JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. WANTZEL

Mémoire sur la théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 111-122.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__111_0>

MÉMOIRE
SUR LA THÉORIE DES DIAMÈTRES RECTILIGNES DES COURBES QUELCONQUES;

PAR L. WANTZEL [*].

Euler s'est occupé de la recherche des diamètres rectilignes dans un Mémoire qui fait partie de la *Collection de Berlin* pour 1745; mais ce grand géomètre n'est arrivé à aucun résultat remarquable, et la question a été à peine effleurée. En effet, il se borne à présenter les considérations géométriques relatives à la déduction des diamètres et à chercher péniblement les équations de courbes qui présentent trois ou quatre diamètres rectilignes.

Il reste à trouver la loi de succession des diamètres, les conditions pour qu'une courbe en présente un certain nombre limité ou illimité, et enfin toutes les formes particulières que peuvent offrir les courbes de cette espèce.

Nous avons pensé qu'il serait intéressant de poursuivre ces recherches et de faire connaître complétement les propriétés des diamètres rectilignes des courbes quelconques.

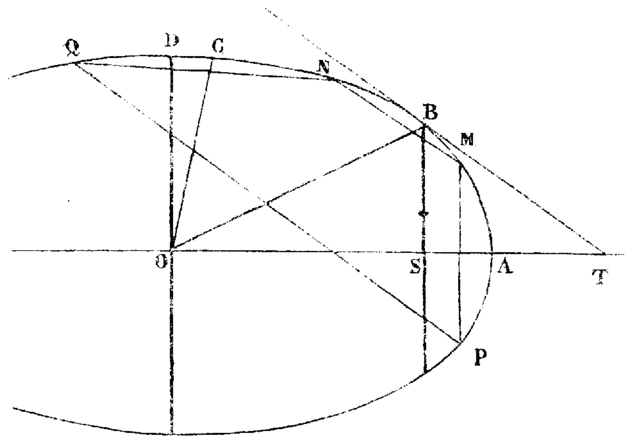
I.

Une courbe peut avoir un seul diamètre rectiligne : elle ne présente pas alors d'autre particularité que le genre de symétrie qui résulte de la définition même du diamètre. S'il y a deux diamètres conjugués l'un de l'autre, la courbe n'offrira également rien de remarquable; seulement cette symétrie sera double, ce qui influe assez peu, en général, sur l'ensemble des propriétés de la courbe.

[*] Wantzel avait déjà publié un extrait de ce Mémoire dans le Journal l'*Institut*. Nous donnons ici le Mémoire complet, tel que M. Bertrand l'a trouvé dans les papiers que l'auteur a laissés à sa mort. (J. L.)

Mais si une courbe possède deux diamètres rectilignes non conjugués qui se coupent, elle en aura nécessairement un troisième, puis un quatrième, et ainsi de suite jusqu'à l'infini, à moins qu'on ne revienne sur un diamètre déjà obtenu. Cette proposition fondamentale a été indiquée par Euler; mais la marche qu'il a suivie ne lui a pas permis d'en tirer les conséquences.

Soient OA, OB les deux diamètres de la courbe; imaginons une conique, ellipse ou hyperbole, construite sur ces deux diamètres avec les mêmes directions de cordes. Il est facile de déterminer cette conique en se donnant la longueur d'un diamètre, et toutes les coniques semblables jouiront de la même propriété. On pourra donc en faire passer une QBP par un point quelconque M de la courbe proposée. Par le point M, menons la corde MP, divisée en deux parties égales par le diamètre OA, et par les points M et P menons les cordes MN, PQ correspondantes au diamètre OB; joignons NQ et partageons cette ligne en parties égales par le diamètre OC de la conique. La



position de ce diamètre est déterminée et indépendante du point M. En effet, les aires des secteurs QOB, BOP sont égales, ainsi que celles de BON, BOM; d'où il résulte évidemment

$$\mathrm{NOC} = \mathrm{MOA},$$
$$\mathrm{BOC} = \mathrm{BOA}.$$

Donc, le diamètre OC forme avec OB un secteur équivalent à celui que comprennent les diamètres OA et OB. Il en résulte que non-seulement ce diamètre resterait le même, quelle que fût la position du point M sur la conique, mais qu'on le trouvera encore pour une conique semblable construite sur les mêmes diamètres OA, OB.

