JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Nouvelle méthode pour trouver les conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 123-131.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__123_0>

NOUVELLE MÉTHODE

POUR TROUVER LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ

DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES;

Par M. J. BERTRAND.

La question d'analyse qui fait l'objet de ce Mémoire a été traitée par un grand nombre de géomètres. Euler, Condorcet, Lexell, Lagrange, Poisson s'en sont successivement occupés, et plus récemment MM. Sarrus et Joachimsthal y ont consacré des Mémoires intéressants. Moi-même, dans un premier Mémoire qui fait partie du tome XVII du *Journal de l'École Polytechnique,* j'ai essayé de simplifier ces recherches en donnant une démonstration extrêmement simple de la formule élégante d'Euler. J'ai, de plus, indiqué, pour effectuer l'intégration quand elle est possible, deux méthodes, dont l'une conduit à la formule déjà trouvée par Poisson.

La plupart des travaux que je viens de citer semblent avoir pour but principal la démonstration simple de la formule d'Euler. Ils doivent peut-être en partie leur origine à une erreur propagée par Lagrange et Poisson, qui croyaient qu'Euler n'avait pas donné une démonstration complète de sa formule. Cette démonstration est cependant exposée, comme je l'ai fait voir, dans son *Traité du Calcul intégral,* et surpasse en simplicité toutes celles qui ont été proposées depuis.

Mais cette condition d'intégrabilité, dont la démonstration a été donnée tant de fois, est, on doit le dire, malgré sa forme élégante, d'une application fort pénible. Il faut exécuter, pour en faire usage, un grand nombre de différentiations, et quand elle est satisfaite, ce sont des opérations nouvelles qui font connaître l'intégrale dont l'existence a été démontrée.

La méthode que je propose dans ce Mémoire diffère notablement de celle d'Euler, et il faudrait des calculs compliqués pour vérifier directement leur concordance; elle ne conduit pas, il est vrai, à une condition aussi élégante, mais les opérations auxquelles elle donne naissance ont un grand avantage de simplicité. C'est en intégrant la fonction proposée qu'on s'assure qu'elle est intégrable, et chacune des opérations est suivie d'une vérification qui, si elle ne réussit pas, dispense de continuer le calcul. On a ainsi un avantage tout à fait analogue à celui que présente, en algèbre, la méthode des racines commensurables qui, sans donner une formule pour déterminer ces racines, fait connaître une série d'opérations à l'aide desquelles on peut constater leur existence, et dont une seule suffit souvent pour apprendre qu'il n'en existe pas.

I.

Soit

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y_n)$$

une expression dans laquelle y désigne une fonction indéterminée de x, et $y', y'', \ldots, y_n$ ses dérivées. La dérivée de F est, comme on sait,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dy'} y'' + \ldots + \frac{dF}{dy^n} y_{n+1},$$

et l'on voit qu'elle est, quel que soit F, linéaire par rapport à la dérivée de l'ordre le plus élevé, y_{n+1}.

D'après cette remarque, pour qu'une fonction différentielle $\varphi(x, y, y', \ldots, y_{n+1})$ soit une dérivée exacte, il est nécessaire qu'elle soit de la forme

$$\varphi = P + Q y_{n+1},$$

P et Q renfermant seulement les n premières dérivées de y.

Si, de plus, on désigne par F l'intégrale de la fonction φ, d'après ce qui précède, on doit avoir

$$Q = \frac{dF}{dy_n},$$

et, par conséquent,

$$F = \int_0^{y_n} Q\,dy_n + \psi(x, y, y', \ldots, y_{n-1}),$$

l'intégrale $\int_0^{y_n} Q\,dy_n$ devant être prise en considérant $x, y, \ldots, y_{n-1}$ comme des constantes.

