux corollaires des théorèmes XXIV et XXV : donc, etc.

THÉORÈME XXIX. *Dans les polyèdres à axe principal Λ^{2q}, lorsque les plans de symétrie contiennent les axes binaires, il existe un plan de symétrie normal à l'axe principal, et un centre de symétrie.*

Soit CA, *fig.* 5, l'axe principal; soient CP l'un des axes binaires, et ACPQ le plan de symétrie qui contient cet axe. Le sommet S aura son homologue en s par rapport à l'axe binaire CP; s aura son homologue en Σ par rapport au plan ACPQ. La disposition relative de S et Σ indique que le plan PCP', normal à CA et au plan CAP, est un plan de symétrie du polyèdre, par rapport auquel S et Σ sont deux sommets homologues : donc il existera un plan de symétrie normal à Λ^{2q}, lequel entraîne à son tour l'existence d'un centre de symétrie (théorème XXII).

THÉORÈME XXX. *Dans les polyèdres à axe principal Λ^{2q}, lorsque les plans de symétrie alternent avec les axes binaires, ceux-ci sont tous de même espèce, mais inversement semblables chacun avec son voisin; il n'existe alors ni plan de symétrie normal à l'axe, ni centre de symétrie.*

S'il existait un plan de symétrie normal à l'axe, ses intersections avec les plans de symétrie seraient des axes binaires (théorème XVII), ce qui est contraire à l'énoncé de notre théorème; donc il n'existe ni plan de symétrie normal à l'axe principal, ni centre de symétrie (théorème XXI).

Les axes binaires voisins $L_0 l_0$, $L_1 l_1$, *fig.* 8, sont inversement semblables, comme homologues par rapport au plan de symétrie intermédiaire qui passe par l'axe principal et par $P_0 C p_0$.

La similitude inverse n'exclut pas nécessairement, dans le cas général, la similitude directe; mais, dans le cas présent, il est facile de s'assurer que $L_0 l_0$, $L_1 l_1$ ne peuvent jamais être directement semblables; car la rotation qui amènerait la coïncidence caractéristique de la similitude directe ne peut évidemment s'effectuer qu'autour de l'axe principal, autour de la bissectrice $p_0 CP_0$, ou enfin autour de la deuxième bissectrice $p_3 CP_3$, normale à la précédente. Comme il existe $2q$ axes binaires, on a

$$L_0 CL_1 = \frac{180^\circ}{2q} = \frac{360^\circ}{4q}, \quad P_0 CP_1 = \frac{180^\circ}{2q} = \frac{90^\circ}{q}.$$

Si CL_0, CL_1 étaient directement semblables par rapport à l'axe principal, la rotation qui restitue les lieux des sommets étant $\frac{360^\circ}{4q}$, l'ordre de la symétrie de l'axe principal serait $4q$, ce qui ne peut être. De même CL_0, CL_1 ne peuvent être directement semblables par rapport à CP_0, puisque CP_0 n'est point un axe binaire. La normale à CP_0, ou CP_3, n'est pas non plus un axe binaire, puisque l'on a

$$90^\circ = q \times P_0 CP_1,$$

et qu'ainsi cette normale est une droite du groupe CP_0, CP_1, CP_2. Donc les axes binaires voisins sont inversement semblables, sans aucune possibilité de superposition.

La *fig.* 8 offre la disposition des sommets homologues pour le cas $2q = 6$. Le plan de symétrie normal à l'axe principal est pris pour plan de la figure. Les ronds noirs indiquent les sommets situés au-dessous de ce plan; les ronds à centre blanc, les sommets situés au-dessus du même plan.

En exprimant les symboles des deux modes de symétrie que nous examinons, il convient de remarquer que, dans le cas du théorème XXIX, les plans de symétrie sont normaux aux axes binaires, et que, dans le cas où les plans alternent avec les axes, ils ne peuvent leur être perpendiculaires. Nous aurons ainsi pour les formules relatives, 1° au cas de la coïncidence, 2° au cas de l'alternance :

$$[A^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ C,\ \Pi,\ qP^2,\ qP'^2],$$
$$[A^{2q},\ 2qL^2,\ 0C,\ 2qP].$$

On voit, par les théorèmes XXVI, XXVII et XXVIII, que les polyèdres à axe principal d'ordre pair ne peuvent avoir que six modes de symétrie; on les trouvera indiqués dans le tableau synoptique qui termine ce Mémoire.

Dans ce tableau, on peut donner à q toutes les valeurs possibles, depuis $q = 1$ inclusivement, jusqu'à $q = \infty$.

Cas des polyèdres à axe principal d'ordre impair.

Théorème XXXI. *Un polyèdre possédant un axe principal d'ordre impair ne peut posséder en même temps un plan de symétrie normal à cet axe et un centre de symétrie.*

C'est une conséquence du théorème IV.

Théorème XXXII. *Dans tout polyèdre possédant un axe principal Λ^{2q+1}, s'il existe d'autres axes, ces axes sont binaires, leur nombre total est égal à $2q+1$, et ils sont tous de même espèce.*

Un quelconque des nouveaux axes, nécessairement binaire et situé dans le plan normal à Λ^{2q+1} (théorème XV), sera répété $2q$ fois, en vertu du corollaire du théorème X; d'ailleurs ces $2q+1$ axes seront distincts entre eux, et ne se superposeront pas (comme cela arrive pour le cas des axes principaux d'ordre pair). En effet, si on les numérote 0, 1, 2, etc., dans l'ordre où des rotations successives, égales chacune à $\frac{360°}{2q+1}$, les font naître, on trouve que les inclinaisons de 0, 1, 2, 3, etc., sur l'axe 0 sont

$$0°,\quad \frac{360°}{2q+1},\quad \frac{2.360°}{2q+1},\ldots\quad \frac{q.360°}{2q+1},\quad \frac{(q+1)\,360°}{2q+1},\ldots\quad \frac{2q.360°}{2q+1},$$

et correspondent à des droites distinctes, puisque deux de ces angles ne peuvent jamais différer de 180 degrés.

Il ne peut exister, dans le plan normal à l'axe principal, d'autres axes binaires que ceux dont nous venons de constater la présence. Car, soit Q leur nombre total: si l'on avait $Q > 2q+1$, le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe principal serait Q ou mQ (théorème XIII), ce qui est contraire à la supposition d'un axe principal d'ordre $2q+1$.

Corollaire. Le nombre des axes binaires normaux à Λ^{2q+1} sera toujours 0 ou $2q+1$.