Si maintenant nous comparons la courbe proposée à la conique, les points M, P, N, Q appartiennent aux deux courbes d'après la définition des diamètres, et la droite OC divise en deux parties égales une corde QN de la courbe. Mais en faisant passer une conique semblable par un autre point M', on eût trouvé une autre corde Q'N' parallèle à QN, puisque, dans la conique, elle correspond au même diamètre OC. Comme cette corde et les analogues seraient divisées en parties égales par ce diamètre, on en doit conclure que la droite OC est un diamètre de la courbe proposée. Ainsi *toute courbe dans laquelle il y a deux diamètres qui se coupent en possède un troisième passant par leur point de concours; ces trois diamètres forment des secteurs égaux dans une conique construite sur les deux premiers diamètres avec les mêmes directions de cordes.*

Si l'on opère ensuite sur le point N de la conique par rapport au diamètre OC comme on l'a fait sur le point M et sur le diamètre OB, on trouvera un quatrième diamètre OD qui, par la même raison, appartiendra également à la courbe proposée. Ce diamètre formera avec OC un secteur DOC équivalent aux secteurs COB et BOA. En continuant de la même manière, on obtiendra un nombre indéfini de diamètres de la courbe proposée qui jouiront tous de la même propriété.

Donc, *tous les diamètres rectilignes d'une courbe quelconque appartiennent à une conique dans laquelle ils correspondent aux mêmes cordes que dans la courbe proposée et forment avec le contour de la conique des secteurs équivalents.*

Il résulte de là que la plupart des propriétés des diamètres des coniques s'appliquent à ceux d'une courbe quelconque. Ainsi, par exemple, si l'on rapporte la courbe à un diamètre rectiligne et à ses cordes, le produit des coefficients d'inclinaison d'un autre diamètre et de ses cordes par rapport au premier sera une quantité constante.

II.

Il reste à reconnaître, par l'inspection seule des deux premiers diamètres et de leurs cordes, quelle sera la nature de la conique. Cette distinction est très-facile. En effet, si l'on se donne la longueur du diamètre OB, la parallèle BT aux cordes de ce diamètre sera tangente en B; et la courbe sera une ellipse ou une hyperbole selon que la parallèle BS aux cordes de l'autre diamètre OA tombera du côté du point O ou de l'autre côté.

On en conclut que *la courbe proposée sera du genre elliptique ou hyperbolique selon que la parallèle aux cordes du premier diamètre, menée par le point de concours, passera dans l'angle formé par le second diamètre et la direction de ses cordes ou qu'elle les laissera du même côté.*

Si les deux premiers diamètres étaient des axes, et dans ce cas seulement, la conique serait un cercle. Il est évident que tous les autres diamètres sont alors également des axes formant entre eux des angles égaux.

Un cas *intermédiaire* que nous avons écarté tacitement, se présente ici : c'est celui où les deux diamètres correspondraient à la même direction de cordes, en sorte qu'il n'existerait plus de conique susceptible d'être construite sur ces diamètres.

Soient M un point de la courbe proposée et OA et OB les deux diamètres [*]. On construira les points P, N, Q de la courbe sur la ligne droite AB comme sur la conique, et l'on trouvera le diamètre OC dont la position sera déterminée et indépendante du point M, puisque

$$BC = AB.$$

En continuant la même construction, on obtiendra une série de droites OC, OD, etc., qui intercepteront des parties égales sur toute parallèle aux cordes. La droite OC divise en deux parties égales une corde QN de la courbe proposée. Si l'on prenait un autre point M', on trouverait une autre corde Q'N', parallèle à QN, qui serait aussi

[*] On peut suivre sur la même figure.

divisée en parties égales par OC. Donc OC est un diamètre de la courbe proposée, et il en est de même de toutes les droites consécutives OD, OE, etc.

Ainsi, *dans le cas intermédiaire* où les diamètres correspondent à la même direction de cordes, *la courbe proposée a une infinité de diamètres qui concourent au même point et qui interceptent sur une même direction des grandeurs égales.*

III.

Dans tout ce qui précède, nous avons toujours supposé que les deux diamètres de la courbe proposée se coupassent. Si une courbe possède deux diamètres parallèles, on pourra toujours construire une parabole sur ces diamètres avec la même direction de cordes. En faisant passer cette parabole par un point de la courbe et en opérant comme sur les autres coniques, on trouve une série de diamètres parallèles et équidistants qui devront appartenir à la courbe proposée.