Pour déterminer la fonction inconnue ψ, il faut former la dérivée de F et l'égaler à $P + Qy_n$; on trouvera aussi, en désignant $\int_0^{y_n} Q\,dy_n$ par k,

$$P - \frac{dk}{dx} - \frac{dk}{dy}y' - \frac{dk}{dy'}y'' - \ldots - \frac{dk}{dy_{n-1}}y_n = \left(\frac{d\psi}{dx}\right),$$

$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$ désignant ici la dérivée complète de la fonction ψ.

Le premier membre de l'égalité précédente doit donc être une dérivée exacte, et c'est en l'intégrant que l'on pourra connaître la fonction ψ qui, ajoutée à k, donnera la fonction cherchée F. Il résulte alors de ce qui précède que l'expression

$$P - \frac{dk}{dx} - \frac{dk}{dy}y' - \ldots - \frac{dk}{dy_{n-1}}y_n.$$

doit être de la forme

$$P_1 + Q_1 y_n,$$

P_1 et Q_1 étant indépendants de y_n. Si cela n'a pas lieu, il est inutile de continuer les opérations, l'expression proposée n'est pas intégrable. Si cela a lieu, on verra, comme plus haut, que l'on a

$$\psi = \int_0^{y_{n-1}} Q_1\,dy_{n-1} + \psi_1 = k_1 + \psi_1,$$

et que

$$\frac{d\psi_1}{dx} = P_1 - \frac{dk_1}{dx} - \frac{dk_1}{dy}y' - \ldots - \frac{dk_1}{dy_{n-1}}y_{n-1};$$

le second membre de cette équation devra être de la forme

$$P_2 + Q_2 y_{n-1},$$

P_2 et Q_2 étant indépendants de y_{n-1}, et, si cela n'a pas lieu, l'expression proposée ne peut être une dérivée exacte.

En supposant que

$$\frac{d\psi_1}{dx} = P_2 + Q_2 y_{n-1},$$

on aura, comme plus haut,

$$\psi_1 = \int_0^{y_{n-2}} Q_2\, dy_{n-2} + \psi_2 = k_2 + \psi_2,$$

et

$$\frac{d\psi_2}{dx} = P_2 - \frac{dk_2}{dx} - \frac{dk_2}{dy} y' - \ldots - \frac{dk_2}{dy_{n-3}} y_{n-2},$$

et il faudra encore que le second membre de cette expression soit linéaire par rapport à y_{n-2}.

En continuant à raisonner de la même manière, on ramènera l'intégration proposée à celle d'une expression dont l'ordre sera de moins en moins élevé, et, enfin, à celle d'une expression de la forme

$$P_n + Q_n y',$$

où P_n et Q_n ne dépendront que de x et y. Or on connaît la condition d'intégrabilité d'une semblable expression et l'on sait l'intégrer dans le cas où elle est remplie.

L'avantage principal que présente la méthode précédente consiste dans la série des vérifications qui, si l'expression n'est pas intégrable, permettent, en général, de s'en apercevoir presque immédiatement.

II.

L'application de la méthode précédente exige des intégrations, la condition d'Euler a l'avantage de n'exiger que des différentiations; mais nous allons faire voir que, lors même qu'on ne pourrait pas effectuer les opérations indiquées dans le paragraphe précédent, il serait encore possible de décider si l'intégration est possible.

Reprenons l'expression

$$\varphi = \mathrm{P} + \mathrm{Q}y_{n+1};$$

si nous posons

$$\int_0^{y_n} \mathrm{Q}\, dy_n = k,$$

la première des conditions d'intégrabilité consiste en ce que l'expression

$$(a) \qquad \mathrm{P} - \frac{dk}{dx} - \frac{dk}{dy}y' - \ldots - \frac{dk}{dy_{n-1}}y_n$$

doit être de la forme

$$\mathrm{P}_1 + \mathrm{Q}_1 y_n.$$

Or je vais montrer que l'on pourra toujours savoir si cette condition est remplie, et former, si elle l'est, les fonctions P_1 et Q_1. Si, en effet, nous remplaçons k par sa valeur, l'expression (a) prend la forme

$$(a) \qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{P} - \int_0^{y_n}\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx} - \frac{d\mathrm{Q}}{dy}y' - \ldots - \frac{d\mathrm{Q}}{dy_{n-2}}y_{n-1}\right)dy_n \\ &\quad - y_n\int_0^{y_n}\frac{d\mathrm{Q}}{dy_{n-1}}\,dy_n. \end{aligned}\right.$$