Théorème XXXIII. *Dans tout polyèdre possédant l'axe principal*

Λ^{2q+1}, *s'il existe des plans de symétrie passant par l'axe principal, leur nombre total est* $2q+1$, *et ils sont tous de même espèce.*

On démontrera, comme dans le théorème précédent, 1° que les $2q+1$ plans provenant de rotations successives, toutes égales à $\frac{360^\circ}{2q+1}$, autour de l'axe principal, sont distincts, de même espèce, et directement semblables entre eux; 2° que leur nombre ne peut surpasser $2q+1$, à cause du théorème XI.

Corollaire. Le nombre des plans de symétrie passant par l'axe principal Λ^{2q+1}, sera toujours égal à 0 ou à $2q+1$.

THÉORÈME XXXIV. *Les polyèdres à axe principal* Λ^{2q+1}, *qui ne possèdent ni plans de symétrie passant par cet axe, ni axes binaires, offrent trois modes distincts de symétrie, selon qu'ils ont ou n'ont pas un plan de symétrie normal à l'axe, et, dans ce dernier cas, selon qu'ils ont ou n'ont pas un centre de symétrie.*

Si le polyèdre possède un plan de symétrie normal à l'axe principal, il ne peut avoir de centre de symétrie (théorème XXXI); dès lors, l'axe étant un axe principal, la symétrie du polyèdre est complétement fixée.

Si le plan normal à l'axe principal n'est point un plan de symétrie, la même impossibilité n'existe plus. Ainsi, avec nos précédentes notations, nous aurons les trois symboles distincts

$$[\Lambda^{2q+1},\ 0L^2,\ 0C,\ 0P],$$
$$[\Lambda^{2q+1},\ 0L^2,\ C,\ 0P].$$
$$[\Lambda^{2q+1},\ 0L^2,\ 0C,\ \Pi],$$

THÉORÈME XXXV. *Les polyèdres à axe principal* Λ^{2q-1}, *qui possèdent isolément, soit les* $2q+1$ *plans de symétrie, soit les* $2q+1$ *axes binaires, compatibles avec cet axe principal, ne peuvent avoir ni plan de symétrie normal à* Λ^{2q+1}, *ni centre de symétrie.*

C'est une conséquence évidente des théorèmes XVII, XVIII, XIX et XX.

En conservant les notations déjà adoptées, on trouve que les deux classes de polyèdres auxquels se rapporte le théorème actuel, sont représentées par les symboles

$$[A^{2q+1},\ (2q+1)L^2,\ oC,\ oP],$$
$$[A^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ (2q+1)P].$$

THÉORÈME XXXVI. *Dans les polyèdres possédant l'axe principal A^{2q+1}, $2q+1$ axes binaires et $2q+1$ plans de symétrie passant par l'axe principal, les axes binaires sont situés sur les plans de symétrie, ou bissèquent leurs angles dièdres.*

Ce théorème se démontre exactement comme le théorème XXVIII.

THÉORÈME XXXVII. *Dans les polyèdres à axe principal A^{2q+1}, lorsque les plans de symétrie contiennent les axes binaires, il existe un plan de symétrie normal à l'axe principal, mais pas de centre de symétrie.*

La démonstration est celle du théorème XXIX. Mais la conséquence relative à l'existence du centre de symétrie n'a plus lieu, à cause du théorème XXXI.

THÉORÈME XXXVIII. *Dans les polyèdres à axe principal A^{2q+1}, lorsque les plans de symétrie alternent avec les axes binaires, ceux-ci sont tous de même espèce, et coïncident avec les normales aux plans de symétrie; il existe alors un centre de symétrie, mais pas de plan de symétrie normal à l'axe principal.*

Les axes binaires CL_0, CL_1, CL_2, *fig.* 9, partagent alors en $2q+1$ parties égales la demi-circonférence d'un cercle décrit de C comme centre; ce nombre étant impair, l'une des bissectrices des angles L_0CL_1, L_1CL_2, etc., sera normale à CL_0; donc il existera toujours un plan de symétrie normal à l'axe CL_0 : c'est le plan dont la trace est P_1Cp_1 sur le plan de la *fig.* 9, supposé normal à l'axe principal. La coexistence d'un plan de symétrie et d'un axe binaire qui lui est normal entraîne celle du centre de symétrie (théorème XXII).

D'ailleurs, les axes binaires sont tous directement semblables par rapport à l'axe principal, et, par conséquent, de même espèce. Les ronds à centre blanc et à centre noir de la *fig.* 9 indiquent la disposition des sommets homologues; les ronds noirs indiquent les sommets situés au-dessous du plan de la figure; ceux à centre blanc, les sommets situés au-dessus de ce plan.

Les symboles des polyèdres auxquels se rapportent les théorèmes XXXVII et XXXVIII, seront donc, d'après les conventions de la page 144,

$$[\mathrm{A}^{2q+1},\ (2q+1)\mathrm{L}^2,\ \mathrm{C},\ (2q+1)\mathrm{P}^2],$$
$$[\mathrm{A}^{2q+1},\ (2q+1)\mathrm{L}^2,\ 0\mathrm{C},\ \Pi,\ (2q+1)\mathrm{P}].$$

On voit, par les théorèmes XXXIV, XXXV et XXXVIII, que les polyèdres à axe principal d'ordre impair ne peuvent avoir que les sept modes de symétrie indiqués dans le tableau qui termine ce Mémoire.

On peut, dans ce tableau, donner à q toutes les valeurs imaginables, depuis $q = 1$ inclusivement, jusqu'à $q = \infty$.

§ IV. — Polyèdres symétriques sphéroédriques.

Théorème XXXIX. *Tout polyèdre sphéroédrique possède au moins deux axes L^q, $\mathrm{L}^{q'}$, dont les numéros d'ordre sont supérieurs à 2.*

Un polyèdre sphéroédrique (*définition* IX) ne peut posséder un seul axe de symétrie; car alors, afin d'éviter la reproduction de cet axe par les plans de symétrie du polyèdre (théorème VIII, *corollaire*), il faudrait que ces plans continssent l'axe unique de symétrie ou coïncidassent avec son plan normal: cet axe unique pourrait donc toujours être considéré comme étant un axe principal, et le polyèdre ne serait pas sphéroédrique.

Il existe donc deux ou plusieurs axes de symétrie dans les polyèdres sphéroédriques. Soient alors L^q, $\mathrm{L}^{q'}$ deux axes dont les numéros d'ordre q, q' ne soient pas inférieurs à ceux des autres axes: je dis que l'on aura $q > 2$, $q' > 2$.