Donc, lorsqu'*une courbe a deux diamètres parallèles, elle en a une infinité d'autres équidistants entre eux et qui appartiennent tous à une parabole dans laquelle ils correspondent aux mêmes cordes.*

Il peut arriver aussi que ces diamètres divisent les mêmes cordes en deux parties égales.

Telles sont les principales propriétés géométriques des courbes qui possèdent des diamètres rectilignes.

IV.

Nous allons passer maintenant à la recherche des conditions *analytiques* relatives à la succession des diamètres et à la détermination de leur nombre. Supposons deux diamètres qui se coupent comme précédemment, et rapportons la courbe au premier diamètre et à la direction de ses cordes. Soient ensuite m et n les coefficients d'inclinaison du second diamètre et de ses cordes. On voit de suite que la courbe sera du genre *elliptique* ou *hyperbolique* selon que m et n seront de signes contraires ou de même signe.

Considérons d'abord le cas *elliptique*. L'aire comprise entre les deux premiers diamètres d'une des ellipses conjuguées à la courbe a pour expression $\omega \frac{ab}{2}$, en désignant par ω l'angle du secteur circulaire correspondant. Les diamètres suivants forment avec le premier des aires doubles, triples, etc., en sorte que les angles ω obtenus de la même manière seront doubles, triples, etc., du premier. Mais les inclinaisons m et n sont liées simplement à l'angle ω.

En effet, on a

$$m = \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{OS}} \text{ [*]}, \quad n = -\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{ST}},$$

d'où

$$\frac{m}{n} = -\frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{OS}};$$

d'ailleurs,

$$\mathrm{OS} = \mathrm{OA} \cos \omega, \quad \mathrm{ST} = \mathrm{OA}\, \frac{\sin^2 \omega}{\cos \omega},$$

donc

$$\frac{m}{n} = -\operatorname{tang}^2 \omega.$$

Si l'on désigne par m' et n' les inclinaisons du troisième diamètre et de ses cordes sur le premier, on aura pareillement

$$\frac{m'}{n'} = -\operatorname{tang}^2 2\omega;$$

puis, en continuant la même notation,

$$\frac{m''}{n''} = -\operatorname{tang}^2 3\omega, \quad \frac{m'''}{n'''} = -\operatorname{tang}^2 4\omega, \ldots.$$

On peut, du reste, éliminer $\operatorname{tang} \omega$ et trouver les relations qui lient entre elles les inclinaisons des diamètres successifs. Pour cela, il faut développer, ce qui donne

$$\frac{m'}{n'} = -\frac{4 \operatorname{tang}^2 \omega}{(1 - \operatorname{tang}^2 \omega)^2} = \frac{4 \frac{m}{n}}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2},$$

$$\frac{m''}{n''} = -\frac{(3 \operatorname{tang} \omega - \operatorname{tang}^3 \omega)^2}{(1 - 3 \operatorname{tang}^2 \omega)^2} = \frac{\frac{m}{n}\left(3 + \frac{m}{n}\right)^2}{\left(1 + 3\frac{m}{n}\right)^2},$$

et ainsi de suite.

---

[*] Même figure.

Si l'on joint à ces relations la condition $mn = m'n' = m''n''$, etc., que nous avons signalée plus haut, on pourra déterminer l'inclinaison d'un diamètre de rang quelconque et celle de ses cordes.

L'aire elliptique comprise entre les deux premiers diamètres est égale à $\omega\frac{ab}{2}$, comme nous l'avons vu ci-dessus; elle est, par conséquent, commensurable avec l'ellipse entière, si l'angle ω l'est lui-même avec quatre droits.

Ainsi, pour étudier les diamètres rectilignes d'une courbe du genre elliptique, il faut égaler $\frac{m}{n}$ à $-\tang^2\omega$; si l'angle ω est commensurable avec quatre droits, elle aura plusieurs diamètres dont le nombre sera marqué par le nombre de fois que la commune mesure sera contenue dans quatre droits (ou la moitié si ce nombre est pair); dans le cas contraire, la courbe sera nécessairement une ellipse ou une série d'ellipses concentriques et semblables.