Pour que cette équation soit linéaire par rapport à y_n, il faut et il suffit que sa dérivée, par rapport à y_n, soit indépendante de cette lettre, c'est-à-dire que

$$(b) \qquad \frac{d\mathrm{P}}{dy_n} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx}y' - \ldots - \frac{d\mathrm{Q}}{dy_{n-2}}y_{n-1} - y_n\frac{d\mathrm{Q}}{dy_{n-1}} - \int_0^{y_n}\frac{d\mathrm{Q}}{dy_{n-1}}\,dy_n,$$

soit indépendante de y_n, ou que la dérivée, par rapport à y_n, soit nulle, ce que l'on peut évidemment vérifier sans effectuer aucune intégration.

En supposant cette condition remplie, l'intégrale $\int_0^{y_n}\frac{d\mathrm{Q}}{dy_{n-1}}\,dy_n$ sera par cela même connue, et égale à la différence des valeurs que prend l'ensemble des autres termes de l'expression (b) quand on y fait successivement $y_n = 0$, $y_n = y_n$. Il en résulte que cette expression (b), et, par conséquent, la valeur de Q_1 peut être regardée comme connue. On peut également connaître P_1 sans effectuer aucune intégration, car cette fonction sera la différence de l'expression (a) et du produit connu $Q_1 y_n$, c'est-à-dire

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} &P - \int_0^{y_n}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dp}y' - \ldots - \frac{dQ}{dy_{n-2}}y_{n-1}\right)dy_n \\ &\quad - y_n\int_0^{y_n}\frac{dQ}{dy_{n-1}}\,dy_n - Q_1 y_n.\end{aligned}\right.$$

En remarquant que, dans cette expression, l'intégrale $\int_0^{y_n}\frac{dQ}{dy_{n-1}}\,dy_n$ est connue, et que, de plus, on sait d'avance que y_n doit disparaître du résultat, on en conclura que la seule intégrale inconnue

$$\int_0^{y_n}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dy}y' - \ldots - \frac{dQ}{dy_{n-2}}y_{n-1}\right)dy_n,$$

pourra être calculée, et sera la différence des valeurs que prennent les autres termes de l'expression (c) pour $y_n = y_n$ et $y_n = 0$.

Ayant formé l'expression

$$P_1 + Q_1 y_n,$$

on opérera sur elle comme sur

$$P + Q y_{n+1},$$

et l'on ramènera son intégration à celle d'une expression d'ordre moindre,

$$P_2 + Q_2 y_{n-1},$$

dont la formation n'exigera que des différentiations, et, en continuant ainsi, on sera conduit à une expression de la forme

$$P_n + Q_n y',$$

dont les conditions d'intégrabilité sont connues.

III.

Si la fonction différentielle proposée contenait les dérivées de deux fonctions indépendantes l'une de l'autre y et z, la méthode précédente serait encore applicable. On considérerait l'une des deux fonctions, z par exemple, comme une fonction connue de x, et l'on appliquerait la méthode précédente comme s'il n'y avait que la fonction y qui restât indéterminée; il n'y aurait rien à changer à la série des opérations.

IV.