Supposons d'abord que l'on ait $q = 2$, $q' = 2$. La normale au plan des axes L^2, L'^2 sera aussi un axe de symétrie $\mathrm{L}^{q''}$ (théorème XI), et puisqu'on ne peut avoir $q'' > q$, $q'' > q'$, on aura $q'' = 2$. D'ailleurs L^2 et L'^2 sont rectangulaires; sans cela il y aurait un troisième axe binaire sur le plan des axes L^2, L'^2, et q'' serait plus grand que 2 (théorème XIII), ce qui ne peut être. On a donc alors trois axes binaires rectangulaires L^2, L'^2, L''^2, et je dis que l'un au moins de ces axes peut être considéré comme étant un axe principal.

En effet, il ne peut alors y avoir dans le polyèdre aucun autre axe binaire que les trois axes L^2, L'^2, L''^2; car tout axe oblique à L^2, étant combiné avec L^2 ferait naître d'autres axes binaires dans leur plan commun (théorème X, *corollaire*), et un axe de symétrie d'ordre supérieur à 2 (théorème XIII).

De même, tout plan de symétrie doit passer par l'un des trois axes, tel que L^2; sans cela, il se produirait trois autres axes binaires homologues par rapport à ce plan, et le nombre total des axes binaires serait six, ce que nous venons de prouver ne pas être possible. Soit donc P un plan de symétrie passant par L^2. S'il existe un second plan de symétrie P', il doit être perpendiculaire à P; sans cela, leur intersection serait un axe d'ordre supérieur à 2 (théorème XI). Voyons donc si la disposition de ces plans peut être telle, que le polyèdre n'ait pas d'axe principal.

Si le plan P ne passe ni par L'^2, ni par L''^2, P' devra passer par L^2; sans cela son intersection avec P formerait un quatrième axe binaire, ce qui est impossible; et il en serait de même de tous les autres plans P'', P''', qui tous passeraient nécessairement par L^2. Ainsi, dans ce cas, l'axe L^2 satisferait aux conditions exigées pour les axes principaux, et le polyèdre ne serait pas sphéroédrique.

Si, au contraire, le plan P contient non seulement L^2, mais encore l'un des deux axes binaires L'^2, L''^2, si, par exemple, il contient l'axe L'^2, le plan P', qui doit toujours passer par la normale au plan P, c'est-à-dire par L''^2, devra, pour que son intersection avec P ne forme pas un quatrième axe binaire, contenir l'axe L^2 ou l'axe L'^2, par exemple l'axe L^2. S'il existe alors un troisième plan P'', il devra être perpendiculaire à la fois à P et à P' (*voyez* ci-dessus); il passera donc par L'^2 et L''^2, et il ne pourra exister d'autre plan de symétrie. Dans ce cas, l'un quelconque des axes L^2, L'^2, L''^2 peut être considéré comme étant un axe principal, et le polyèdre n'est pas sphéroédrique.

Donc on ne peut avoir $q = 2$, $q' = 2$.

Supposons maintenant que l'on ait $q > 2$, $q' = 2$. Les deux axes L^q, L'^2 seront rectangulaires entre eux; sans cela, l'axe L'^2 forcerait l'axe L^q à se reproduire, au moins une fois, et le nombre q' serait inférieur au numéro d'ordre de deux des axes du polyèdre, ce qui n'est pas possible, d'après les hypothèses précédemment faites. Par la même raison, il ne pourra exister aucun axe en dehors du plan normal à L^q.

Ainsi la première condition pour que L^q soit un axe principal est satisfaite.

De même, les plans de symétrie du polyèdre, étant assujettis à ne pouvoir reproduire l'axe L^q, devront nécessairement contenir L^q ou lui être perpendiculaires; donc L^q sera un axe principal, et le polyèdre ne sera point sphéroédrique.

Donc on ne peut avoir

$$q > 2, \quad q' = 2.$$

Donc enfin, on aura

$$q > 2, \quad q' > 2.$$

THÉORÈME XL. *Lorsqu'il existe dans un polyèdre deux axes d'ordre supérieur au deuxième, le polyèdre est nécessairement sphéroédrique.*

Car si le polyèdre possédait un axe principal, les autres axes seraient nécessairement binaires (théorème XV), ce qui est contraire à l'énoncé. Donc le polyèdre sera sphéroédrique.

Définition X. Les théorèmes XXXIX et XL nous indiquent que l'on peut donner une définition des polyèdres sphéroédriques différente de celle de la page 145, et dire que ces polyèdres sont des « polyèdres symétriques à plusieurs axes, dont deux au moins ont » une symétrie d'un ordre supérieur au deuxième. » Les polyèdres à axe principal peuvent alors se définir comme étant « des polyèdres » pourvus d'un ou plusieurs axes de symétrie, dont un au plus est » d'un ordre supérieur au deuxième. »

THÉORÈME XLI. *Dans tout polyèdre sphéroédrique, possédant un axe de symétrie* L^q *d'ordre supérieur au deuxième, le nombre total* Q *des axes d'ordre* q *appartenant à ce polyèdre est nécessairement égal à la moitié de l'une des valeurs que peut avoir le nombre des sommets d'un polyèdre régulier auxiliaire satisfaisant aux deux conditions suivantes :* 1° *que son centre de figure soit aussi un centre de sa symétrie;* 2° *que chacun de ses angles solides soit formé de* q *angles plans.*

L'axe L^q est nécessairement associé à un axe $L^{q'}$, q' étant plus grand que 2 (théorème XXXIX); or en faisant tourner L^q autour de $L^{q'}$ d'un angle égal à $\frac{360°}{q'}$, on obtiendra le lieu d'un deuxième axe d'ordre q, distinct de l'axe primitif L^q (théorème X, *corollaire*).

Soient donc OA, OB, *fig.* 10, ces deux axes d'ordre q se coupant en O, qui est le centre de figure du polyèdre. De O comme centre, décrivons la sphère de rayon 1, coupant les deux axes OA, OB en A et B, et menons l'arc de grand cercle AB. On pourra toujours supposer

$$\text{arc } AB < 90^\circ \quad \text{ou} \quad = 90^\circ:$$

dans le cas contraire, on considérerait le supplément de l'angle AOB. De même, on peut toujours supposer que OA et OB sont choisis de manière à ce que leur inclinaison soit la plus petite parmi toutes celles que les axes d'ordre q ont entre eux. Ceci posé, faisons tourner le polyèdre de $\frac{360^\circ}{q}$ autour de l'axe OB d'ordre q. Le point A viendra en C: joignons BC par un arc de grand cercle; on aura

$$ABC = \frac{360^\circ}{q},$$

et la droite OC sera aussi un axe d'ordre q (théorème X, *corollaire*). Traçons de même l'arc de grand cercle CD, tel que l'on ait

$$CD = CB = AB, \quad BCD = \frac{360^\circ}{q}:$$

la droite OD sera encore un axe d'ordre q.