Dans le cas *hyperbolique*, les aires successives seront également représentées par $z\frac{ab}{2}$, $2z\frac{ab}{2}$, etc., en désignant par z l'aire du secteur d'une hyperbole équilatère correspondant au secteur compris entre les deux premiers diamètres. Pour retrouver ici des relations aussi simples que dans l'autre cas, il est convenable d'introduire des lignes trigonométriques hyperboliques. Si l'on désigne par x et y les coordonnées rectangles du point B' qui correspond au point B dans l'hyperbole équilatère, l'aire du secteur est $l(x+y) = z$; d'où l'on tire, à cause de $x^2 - y^2 = 1$,

$$x = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos \text{hyp}\, z, \quad y = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sin \text{hyp}\, z.$$

Le rapport $\frac{m}{n}$ des inclinaisons du second diamètre et de ses cordes est toujours égal à $\frac{\text{TS}}{\text{OS}}$; or,

$$\text{OS} = \cos \text{hyp}\, z, \quad \text{ST} = \text{OS} - \text{OT} = \cos \text{hyp}\, z - \frac{1}{\cos \text{hyp}\, z} = \frac{\sin^2 \text{hyp}\, z}{\cos \text{hyp}\, z},$$

donc

$$\frac{m}{n} = \text{tang}^2 \text{hyp}\, z.$$

On voit que l'on obtient le même résultat que pour le cas elliptique, en remplaçant les lignes trigonométriques par les lignes hyperboliques et en changeant le signe. Il est inutile de faire remarquer que les relations en vertu desquelles $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, etc., se déduisent de $\frac{m}{n}$, s'appliqueront alors sans modification aux deux genres de courbes.

Pour le cas *intermédiaire*, le coefficient n est constant et les inclinaisons m, m', m'', etc., croissent évidemment en progression arithmétique.

Lorsqu'il s'agit d'une courbe à diamètres parallèles, c'est, au contraire, m qui est constante, et n varie en raison inverse de la distance au premier diamètre, puisque les diamètres de la courbe appartiennent tous à une parabole; de plus, comme ils sont équidistants, n croît aussi en progression arithmétique. Il ne faut pas oublier que n peut être également constant pour ce genre de courbes.

V.

De tout ce qui précède, on peut facilement conclure qu'il sera possible de construire une courbe possédant autant de diamètres que l'on voudra. Il n'y a pas lieu de s'occuper du cas de deux diamètres, parce qu'ils sont toujours conjugués.

Cherchons la forme générale de l'équation des courbes qui ont p diamètres rectilignes. Pour cela, rappelons-nous qu'un point quelconque de la courbe est situé sur une ellipse construite sur les mêmes diamètres, dont l'équation sera de la forme

$$y^2 - mnx^2 = \mathrm{C},$$

en conservant les notations ci-dessus.

Le point de la courbe sera déterminé par l'intersection de cette ellipse avec la droite

$$y = \operatorname{tang} \alpha \sqrt{-mn},$$

si l'on appelle α l'angle du secteur circulaire qui correspond au secteur elliptique déterminé par cette direction. La courbe proposée sera représentée généralement par ces deux équations, en y regardant C comme une fonction de α. Mais si la courbe doit avoir p diamètres rectilignes, il résulte de la loi de succession que plusieurs points de l'ellipse appartiennent à la courbe et qu'ils correspondent à des valeurs de α en progression arithmétique dont la raison est 2ω.

Cet angle ω est toujours celui qui satisfait à la condition

$$\operatorname{tang}^2 \omega = -\frac{m}{n},$$

et qui, dans ce cas, doit être égal à $\frac{2\pi}{p}$. Alors, C doit être une fonction périodique de α qui ne change pas quand α augmente de $\frac{4k\pi}{p}$: d'un autre côté, on voit que cette fonction ne change pas de signe avec α.

L'équation suivante

$$y^2 - mnx^2 = \sum \mathrm{A}_k \cos \frac{kp\alpha}{2},$$

dans laquelle k désigne un nombre quelconque entier et positif, représente donc toujours une courbe qui a p diamètres rectilignes.

La courbe sera algébrique si le nombre des termes du second membre est limité; mais elle le serait encore dans un grand nombre d'autres cas, si, par exemple, on remplace le premier membre par $\frac{1}{y^2 - mnx^2}$, ou par toute autre fonction algébrique de la même quantité.