Je terminerai en donnant quelques exemples de l'application de la méthode précédente :

1°. Soit l'expression

$$y^2 + 2xyy' + xy'' + x^2y''' - y' = \mathrm{P} + \mathrm{Q}y''',$$

on a

$$\mathrm{P} = y^2 + (2xy - 1)y' + xy'', \quad \mathrm{Q} = x^2,$$

par conséquent,

$$\int_0^{y''} \mathrm{Q}\,dy'' = \int_0^{y''} x^2\,dy'' = x^2y'' = k_1,$$

l'expression désignée plus haut par

$$\mathrm{P} - \frac{dk}{dx} - \frac{dk}{dy}y' - \frac{dk}{dy'}y'',$$

est ici

$$\begin{aligned} &y^2 + (2xy - 1)y' + xy'' - 2xy'' \\ &= y^2 + (2xy - 1)y' - xy'' = \mathrm{P}_1 + \mathrm{Q}_1y'', \end{aligned}$$

P_1 étant ici égal à $y^2 + (2xy - 1)y'$ et Q_1 à $-x$, l'intégrale

$$\int_0^{y'} \mathrm{Q}_1\,dy' = \int_0^{y'} -x\,dy' = -xy' = k_1,$$

et, par conséquent,

$$P_1 - \frac{dk_1}{dx} - \frac{dk_1}{dy}y' = y^2 + (2xy - 1)y' + y'$$
$$= y^2 + 2xyy' = P_2 + Q_2 y',$$

l'intégrale

$$\int_0^y Q_2\, dy^2 = \int_0^y 2xy\, dy = y^2 = k_2,$$

et, par conséquent,

$$P_2 - \frac{dk_2}{dx} = y^2 - y^2 = 0;$$

en sorte que l'intégrale demandée est égale à

$$k + k_1 + k_2 = x^2 y'' - xy' + xy^2.$$

2°. Considérons encore l'expression

$$z'\sqrt{1+y'^2} - y'\sqrt{1+z'^2} + \frac{zy'y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{yz'z''}{\sqrt{1+z'^2}},$$

où z et y désignent deux fonctions quelconques de x dont z', y', z'', y'' sont les dérivées. Pour intégrer cette expression, nous commencerons par intégrer le coefficient de y'' en y considérant y' comme seule variable, nous aurons

$$(1)\qquad \int_0^{y'} \frac{zy'\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = z\sqrt{1+y'^2} - z.$$

Si nous retranchons de l'expression proposée la dérivée complète de cette intégrale, il reste

$$z' - y'\sqrt{1+z'^2} - \frac{yz'z''}{\sqrt{1+z'^2}};$$

il faut intégrer cette expression et ajouter le résultat à l'intégrale (1) trouvée plus haut. Pour faire cette intégration, il faut intégrer le coefficient de y' en y considérant y comme seule variable, et on a

$$-\int_0^y dy\sqrt{1+z'^2} = -y\sqrt{1+z'^2},$$

Si nous retranchons de l'expression précédente la dérivée complète de cette intégrale, il reste z', dont l'intégrale est z, en sorte que l'intégrale demandée est

$$z\sqrt{1+y'^2} - z - y\sqrt{1+z'^2} + z,$$

ou

$$z\sqrt{1+y'^2} - y\sqrt{1+z'^2}.$$

Ces deux exemples suffisent pour montrer combien est facile l'application de notre méthode. Si l'on cherche à leur appliquer la règle d'Euler, on reconnaîtra que les calculs à faire pour reconnaître que l'intégration est possible seraient plus longs que ceux qui permettent d'en trouver le résultat. Cet avantage de simplicité sera d'autant plus sensible que les expressions considérées seront plus compliquées et d'un ordre plus élevé.

P. S. Dans un premier Mémoire qui fait partie du *Journal de l'École Polytechnique,* tome XVII, j'ai donné sous une forme géométrique assez élégante la condition nécessaire pour qu'une expression de la forme

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit une différentielle exacte; quoique ce résultat n'ait pas un rapport direct avec le Mémoire précédent, je saisis cette occasion de déclarer que Clairaut en a fait usage dans sa *Théorie de la figure de la terre*, et qu'il n'était, par conséquent, pas nouveau lorsque je l'ai rencontré.