Si l'on fait tourner le polyèdre une deuxième fois de $\frac{360^\circ}{q}$ autour de l'axe OC et de B vers D, l'effet de cette seconde rotation sera d'amener le point B en D, le point A restant en C. Les deux rotations équivalent à une rotation unique autour du point M, pôle du petit cercle circonscrit aux points A, B, C, D [*]. La double rotation autour de OB et de OC ne troublant pas les lieux apparents des sommets du polyèdre, la rotation unique autour de M, qui la remplace, ne troublera pas non plus ces lieux apparents; donc la droite OM sera un axe de symétrie du polyèdre, et l'on voit que si l'on fait tourner le polyèdre autour de OM d'un angle égal à l'angle dièdre AMC, le lieu des sommets n'en sera pas troublé. Donc cet angle est commensurable avec la circonférence (théorème II). Donc le nombre des sommets A, B, C, D, etc., situés sur la circonférence du petit cercle ABCD est limité: donc

---

[*] Ce pôle M est à la rencontre des arcs de grand cercle BM, CM qui divisent en deux parties égales les angles sphériques ABC, BCD

ces sommets forment un polygone régulier inscrit dont le nombre de côtés pourra être désigné par r. Il sera toujours permis de supposer que A et B sont deux sommets voisins; on pourra donc écrire

$$\mathrm{AMB} = \frac{360^\circ}{r},$$

formule dans laquelle le nombre r sera nécessairement plus grand que 2.

Puisque AMB et ABC sont des sous-multiples de 360 degrés, le polygone régulier sphérique ABCDE..., se répétant en CBC′D″..., en A′ABC′D′..., etc., finira par recouvrir la totalité de la surface de la sphère. L'ensemble des points ainsi obtenus y figurera les sommets d'un polyèdre régulier inscrit, et ce polyèdre régulier sera nécessairement l'un de ceux dans lesquels les angles plans s'assemblent en un nombre égal à q, pour former chacun de ses angles solides.

Les cinq polyèdres réguliers de la géométrie ont tous, excepté le tétraèdre régulier, un centre de symétrie en leur centre de figure; mais, dans le tétraèdre inscrit à la sphère, la distance angulaire AB de deux sommets surpasse 90 degrés. Ce cas ne pourra donc pas se présenter, puisqu'il est contraire à notre mode de construction.

Le polyèdre inscrit résultant de la construction précédente sera donc

ou le cube correspondant au cas $q = 3$, $r = 4$; on a alors [*]

$$\mathrm{AB} = 70^\circ 32', \quad \mathrm{AM} = 54^\circ 44';$$

ou l'octaedre régulier correspondant au cas $q = 4$, $r = 3$; on a alors

$$\mathrm{AB} = 90^\circ, \quad \mathrm{AM} = 54^\circ 44';$$

ou le dodécaèdre régulier correspondant au cas $q = 3$, $r = 5$; alors

$$\mathrm{AB} = 41^\circ 49', \quad \mathrm{AM} = 37^\circ 23';$$

ou l'icosaèdre régulier correspondant au cas $q = 5$, $r = 3$; alors

$$\mathrm{AB} = 63^\circ 26', \quad \mathrm{AM} = 37^\circ 23'.$$

[*] Les arcs AB, AM sont donnés par les formules connues,

$$\cos\frac{1}{2}\mathrm{AB} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r}, \quad \cos \mathrm{AM} = \cot\frac{\pi}{q}\cot\frac{\pi}{r}.$$

Soit maintenant M le nombre des sommets du polyèdre régulier ainsi obtenu; chaque sommet ayant son homologue, qui lui est diamétralement opposé, on voit que le nombre total Q des axes d'ordre q sera au moins égal à $\frac{1}{2}$M. Je dis, de plus, qu'on ne peut avoir $Q > \frac{1}{2}M$. Car, si l'on avait $Q > \frac{1}{2}M$, l'un des axes d'ordre q viendrait percer la sphère en un point X situé à l'intérieur de l'un des polygones sphériques ABCDE; l'une des distances angulaires de X aux sommets A, B, C, D, serait nécessairement inférieure à AM, et *à fortiori* à AB (d'après le tableau synoptique des valeurs corrélatives de AB et AM), ce qui est contraire à l'hypothèse d'inclinaison minimum des deux axes OA, OB. Donc on ne peut avoir

$$Q > \frac{1}{2}M;$$

donc on aura

$$Q = \frac{1}{2}M.$$

Théorème XLII. *Un polyèdre sphéroédrique ne peut avoir que des axes ternaires, quaternaires ou quinaires, les axes binaires non compris.*

Cela résulte de l'énoncé du théorème précédent; L^q étant l'un des axes du polyèdre, le nombre q ne peut être que le nombre d'angles plans susceptibles de s'associer pour former l'angle solide d'un polyèdre régulier: donc on doit avoir

$$q = 3, \quad \text{ou } 4, \quad \text{ou } 5.$$

Théorème XLIII. *Il existe deux groupes distincts de polyèdres sphéroédriques, ceux qui possèdent quatre axes ternaires, et ceux qui possèdent dix axes ternaires.*

Examinons successivement les quatre cas auxquels conduit la répétition des Q axes L^q les uns par les autres, et soit toujours M le nombre des sommets du polyèdre régulier inscrit auquel conduit ce mode de répétition.

Dans le cas du cube, on a (théorème XLI),

$$q = 3, \quad M = 8, \quad Q = \frac{1}{2}M = 4.$$

Dans le cas de l'octaèdre, on a

$$q = 4, \quad M = 6, \quad Q = \frac{1}{2} M = 3.$$

Les trois axes quaternaires ainsi obtenus sont rectangulaires; donc il existe alors quatre axes ternaires (théorème XIV), et il ne peut en exister un plus grand nombre; car les nouveaux axes ternaires forceraient les axes quaternaires à se répéter, de sorte que l'on aurait $Q > 3$, ce qui est impossible.