La plus simple des courbes de ce genre est une courbe du troisième degré à trois diamètres. Nous la déduirons de la forme ci-dessus, en prenant $\frac{1}{(\cos\alpha)^{\frac{2}{3}}}$ pour la fonction périodique du second membre, ce qui donne

$$(y^2 - mnx^2)^{-\frac{3}{2}} = \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Or

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = -\frac{\sqrt{-mn}\,[4mnx^3 + 3x(y^2 - mnx^2)]}{(y^2 - mnx^2)^{\frac{3}{2}}},$$

à cause de

$$y = x \operatorname{tang} \alpha \sqrt{-mn}.$$

L'équation sera donc

$$3xy^2 + mnx^3 = -\frac{1}{\sqrt{-mn}}.$$

Si l'on fait $mn = -1$, on obtient la courbe

$$3xy^2 - x^3 = -1,$$

qui possède trois axes.

Pour les courbes du genre *hyperbolique*, on les représentera également par la combinaison de l'équation de l'hyperbole

$$y^2 - mnx^2 = C,$$

avec l'équation de la droite

$$y = x \operatorname{tang} \alpha \sqrt{-mn},$$

en regardant C comme fonction de α.

La quantité α est ici l'aire du secteur d'hyperbole équilatère qui correspond à celui que détache sur l'hyperbole le rayon vecteur dont l'équation est rapportée ci-dessus. On verra, comme pour l'autre cas, que la fonction C ne doit pas changer quand α augmente d'un multiple de $2z$; en sorte qu'on sera conduit à cette forme générale de l'équation

$$y^2 - mnx^2 = \sum A_k \cos \frac{k\alpha\pi}{z}.$$

La quantité z est toujours l'aire du secteur hyperbolique équilatère correspondant au secteur formé par les deux premiers diamètres, et l'on a

$$\operatorname{tang}^2 \operatorname{hyp} z = \frac{m}{n}.$$

Les courbes de ce genre sont toutes transcendantes.

Pour obtenir une courbe de cette espèce assez facile à construire, nous supposerons $mn = 1$ et $z = \pi$, ce qui détermine m et n, et nous prendrons les deux équations

$$y^2 - x^2 = \cos^2 \alpha, \quad y = x \operatorname{tang\,hyp} \alpha :$$

comme

$$\operatorname{tang\,hyp} \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}},$$

on en conclut

$$\frac{y+x}{y-x} = e^{2\alpha},$$

d'où

$$y + x = e^{\alpha} \cos \alpha, \quad y - x = e^{-\alpha} \cos \alpha.$$

Sous cette forme, on construira commodément la courbe en question, et l'on reconnaîtra qu'elle est composée de feuilles qui partent toutes de l'origine et qui aboutissent à l'hyperbole

$$y^2 - x^2 = 1;$$

ces feuilles vont donc en s'allongeant, et elles ont chacune un diamètre qui finit par converger indéfiniment vers l'asymptote de cette courbe.

Le cas *intermédiaire* se rapproche un peu du précédent, et l'on pourrait déduire qui lui convient de celles que nous venons d'obtenir, en faisant tendre n vers l'infini. Mais on arrive plus rapidement si l'on remarque que, pour chaque valeur de x, on doit trouver des points de la courbe en faisant varier l'inclinaison suivant une progression arithmétique dont la raison soit le double de l'inclinaison des deux premiers diamètres.

Ainsi, l'équation doit exprimer que x est une fonction de $\frac{y}{x}$ qui ne change pas quand $\frac{y}{x}$ augmente d'une quantité donnée, ce qui conduit à

$$x = \sum A_k \cos \frac{k\pi x}{my}.$$

On peut prendre pour exemple

$$x = \cos 3 \frac{y}{x},$$

et l'on trouve également une série de feuilles émanant du même point, mais qui aboutissent à une parallèle à l'axe des y.

Il ne reste plus qu'à faire connaître le type de l'équation des courbes à diamètres parallèles. On devra les considérer comme données par l'équation d'une parabole

$$y^2 - 2anx = \mathrm{C},$$

combinée avec celle de plusieurs parallèles à l'axe des x; il faut que C ne change pas quand y augmente d'un multiple de $2a$, si a représente la distance des diamètres. Ainsi, l'on arrive à la forme

$$y^2 - 2anx = \sum \mathrm{A}_k \cos\frac{k\pi y}{a},$$

qui ne représente que des courbes transcendantes.

Enfin, si les diamètres parallèles doivent correspondre aux mêmes cordes, on a évidemment

$$x = \sum \mathrm{A}_k \cos\frac{k\pi y}{a},$$

puisque x est une fonction périodique de y.