Dans le cas du dodécaèdre, on a

$$q = 3, \quad M = 20, \quad Q = \frac{1}{2} M = 10.$$

Dans le cas de l'icosaèdre, on a

$$q = 5, \quad M = 12, \quad Q = \frac{1}{2} M = 6.$$

Soient alors M, M_0, M_1, *fig.* 12, trois sommets voisins d'un icosaèdre inscrit: la normale abaissée du centre de la sphère sur la face MM_0M_1 sera évidemment un axe ternaire, et comme l'icosaèdre a vingt faces parallèles deux à deux, il y aura dix axes ternaires; mais il ne peut y en avoir un plus grand nombre; car, pour $q = 3$, on ne trouve que les deux valeurs $Q = 4$, $Q = 10$ (théorème XLI). Donc, etc.

Corollaire. Nous pouvons donc diviser les polyèdres sphéroédriques en deux groupes: les *quaterternaires* qui ont quatre axes ternaires assemblés comme le sont les quatre grandes diagonales d'un cube, et les *décemternaires* qui possèdent dix axes ternaires assemblés comme le sont les dix grandes diagonales d'un dodécaedre régulier

Cas des polyèdres quaterternaires.

THÉORÈME XLIV. *Si l'on construit un cube ayant pour diagonales les quatre axes ternaires d'un polyèdre quaterternaire donné, les trois normales abaissées du centre de figure sur les faces de ce cube sont trois axes de même espèce pour le polyèdre, et de symétrie binaire ou quaternaire.*

En prenant pour centre le centre de figure du polyèdre, point de rencontre de ses quatre axes ternaires, et en prenant pour rayon l'unité, décrivons une sphère qui coupera les extrémités supérieures de nos quatre axes ternaires en A, A_0, A_1, A_2, *fig.* 11. (J'ai projeté stéréographiquement la surface de cette sphère sur le plan du grand cercle dont A est le pôle; mais le lecteur est prié de suivre la démonstration comme si elle était faite sur la sphère: le centre O de celle-ci n'a point été marqué sur la figure.) Le cube inscrit dont A, A_0, A_1, A_2 sont les quatre sommets supérieurs, aura en B_0, B_1, B_2 les sommets diamétralement opposés à A_0, A_1, A_2; $AA_0B_1B_2$, $AA_0B_2A_1$, $AA_1B_0A_2$ sont trois polygones sphériques carrés dont les centres M_0, M_1, M_2 sont les extrémités des trois normales abaissées du centre sur les faces du cube inscrit.

Une double rotation de 120 degrés, savoir : premièrement autour de A_2 comme pôle, de A vers B_0, et secondement autour de B_0 comme pôle, de A_2 vers A_1, amène A en B_0 et A_2 en A_1, sans troubler le lieu des sommets : cette double rotation équivaut à une rotation de 180 degrés autour du pôle M_0. Donc OM_0 est un axe dont la symétrie est 2 ou un multiple de 2. D'ailleurs, la symétrie de OM_0 ne peut être d'ordre supérieur à 4; sans cela, le nombre des axes ternaires situés autour du pôle M_0 surpasserait 4, ce qui est contraire aux conditions initiales : donc les trois axes rectangulaires OM_0, OM_1, OM_2 sont binaires ou quaternaires.

Théorème XLV. *Les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires ne peuvent posséder aucun autre axe binaire.*

S'il existait un autre axe binaire, il ne pourrait percer la partie supérieure de la surface de la sphère, *fig.* 11, qu'en un des trois points qui sont les milieux soit des arcs AA_0, AA_1, AA_2, soit des arcs homologues A_0B_1, A_0B_2, A_1B_2, A_1B_0, A_2B_0, A_2B_1; car, pour toute autre position, cet axe forcerait les axes ternaires à se répéter, ce qui en doublerait le nombre. Supposons que G_0, milieu de AA_0, soit l'extrémité du nouvel axe binaire; alors une double rotation du polyèdre, premièrement de 180 degrés autour du pôle G_0, deuxièmement de 120 degrés autour du pôle A_0, dans le sens A vers B_1, amènera

A en A_0, puis en A_0,
A_0 en A, puis en B_1,
B_1 en A_1, puis en A_2,
A_2 en B_2, puis en A.

Ce double mouvement, qui ne trouble pas les lieux des sommets du polyèdre, équivaut à une rotation simple de 90 degrés autour de M_1 dans le sens A vers A_0; donc alors le pôle M_1 serait l'extrémité d'un axe quaternaire, ce qui est contraire aux conditions initiales. Donc il ne peut alors exister aucun autre axe binaire.

Scolie. Soit S, *fig.* 11, un sommet du polyèdre donné; il est permis de supposer que ce sommet est sur la surface de la sphère, en prenant pour unité sa distance OS au centre de figure du polyèdre; ses deux homologues par rapport au pôle ternaire A, sont S' et S''. Le système $SS'S''$ se reproduit en $S_0S'_0S''_0$, $S_1S'_1S''_1$, $S_2S'_2S''_2$, en vertu de la binarité des pôles M_0, M_1, M_2. Le système complet des homologues d'un même sommet sera donc, dans le cas actuel, un polyèdre inscriptible à la sphère.

Cette propriété, qui se reproduit dans tous les polyèdres sphéroédriques, sert de justification au nom que nous leur avons donné; nom qui figure d'ailleurs, avec un sens analogue, dans la terminologie cristallographique du célèbre professeur Weiss.

Corollaire. D'après la disposition des douze sommets de ce polyèdre, il est facile de voir qu'il ne possède point de plans ni de centre de symétrie, du moins dans le cas général où le sommet S n'offre aucune particularité de position dans l'intérieur du triangle sphérique A_0A_2A (*voyez* la démonstration des deux théorèmes suivants).

THÉORÈME XLVI. *Les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires peuvent posséder, soit six plans de symétrie coïncidant avec les six plans qui joignent deux à deux les axes ternaires, soit trois plans de symétrie coïncidant avec les trois plans qui joignent deux à deux les axes binaires; tout autre plan de symétrie ne saurait leur appartenir.*

Toute disposition d'un plan de symétrie autre que celles indiquées dans l'énoncé, obligerait les quatre axes ternaires à se répéter, et doit, par conséquent, être rejetée.

Si A_1AM_1, *fig.* 11, représente un des plans de symétrie, la ternarité du pôle A exige qu'il en soit de même de A_2AM_2, A_0AM_0; la ternarité du pôle A_1 force d'étendre cette conclusion aux plans $B_2A_1M_0$, $B_0A_1M_2$: il en sera de même de $A_0M_1A_2$, en vertu de la binarité de l'axe OM_1 (théorème XXIII).

Dans ce cas, chacun des triangles $SS'S''$, $S_0S'_0S''_0$, $S_1S'_1S''_1$, $S_2S'_2S''_2$, est remplacé par un hexagone; l'on s'est borné à figurer celui qui entoure le sommet B_0. Les vingt-quatre sommets du polyèdre peuvent se réduire à douze, si le sommet S, qui est censé le régulateur des positions de tous les autres, tombe sur l'un des trois arcs de grand cercle A_0AM_0, A_1AM_1, A_2AM_2; ces sommets peuvent se réduire à quatre, si S coïncide avec A, etc.

Supposons maintenant que $M_2G_0M_1$ représente un plan de symétrie; alors $M_1G_2M_0$, $M_0G_1M_2$ seront aussi des plans de symétrie, en vertu de la ternarité du pôle A. Dans ce cas, le triangle $SS'S''$ se répète autour des pôles A_0, A_1, A_2 : on s'est borné à figurer ce mode de répétition autour du sommet A_1; le triangle $\sigma\sigma'\sigma''$ est alors l'homologue du triangle $SS'S''$ par rapport au plan de symétrie $M_2G_1M_0$.

D'ailleurs ces deux systèmes de plans de symétrie ne peuvent exister simultanément; car il y aurait alors quatre plans de symétrie se coupant au pôle M_0, et l'axe OM_0 serait au moins quaternaire (théorème XI), ce qui est contraire aux conditions de l'énoncé.

Théorème XLVII. *Les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires ne peuvent avoir un centre de symétrie qu'à la condition de posséder trois plans de symétrie joignant deux à deux les axes binaires, et réciproquement la présence de ces plans entraîne celle du centre de symétrie.*

C'est une conséquence des théorèmes XXI et XXII.

Théorème XLVIII. *Le polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires ne peuvent avoir que trois modes distincts de symétrie, selon qu'ils sont dépourvus de plans de symétrie, ou qu'ils possèdent soit six plans de symétrie passant par les axes ternaires, soit trois plans de symétrie passant par les axes binaires.*

C'est une conséquence du corollaire du théorème XLV, ainsi que du théorème XLVI. Si l'on tient compte en outre du théorème XLVII, et des conventions faites à la page 145, on aura les trois symboles

$$[4L^3, 3L^2, 0C, 0P],$$
$$[4L^3, 3L^2, C, 3P^2],$$
$$[4L^3, 3L^2, 0C, 6P].$$

Théorème XLIX. *Tout polyèdre quaterternaire à axes quaternaires possède six axes binaires joignant deux à deux les côtés opposés d'un cube qui aurait les quatre axes ternaires du polyèdre pour diagonales.*

Je dis que si l'on joint le centre O de la sphère de la *fig.* 11 avec le point G_0 milieu de AA_0, cette droite sera un axe binaire du polyèdre.

Donnons au polyèdre une rotation de 90 degrés autour de OM_1, de A vers A_0, et une seconde rotation de 120 degrés autour de OA_0, de B_1 vers A; ce double mouvement, qui ne troublera pas les lieux apparents des sommets, amènera

A en A_0, puis en A_0,
A_0 en B_1, puis en A,
B_1 en A_2, puis en A_1,
A_2 en A, puis en B_2.

Le résultat de ces deux rotations est le même que si l'on avait fait tourner le polyèdre de 180 degrés autour de G_0; donc OG_0 est un axe d'ordre pair, qui évidemment ne peut être que binaire, et il en serait de même pour les cinq autres droites homologues de OG_0. Trois des six axes binaires sont situés dans le plan du grand cercle de projection de la sphère.

On prouverait, de même que cela a été déjà fait dans la démonstration du théorème XLV, que toute autre droite serait impropre à être un axe binaire du système.

Théorème L. *Les polyèdres quaterternaires à axes quaternaires, s'ils possèdent des plans de symétrie, en ont nécessairement six passant par les axes ternaires, et trois passant par les axes quaternaires; ils ont en même temps un centre de symétrie.*

Je désignerai par P^4 les plans passant par les axes quaternaires, par P^2 ceux qui passent par les axes ternaires. On a déjà vu (démonstration du théorème XLVI) que ce sont les seuls plans de symétrie possibles.

Admettons l'existence des plans P^4; $M_0G_1M_2$ et $M_0G_2M_1$, *fig.* 11, seront deux plans de symétrie se coupant suivant un axe quaternaire; donc AM_0B_0, $A_1M_0A_2$ seront aussi des plans de symétrie (théorème XXV): le système P^2 s'associe donc au système P^4. On démontrerait de même que le système des plans P^4 s'associe toujours au système des plans P^2.

Les trois plans du système P^4 sont normaux chacun à l'un des trois axes quaternaires. Les six plans du système P^2 sont normaux chacun à l'un des six axes binaires; car, si dans un cube à quatre arêtes verticales on joint deux à deux les milieux de deux de ces quatre arêtes opposées entre elles, chacune de ces droites sera normale au plan qui passe par les deux autres arêtes. L'existence des plans de symétrie entraînera d'ailleurs celle du centre de symétrie (théorème XXII).

THÉORÈME LI. *Les polyèdres quaternaires à axes quaternaires ne sont susceptibles que de deux modes de symétrie, selon qu'ils possèdent ou ne possèdent pas de plans de symétrie.*

Cela résulte du théorème précédent.

Dans le cas où le polyèdre ne possède aucun plan de symétrie, il ne peut avoir de centre de symétrie, par suite du théorème XXI. Le système complet des homologues du sommet S, *fig.* 11, forme alors un polyèdre inscrit, à vingt-quatre sommets se groupant trois par trois autour de chacun des huit pôles A, A_0, A_1, A_2, B_0, etc. On s'est borné, dans la figure, à représenter le triangle $\sigma_2\sigma'_2\sigma''_2$ qui enveloppe, dans ce cas, le pôle A_2.

Lorsque le polyèdre a ses neuf plans de symétrie, les huit triangles $SS'S''$, $S_0S'_0S''_0$, etc., sont remplacés par huit hexagones, et le système des homologues comprend quarante-huit sommets.

Les symboles de ces deux modes de symétrie seront

$$[3L^4, 4L^3, 6L^2, 0C, 0P],$$
$$[3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2].$$

Cas des polyèdres décemternaires.

THÉORÈME LII. *Si l'on construit un dodécaèdre régulier ayant pour diagonales les dix axes ternaires d'un polyèdre décemternaire donné,* *les six normales abaissées du centre de figure sur les faces de ce dodécaèdre sont des axes de symétrie quinaire pour le polyèdre.*

En prenant l'unité pour rayon, et pour centre le point de mutuelle rencontre des dix axes ternaires, décrivez une sphère qui coupera en A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, *fig.* 12, les moitiés supérieures des dix axes ternaires. (J'ai projeté stéréographiquement la surface de cette sphère sur le plan du grand cercle parallèle à la face $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$ du dodécaèdre régulier inscrit dont ces extrémités A_0, A_1, ... B_0, B_1, etc., sont les sommets; le lecteur est prié de se représenter les points et lignes de la figure sur la surface même de la sphère; le centre O de la sphère n'est pas marqué sur le dessin.) En joignant deux à deux les intersections, il en résulte des pentagones réguliers sphériques dont les douze centres M, M_0, M_1,... N_0, N_1, etc., sont les extrémités de rayons menés du centre de la sphère normalement aux douze faces du dodécaèdre.

Deux rotations de 120 degrés, l'une autour de OA_0, de A_4 vers B_0, et l'autre autour de OB_0, de A_0 vers C_2, amèneront A_4 en B_0 et A_0 en C_2. Ces deux rotations, qui n'altèrent pas les lieux des sommets du polyèdre, équivalent à une rotation unique de 144 degrés autour de OM_2, de A_0 vers B_0; celle-ci répétée trois fois équivaudra à une rotation de 72 degrés; donc l'axe OM_2 est un axe quinaire, et il en serait de même pour OM, OM_0, OM_1, etc. Les points M_0, M_1, etc., sont les sommets d'un icosaèdre régulier inscrit à la sphère.

THÉORÈME LIII. *Les polyèdres décemternaires possèdent toujours quinze axes binaires.*

Faites tourner le polyèdre donné de 72 degrés autour de OM, *fig.* 12, de A_0 vers A_1, puis de 120 degrés autour de OA_1, de A_2 vers A_0; par suite de ces deux mouvements, le pôle A_0 vient en A_1, et A_1 vient en A_0; le résultat final est le même que si le polyèdre avait tourné de 180 degrés autour du rayon OG, aboutissant au milieu de l'arc $A_0 A_1$. Or, les lieux apparents des sommets n'ont pas été altérés; donc G est l'extrémité d'un axe d'ordre pair, qui est évidemment un axe binaire. Le dodécaèdre régulier ayant trente côtés opposés deux à deux, le nombre total des axes binaires sera égal à quinze.

Aucun autre diamètre de la sphère ne saurait être un axe binaire:

car, quelle que fût sa position, il forcerait les axes ternaires à se répéter, et l'on aurait plus de dix axes ternaires, ce que nous savons être impossible (théorème XLIII).

On pourrait aussi obtenir les quinze axes binaires, en joignant deux à deux les milieux des arêtes opposées de l'icosaèdre inscrit $MM_0M_1\ldots$.

Théorème LIV. *Les polyèdres décemternaires peuvent avoir pour plans de symétrie les quinze plans passant par les six axes quinaires combinés deux à deux; dans le cas contraire, ces polyèdres n'ont aucun plan de symétrie.*

Considérons en particulier un plan passant par le centre de la sphère et par les sommets M et M_3, *fig.* 12; ce plan sera un plan de symétrie pour le système des points (A_0, A_1), (A_4, A_2),..., (M_2, M_4), (M_1, M_0), etc.: il n'entraîne donc pas la duplication du nombre des axes; ainsi rien ne s'oppose à l'existence d'un tel plan de symétrie.

D'ailleurs le plan MM_3 est perpendiculaire à la droite KK', qui est un axe binaire du système. Les homologues de ce plan sont, en tout, au nombre de quinze, savoir : MM_0, MM_1, MM_2, MM_3, MM_4; M_0M_2, M_1M_3, M_2M_4, M_3M_0, M_4M_1; M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_0. Ce sont évidemment les seuls plans de symétrie que puisse posséder le polyèdre; pour toute autre position, le nombre des axes ternaires deviendrait supérieur à 10, ce qui ne peut être (théorème XLIII).

La *fig.* 12 offre la disposition des soixante sommets homologues de S autour des pôles A_0, A_1, etc., dans le cas où le polyèdre ne possède aucun plan de symétrie.

Mais lorsque les quinze plans de symétrie ci-dessus indiqués existent dans le polyèdre, le triangle SS'S'' est remplacé par un hexagone; pour ne pas surcharger la figure, on s'est borné à représenter l'un de ces hexagones, celui qui environnerait le pôle B_0. Le système des homologues de S comprend alors cent vingt sommets; pour certaines positions particulières de S, ce nombre peut se réduire à soixante, à vingt, et même à douze sommets. Ce dernier cas se réalise, si le sommet S est situé à l'extrémité de l'un des axes quinaires du système.

Théorème LV. *Lorsqu'un polyèdre décemternaire possède les quinze plans de symétrie indiqués dans l'énoncé du théorème précédent, ces* *plans sont normaux aux quinze axes binaires, et le polyèdre possède un centre de symétrie; il en est dépourvu dans le cas contraire.*

Il résulte de la démonstration du théorème précédent que l'axe binaire KOK', *fig.* 12, est normal au plan M_3GMA_3. Or ce plan est l'un des quinze plans de symétrie du polyèdre; donc chacun de ces plans est normal à l'un des quinze axes binaires: donc le polyèdre possède alors un centre de symétrie (théorème XXII). Mais si le polyèdre était dépourvu de plans de symétrie, il ne pourrait avoir de centre de symétrie, à cause de ses axes binaires (théorème XXI).

THÉORÈME LVI. *Les polyèdres décemternaires ont deux modes distincts de symétrie, selon qu'ils ont ou non un centre de symétrie.*

C'est une conséquence des théorèmes LIV et LV.

Les symboles de ces deux modes seront

$$[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ 0C,\ 0P],$$
$$[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ C,\ 15P^2].$$

THÉORÈME LVII. *Les axes qui caractérisent la symétrie des polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires entrent aussi dans la symétrie des polyèdres décemternaires.*

Choisissons arbitrairement un sommet d'axe ternaire tel que A_2, *fig.* 12 : le milieu G de l'un des deux côtés A_1A_0, A_3A_4 adjacents au côté A_0A_4, qui est l'opposé du sommet A_2 dans le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$, sera l'extrémité d'un axe binaire (théorème LIII): il en sera de même des points H, K qui sont les homologues de G par rapport à l'axe ternaire OA_2. Dans le triangle sphérique HGK, les trois angles H, G, K sont droits; donc les trois côtés HG, KG, HK sont égaux à 90 degrés.

Les trois axes OG, OH, OK sont donc trois axes binaires rectangulaires, et le triangle sphérique GHK est trirectangle. Le sommet A_2 est le centre de ce triangle. De même A_4 sera le centre du triangle trirectangle GHK', B_0 celui du triangle trirectangle GK'H', H' étant l'extrémité inférieure de l'axe OH, et B_1 celui du triangle trirectangle KGH'.

Les quatre axes ternaires OA_2, OA_4, OB_0, OB_1 se combinent donc avec trois axes binaires rectangulaires, dans les conditions de situation relative qui caractérisent les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires.

Scolie. A la combinaison OA_2, OA_4, OB_0, OB_4 on pourrait substituer l'une quelconque des quatre combinaisons suivantes

$$[OA_0, OA_6, OB_1, OB_2], \quad [OA_0, OA_2, OB_3, OB_4],$$
$$[OA_1, OA_3, OB_0, OB_4], \quad [OA_1, OA_4, OB_2, OB_3].$$

Théorème LVIII. *Les polyèdres* $[6L^5, 10L^3, 15L^2, oC, oP]$ *possèdent tous les éléments de la symétrie des polyèdres* $[4L^3, 3L^2, oC, oP]$; *les polyèdres* $[6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15P^2]$ *possèdent tous les éléments de la symétrie des polyèdres* $[4L^3, 3L^2, C, 3P^2]$.

La partie de cet énoncé, relative aux axes de symétrie, a déjà été démontrée dans le théorème précédent; on en conclut facilement que les polyèdres $[6L^5, 10L^3, 15L^2, oC, oP]$ possèdent tous les éléments de la symétrie des polyèdres $[4L^3, 3L^2, oC, oP]$.

Si, de plus, le polyèdre décemternaire contient quinze plans de symétrie, les plans KG, GH, HK de la *fig.* 12 en feront partie, et représenteront les plans $3P^2$ des polyèdres $[4L^3, 3L^2, C, 3P^2]$. Le centre de symétrie C existant de part et d'autre, on voit que la symétrie caractérisée par $[4L^3, 3L^2, C, 3P^2]$ sera comprise dans celle plus complète des polyèdres $[6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15P^2]$.

Nota. Les théorèmes LVII et LVIII n'intéressent que d'une manière indirecte la théorie générale des polyèdres symétriques. Ils figurent ici, en vue des applications que l'on peut en faire, dans la cristallographie, à l'étude des corps du Système cubique.

Classification des polyèdres d'après la nature de leur symétrie, avec indication du nombre minimum de leurs sommets.

POLYÈDRE			SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre.	CLASSE du polyèdre.	NOMBRE MINIMUM DES SOMMETS DE 1re espèce.	2me espèce.	3me espèce.	4me espèce.
asymétrique.			oL, oC, oP	1re	1	1	1	1
symétrique	dépourvu d'axes		oL, C, oP	2me	2	2	2	
			oL, oC, P	3me	1	1	1	
	pourvu d'un axe principal	d'ordre pair.	A^{2q}, oL^2, oC, oP	4me	$2q$	$2q$		
			A^{2q}, oL^2, C, Π	5me	$2q$	$2q$		
			$A^{2q}, qL^2, qL'^2, oC, oP$	6me	$4q$			
			$A^{2q}, oL^2, oC, qP, qP'$	7me	$2q$	1		
			$A^{2q}, qL^2, qL'^2, C, \Pi, qP^2, qP'^2$	8me	$2q$	o ou $2q$*		
			$A^{2q}, 2qL^2, oC, 2qP$	9me	$4q$			
		d'ordre impair.	A^{2q+1}, oL^2, oC, oP	10me	$2q+1$	$2q+1$		
			A^{2q+1}, oL^2, C, oP	11me	$4q+2$	$4q+2$		
			A^{2q+1}, oL^2, oC, Π	12me	$2q+1$	$2q+1$		
			$A^{2q+1}, (2q+1)L^2, oC, oP$	13me	$4q+2$			
			$A^{2q+1}, oL^2, oC, (2q+1)P$	14me	$2q+1$	1		
			$A^{2q+1}, (2q+1)L^2, C, (2q+1)P^2$	15me	$4q+2$			
			$A^{2q+1}, (2q+1)L^2, oC, \Pi, (2q+1)P$	16me	$2q+1$			
	sphéroédrique	quaterternaire.	$4L^3, 3L^2, oC, oP$	17me	12			
			$4L^3, 3L^2, C, 3P^2$	18me	12			
			$4L^3, 3L^2, oC, 6P$	19me	4			
			$3L^4, 4L^3, 6L^2, oC, oP$	20me	24			
			$3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2$	21me	6			
		décem-ternaire.	$6L^5, 10L^3, 15L^2, oC, oP$	22me	60			
			$6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15P^2$	23me	12			

* Le nombre minimum des sommets de 2me espèce est égal à $2q$, si $q=1$, et à 0, si $q>1$.

Ce tableau offre une classification des polyèdres en vingt-trois classes, d'après les principes exposés dans ce Mémoire. Pour l'interprétation des symboles A, L, L', C, Π, P, P', on consultera les pages 144 et 145.

On remarquera que les classes 4me, 5me, jusqu'à la 16me inclusivement, se subdivisent elles-mêmes en différents ordres, d'après le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe principal.

Veut-on, d'après ce tableau, connaître les éléments intégrants de la symétrie d'un polyèdre de la 7me classe, 4me ordre? Son symbole sera

$$[A^4, 0L^2, 0C, 2P, 2P'];$$

d'où l'on voit que ce polyèdre possède un axe quaternaire, quatre plans de symétrie passant par cet axe, et croisés à 45 degrés, deux plans d'une première espèce rectangulaires entre eux, et deux autres pareillement rectangulaires entre eux, mais d'une autre espèce que les précédents, pas d'axe binaire, ni de centre de symétrie.

Les quatre dernières colonnes font connaître le nombre minimum de sommets de chaque polyèdre : tous les sommets de même espèce forment un système de sommets homologues, et il existe autant de tels systèmes d'homologues que d'espèces différentes de sommets, dans le polyèdre.

Avec un peu de réflexion, on trouvera facilement la figure que doit avoir le polyèdre à nombre minimum de sommets. Ainsi le polyèdre le plus simple sera :

Dans la 1re classe, le tétraèdre irrégulier;

Dans la 2me classe, l'octaèdre irrégulier à bases parallélogrammiques :

Dans la 3me classe, le triangle scalène;

Dans la 19me classe, le tétraèdre régulier;

Dans la 21me classe, l'octaèdre régulier;

Dans la 23me classe, l'icosaèdre régulier, etc.